Cvičení 11 – příklad 1 (Isibalo.com)

Viz video „Matice přechodu a zobrazení motivačně“ na webové stránce `www.isibalo.com/matematika/linearni-algebra/matice-prechodu-a-zobrazeni-motivacne`.

Určete matici A_S zobrazení φ (ve standardní bázi), které překlopí vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ podle přímky $p : x - 2y = 0$.

Nápověda: Zkuste najít jinou bázi α, vhodnější než standardní, pro níž bude snadné určit matici zobrazení A_α, které překlápí vektory podle zadané přímky. Pomocí matic přechodu a jejich kombinací s A_α potom snadno dostaneme matici A_S.

Řešení

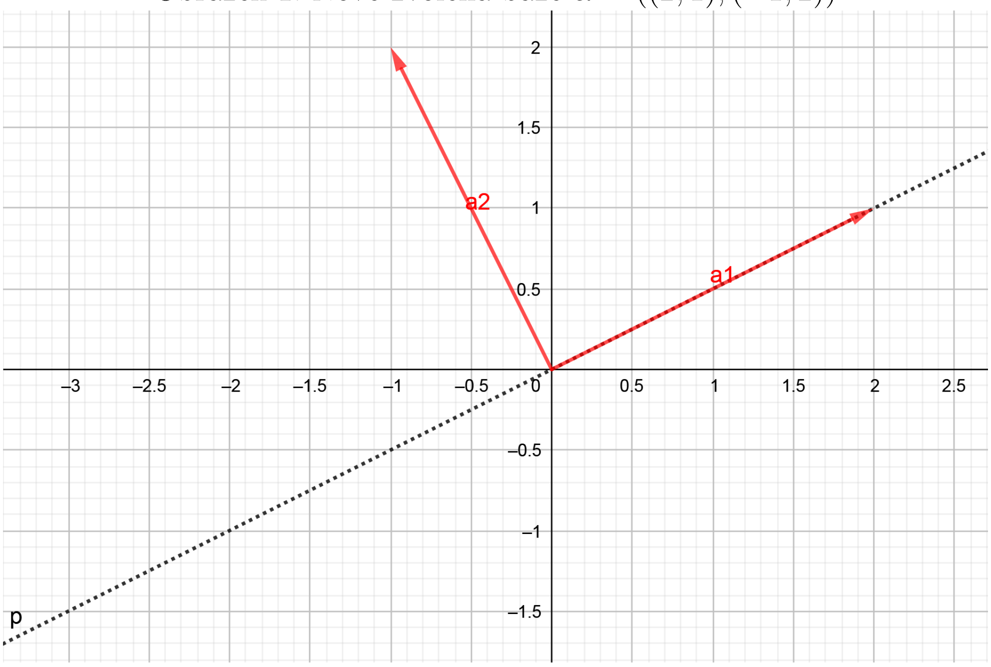
Volba báze

Budeme se držet nápovědy a hledat vhodnější bázi α. Jsme v prostoru $\mathbb{R}^2$, báze by tedy měla obsahovat dva lineárně nezávislé vektory. Jako první volme vektor $\vec{\alpha_1}$ ležící na přímce p, například

$$\vec{\alpha_1} = (2, 1).$$

Ten se překlopením zobrazí sám na sebe. Druhý vektor báze volíme tak, aby bylo snadné jej „překlopit“ podle přímky $x - 2y = 0$ a zároveň nebyl lineárně závislý na $\vec{\alpha_1}$. Pokud například určíme $\vec{\alpha_2} = (-1, 2)$, který je kolmý k přímce p, jeho překlopením dostaneme vektor $(1, -2)$ opačný k vektoru $\vec{\alpha_2}$. Názorně jsou vektory vidět na Obrázku 1.

Obrázek 1: Nově zvolená báze $\alpha = ((2, 1); (-1, 2))$



Nalezení matice zobrazení v nově zvolené bázi

Matici zobrazení φ v nově zvolené bázi α vytvoříme na základě koeficientů, jimiž násobíme vektory báze α, abychom získali jejich obraz. Z předchozího víme, že

$$\varphi(\vec{\alpha_1}) = \varphi(2,1) = (2,1) = \mathbf{1} \cdot (2,1) + \mathbf{0} \cdot (-1,2)$$

a zároveň

$$\varphi(\vec{\alpha_2}) = \varphi(-1,2) = (1,-2) = \mathbf{0} \cdot (2,1) + (-\mathbf{1}) \cdot (-1,2).$$

Koeficienty použité při násobení bázových vektorů vložíme do sloupců matice A_α zobrazení φ dle báze α:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Ve výuce jsme při tvorbě této matice zobrazení udělali chybu. Nesprávně jsme do sloupců matice vložili obrazy bázových vektorů ve standardní bázi, tj. $(2,1)^T$ a $(1,-2)^T$. Matice A_α má však generovat obrazy v bázi α.

Nalezení matic přechodu

Abychom pomocí matice A_α mohli určit matici zobrazení A_S podle standardní báze, je třeba nalézt matice přechodu mezi bázemi S a α. Nalezení matice přechodu $P_{\alpha \to S}$ je jednodušší. Vektory báze α jsou totiž zadány vzhledem ke standardní bázi, jejich souřadnice tedy pouze sloupcově vložíme do matice přechodu:

$$P_{\alpha \to S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Opačnou matici přechodu $A_{S \to \alpha}$ je možné vypočítat tak, že nalezneme inverzní matici k $P_{\alpha \to S}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \frac{1}{5} \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Je tedy

$$P_{S \to \alpha} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezení matice zobrazení A_S

Abychom pomocí matice A_α a matic přechodu určili matici A_S ve standardní bázi, je třeba provést následující tři kroky:

1. Vektor $(\vec{u})_S$ ve standardní bázi převést do báze α, tj. určit $(\vec{u})_\alpha$.

2. Pomocí matice zobrazení A_α najít obraz vektoru $(\vec{u})_\alpha$, tj. určit $(\varphi(\vec{u}))_\alpha$.

3. Obraz vektoru $\vec{u}$ v bázi α převést zpátky do standardní báze S, tj. najít $(\varphi(\vec{u}))_S$.

K těmto akcím nám postupně poslouží matice $P_{S\to\alpha}, A_\alpha, P_{\alpha\to S}$. Jejich složením dostaneme kýženou matici A_S, což pro nás vlastně znamená je vynásobit ve správném pořadí:

$$\begin{aligned} A_S \cdot \vec{u} &= (P_{\alpha\to S} \cdot A_\alpha \cdot P_{S\to\alpha}) \cdot \vec{u} \\ A_S &= P_{\alpha\to S} \cdot A_\alpha \cdot P_{S\to\alpha} \end{aligned}$$

Jednodušší bude začít součinem $P_{\alpha\to S} \cdot A_\alpha$:

$$P_{\alpha\to S} \cdot A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Následně můžeme tuto matici vynásobit maticí přechodu $P_{S\to\alpha}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Máme tedy hledanou matici A_S:

$$A_S = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$