MA0005 Algebra 2, 4. seminář

10. 10. 2019

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie – opakování
    - Úsečka, polopřímka, polorovina
2. Soustavy lineárních rovnic
    - Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých
    - Maticový zápis SLR
    - Hodnost matice, elementární řádkové úpravy
    - Schodový tvar matice
    - Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých
    - Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta

Literatura

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Úsečka, polopřímka

Příklad 14.2.22: Jsou dány dva body $A[-2;5]$, $B[4;-1]$.

(a) Napište rovnici úsečky AB.

(b) Napište rovnici polopřímky AB.

(c) Napište rovnici polopřímky BA.

Úsečka, polopřímka

Příklad 14.2.22: Jsou dány dva body $A[-2;5]$, $B[4;-1]$.

(a) Napište rovnici úsečky AB.

(b) Napište rovnici polopřímky AB.

(c) Napište rovnici polopřímky BA.

Příklad 14.2.23: Je dána polopřímka
$MN = \{[2+3t; 3+t],\ t \in (-\infty, \frac{1}{2}\rangle\}$.

(a) Určete souřadnice počátečního bodu M dané polopřímky.

(b) Polopřímku nakreslete.

(c) Určete y_K tak, aby bod $K[-1; y_K]$ ležel na dané polopřímce.

Výsledky:

22.(a) $x = -2 + t,\ y = 5 - t,\ t \in \langle 0; 6\rangle$;
(b) $x = -2 + k,\ y = 5 - k,\ k \in \langle 0; \infty)$;
(c) $x = -2 + t,\ y = 5 - t,\ t \in (-\infty; 6\rangle$.

Úsečka, polopřímka

Příklad 14.2.22: Jsou dány dva body $A[-2;5]$, $B[4;-1]$.

(a) Napište rovnici úsečky AB.

(b) Napište rovnici polopřímky AB.

(c) Napište rovnici polopřímky BA.

Příklad 14.2.23: Je dána polopřímka
$MN = \{[2+3t; 3+t],\ t \in (-\infty, \frac{1}{2}\rangle\}$.

(a) Určete souřadnice počátečního bodu M dané polopřímky.

(b) Polopřímku nakreslete.

(c) Určete y_K tak, aby bod $K[-1; y_K]$ ležel na dané polopřímce.

Výsledky:
22.(a) $x = -2+t,\ y = 5-t,\ t \in \langle 0; 6\rangle$;
(b) $x = -2+k,\ y = 5-k,\ k \in \langle 0; \infty)$;
(c) $x = -2+t,\ y = 5-t,\ t \in (-\infty; 6\rangle$.
23.(a) $M[\frac{7}{2}; \frac{7}{2}]$; (b) $P_x[-7;0]$, $P_y[0; \frac{7}{3}]$; (c) $y_K = 2$.

Příklad 14.2.24: Nakreslete poloroviny:

(a) $3x + y - 6 \leq 0$

(b) $x - 2y + 5 \geq 0$

(c) $2x - y \leq 0$

(d) $x + y \geq 0$

(e) $y \geq 2$

(f) $x \leq -2,6$

Polorovina

Příklad 14.2.24: Nakreslete poloroviny:

(a) $3x + y - 6 \leq 0$

(b) $x - 2y + 5 \geq 0$

(c) $2x - y \leq 0$

(d) $x + y \geq 0$

(e) $y \geq 2$

(f) $x \leq -2,6$

Příklad 14.2.25: Rozhodněte, zda bod $M[4; -7]$ leží v polorovině $2x - 3y + 2 \leq 0$.

Polorovina

Příklad 14.2.24: Nakreslete poloroviny:

(a) $3x + y - 6 \leq 0$

(b) $x - 2y + 5 \geq 0$

(c) $2x - y \leq 0$

(d) $x + y \geq 0$

(e) $y \geq 2$

(f) $x \leq -2,6$

Příklad 14.2.25: Rozhodněte, zda bod $M[4; -7]$ leží v polorovině $2x - 3y + 2 \leq 0$.

Příklad 14.2.26: Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $P[-4; p + 3]$ ležel v polorovině $y \geq 2x$.

Polorovina

Příklad 14.2.24: Nakreslete poloroviny:

(a) $3x + y - 6 \leq 0$

(b) $x - 2y + 5 \geq 0$

(c) $2x - y \leq 0$

(d) $x + y \geq 0$

(e) $y \geq 2$

(f) $x \leq -2,6$

Příklad 14.2.25: Rozhodněte, zda bod $M[4; -7]$ leží v polorovině $2x - 3y + 2 \leq 0$.

Příklad 14.2.26: Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $P[-4; p + 3]$ ležel v polorovině $y \geq 2x$.

Výsledky:
25. neleží, 26. $p \in \langle -11; \infty)$

Příklad 14.2.27: Rozhodněte, zda přímka $p: \ 2x + 7y - 12 = 0$ protíná úsečku AB, kde $A[2;3]$, $B[5;-1]$.

Příklad 14.2.27: Rozhodněte, zda přímka $p:\ 2x + 7y - 12 = 0$ protíná úsečku AB, kde $A[2;3],\ B[5;-1]$.

