Cvičení 11 – příklad 2 (z přednášky)

Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace φ prostoru $\mathbb{R}^2$ zadané maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi. Následně ověřte, že body $[x, y]$ jednotkové kružnice (tj. vektory (x, y)) se pomocí zobrazení φ zobrazí na body elipsy, jejíž délky poloos budou rovny vlastním číslům.

Řešení

Nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů

Standardním způsobem najdeme vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení φ.

$|A_S - \lambda \cdot E| = (5-\lambda)^2 - 9 = 25 - 10 \cdot \lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 8) = 0$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 8.$

Vlastní vektory: Najdeme řešení systému $A_S - \lambda \cdot E = 0$ dosazením $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 8$ místo λ.

1. $\lambda_1 = 2 : \ \vec{u}_{\lambda_1} = (-1, 1).$
2. $\lambda_2 = 8 : \ \vec{u}_{\lambda_2} = (1, 1).$

Víme, že násobky vlastních vektorů se zobrazí na násobky sama sebe. Například

$$\varphi(-1, 1) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot (-1, 1)^T$$

$$\varphi(1, 1) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot (1, 1)^T$$

Vektory jednotkové kružnice

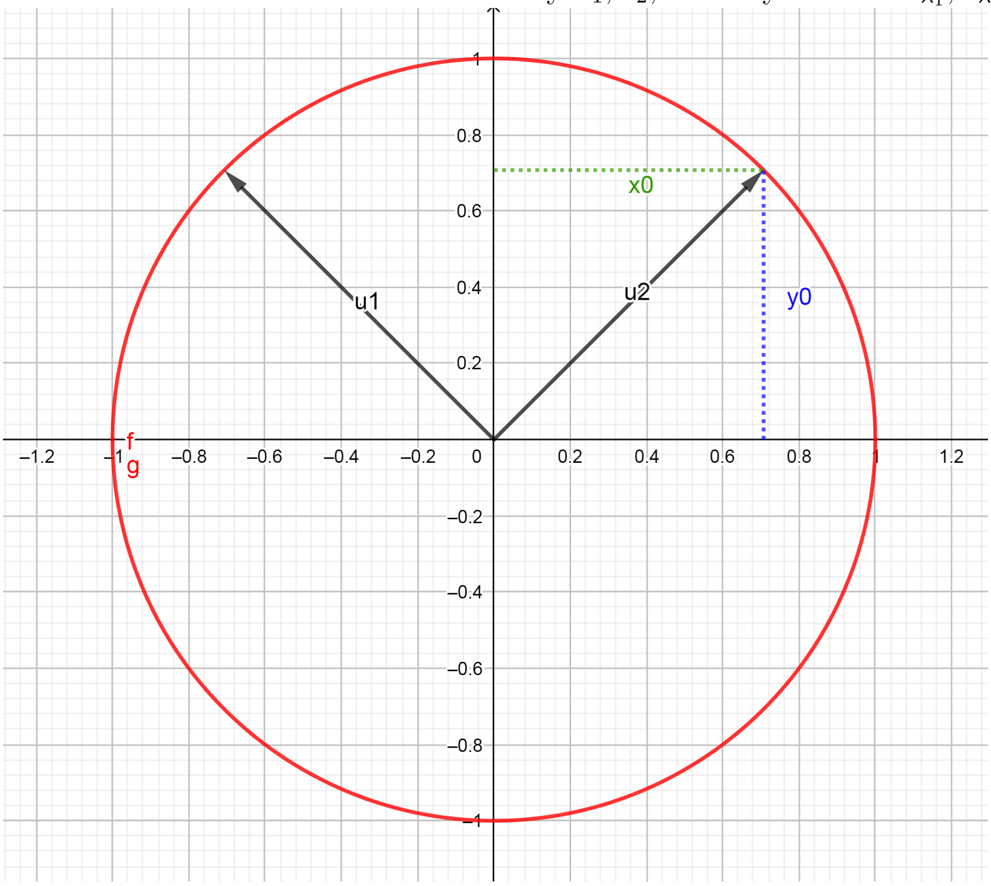
Podívejme se teď na jednotkovou kružnici a vektory, které ji tvoří. Určitě známe vektory $\vec{e_1} = (1, 0)$ a $\vec{e_2} = (0, 1)$, případně vektory k nim opačné: $\vec{f_1} = (-1, 0)$, resp. $\vec{f_2} = (0, -1)$. Ty však nejsou násobky vlastních vektorů, takže se nezobrazí na své násobky. Pomocí matice A_S je zobrazíme takto:

$$\varphi(1, 0) = (5, 3), \quad \varphi(-1, 0) = (-5, -3), \quad \varphi(0, 1) = (3, 5), \quad \varphi(0, -1) = (-3, -5).$$

Nás zajímají také vektory, které jsou násobky vlastních vektorů. Podívejme se na vektor $\vec{u_2}$ ležící na přímce $y = x$, který je jistě násobkem vlastního vektoru $\vec{u}_{\lambda_2} = (1, 1)$ (viz Obrázek 1). Jeho souřadnice (x_0, y_0) lze určit pomocí dvou faktů: velikost vektoru $\vec{u_2}$ je 1, úhel, který svírá s osou x, je $\alpha = 45°$. Platí tedy, že

$$\cos 45° = \frac{x_0}{1} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin 45° = \frac{y_0}{1} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obrázek 1: Jednotková kružnice a vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}$, násobky vektorů $\vec{u}_{\lambda_1}, \vec{u}_{\lambda_2}$



Je zřejmé, že $\vec{u_2} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ a z toho $\vec{u_1} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Lineární zobrazení jednotkové kružnice

Zobrazíme-li oba vektory pomocí φ, přejdou na své vlastní násobky. Protože $\vec{u_2}$ je násobkem $\vec{u}_{\lambda_2}$ a $\vec{u_1}$ násobkem $\vec{u}_{\lambda_1}$, je zřejmé, že

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u_1}) &= \lambda_1 \cdot \vec{u_1} = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),\\ \varphi(\vec{u_2}) &= \lambda_2 \cdot \vec{u_2} = 8 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Uvažujeme-li vektory $\vec{v_1} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \vec{v_2} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ po řadě opačné k vektorům $\vec{u_1}, \vec{u_2}$, tak se také zobrazí na své λ_i násobky $(i = 1, 2)$. Tedy

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{v_1}) &= \lambda_1 \cdot \vec{v_1} = 2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\\ \varphi(\vec{v_2}) &= \lambda_2 \cdot \vec{v_2} = 8 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = (-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Podobně jsou na tom i další vektory $\vec{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ určující jednotkovou kružnici, tj. vektory velikosti 1 vycházející z počátku pod úhlem α, který svírají s osou x. Zobrazí se na elipsu c, jejíž střed je v počátku, hlavní poloosa ležící na přímce $y = x$ má velikost 8, vedlejší poloosa ležící na přímce $y = -x$ velikost 2. Hlavní poloosa je totožná s vektorem $\vec{u_2} = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ velikosti 8, vedlejší poloosa odpovídá vektoru $\vec{u_1} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ velikosti 2. Dále viz Obrázek 2, na němž jsou zobrazeny vektory

$$\begin{aligned} fi\vec{u}1 &= \varphi(\vec{u_1}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \\ fi\vec{u}2 &= \varphi(\vec{u_2}) = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}), \\ fi\vec{e}1 &= \varphi(\vec{e_1}) = (5, 3), \\ fi\vec{e}2 &= \varphi(\vec{e_2}) = (3, 5). \end{aligned}$$

Obrázek 2: Elipsa c, výsledek zobrazení jednotkové kružnice