MA0005 Algebra 2, 3. seminář

3. 10. 2019

Náplň cvičení

1. Determinant matice
   - Důležitá pravidla pro výpočet determinantu
   - Laplaceův rozvoj determinantu
   - Příklady na výpočet determinantu

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) $-a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$,

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) $-a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$, (b) 0.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1. $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.
2. Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.
3. Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.
4. Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1. $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.
2. Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.
3. Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.
4. Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Důležité důsledky:

- Determinant matice M se dvěma stejnými řádky je roven 0.
- Determinant matice M obsahující nulový řádek je roven 0.
- Je-li některý řádek matice M lineární kombinací ostatních, pak $|M| = 0$.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Rozvoj podle l-tého sloupce:

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |M_{il}|,$$

kde M_{il} jsou matice vzniklé z M vypuštěním i-tého řádku a l-tého sloupce.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195, (b) 18.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -28,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -28, (b) 30.

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105,

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105, (b) -18.