Příklad 14.2.28: Určete hodnotu parametru $c \in \mathbb{R}$ tak, aby body $A[4;1],\ B[2;-6]$ ležely uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou $p:\ 3x + 5y + c = 0$.

Polorovina

Příklad 14.2.27: Rozhodněte, zda přímka $p:\ 2x + 7y - 12 = 0$ protíná úsečku AB, kde $A[2;3],\ B[5;-1]$.

Příklad 14.2.28: Určete hodnotu parametru $c \in \mathbb{R}$ tak, aby body $A[4;1],\ B[2;-6]$ ležely uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou $p:\ 3x + 5y + c = 0$.

Příklad 14.2.29: Určete hodnotu parametru $b \in \mathbb{R}$ tak, aby body $K[-3;8],\ L[1;-9]$ ležely v opačných polorovinách určených hraniční přímkou $x + by - 3 = 0$.

Polorovina

Příklad 14.2.27: Rozhodněte, zda přímka $p: \; 2x + 7y - 12 = 0$ protíná úsečku AB, kde $A[2;3]$, $B[5;-1]$.

Příklad 14.2.28: Určete hodnotu parametru $c \in \mathbb{R}$ tak, aby body $A[4;1]$, $B[2;-6]$ ležely uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou $p: \; 3x + 5y + c = 0$.

Příklad 14.2.29: Určete hodnotu parametru $b \in \mathbb{R}$ tak, aby body $K[-3;8]$, $L[1;-9]$ ležely v opačných polorovinách určených hraniční přímkou $x + by - 3 = 0$.

Výsledky:
27. protíná, body A, B leží v opačných polorovinách;
28. $c \in (-\infty, -17) \cup (24; \infty)$;
29. $b \in (-\infty, -\frac{2}{9}) \cup (\frac{3}{4}, \infty)$.

Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Mějme následující soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Obě rovnice určují přímky $p : y = -\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{b_1}{a_{12}}$ a $q : y = -\frac{a_{21}}{a_{22}} + \frac{b_2}{a_{22}}$

Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Mějme následující soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Obě rovnice určují přímky $p : y = -\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{b_1}{a_{12}}$ a $q : y = -\frac{a_{21}}{a_{22}} + \frac{b_2}{a_{22}}$

Počet řešení soustavy

Soustava lineárních rovnic (SLR)

(a) má právě jedno řešení, nejsou-li vektory $(a_{11}; a_{12})$, $(a_{21}; a_{22})$ lineárně závislé (graficky: řešením je průsečík přímek p, q);

(b) má nekonečně mnoho řešení, je-li $(a_{11}; a_{12})$ reálným k-násobkem $(a_{21}; a_{22})$ a zároveň $b_1 = k \cdot b_2$ (graficky: přímky p, q splývají);

(c) nemá řešení, je-li $(a_{11}; a_{12})$ reálným k-násobkem $(a_{21}; a_{22})$ a zároveň $b_1 \neq k \cdot b_2$ (graficky: přímky p, q jsou rovnoběžné).

Příklad

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, která

(a) má právě jedno řešení,

(b) má nekonečně mnoho řešení,

(c) nemá řešení.

Vámi vytvořené soustavy řešte graficky.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis soustavy

Matici

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

nazýváme maticí systému SLR.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Rozšířená matice SLR

Matici

$$
A|b = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array} \right)
$$

nazýváme rozšířenou maticí systému SLR.

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Důležitá poznámka: Elementární řádkové úpravy nezmění hodnot matice, resp. nezpůsobí změnu řešení SLR.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Příklad 1: rozhodněte, zda jsou následující matice ve schodovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$,

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$, (b) $h(A) = 3$.

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$,

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$, (d) $h(A) = 2$.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1\\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2\\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3
\end{aligned}
$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Počet řešení soustavy

Soustava lineárních rovnic (SLR) o 3 neznámých

(a) má právě jedno řešení, je-li $h(A) = h(A|b) = 3$ (roviny se protínají v jednom bodu);

(b) má nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) = h(A|b) < 3$ (roviny se protínají buď v jedné přímce, když $h(A) = h(A|b) = 2$, nebo splývají v jednu rovinu, je-li $h(A) = h(A|b) = 1$);

(c) nemá řešení, je-li $h(A) \neq h(A|b)$ (geometricky to může vyjít různě).

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n $(m, n \in \mathbb{N})$ neznámých postupujeme takto:

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n $(m, n \in \mathbb{N})$ neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.
   - V obou případech postupujeme tzv. zpětným chodem, tj. bereme rovnice zdola a volíme za parametry počet neznámých v dané rovnici MINUS jedna, abychom poslední neznámou v každé rovnici mohli dopočítat pomocí ostatních neznámých – parametrů.

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$,

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$, (c) $(-1, -1, 0, 1)$.

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\
x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\
2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20
\end{array}$$

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení,

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení, (c) SLR nemá řešení.

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$,

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$,
(c) $\{(1+t, \frac{3}{2}, t, -\frac{1}{2}),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}$$

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}$$

Výsledek: $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{20}; -\frac{1}{2}\right)$