MA0005 Algebra 2, 5. seminář

17. a 24. 10. 2019

Náplň cvičení

1. Vektorový prostor a jeho podprostory
   - Podprostor vektorového prostoru
   - Lineární obal množiny vektorů
   - Dimenze a báze vektorového prostoru
   - Součet a průnik vektorových podprostorů

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Vektorový prostor

Axiomy pro vektorový prostor

V nazveme vektorovým (lineárním) prostorem nad tělesem T s operacemi $+, \cdot$, jestliže

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} \in V$ (uzavřenost na operaci $+$)
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativita operace $+$)
3. $\exists \vec{o}.\ \forall \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{o} = \vec{u} = \vec{o} + \vec{u}$ (neutrální prvek pro operaci $+$)
4. $\forall \vec{u} \in V.\ \exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (inverze vzhledem k operaci $+$)
5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativita operace $+$)

"1" $\forall \vec{u} \in V, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in V$ (uzavřenost na součin skaláru a vektoru)

"2" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : s \cdot (t \cdot \vec{u}) = (s \cdot t) \cdot \vec{u}$ (asociativita operace $\cdot$)

"3" $\exists 1 \in T.\ \forall \vec{u} \in V : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} = \vec{u} \cdot 1$(neutrální prvek pro operaci $\cdot$)

"6a" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : (s + t) \cdot \vec{u} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{u}$ (distributivita operací)

"6b" $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall s \in T : s \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ (distributivita operací)

Vektorový prostor

Příklad 3.1.B2: Uvažme množinu $\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ (to znamená množinu všech zobrazení $\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$). Pro $f, g \in \mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ a pro $r \in \mathbb{R}$ definujeme $f + g \in \mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$, resp. $r \cdot f \in \mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ takto:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, resp.
- $(r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x))$

pro $\forall x \in \langle 0,1\rangle$. Dokažte, že pak $\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Vektorový prostor

Příklad 3.1.B2: Uvažme množinu $\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ (to znamená množinu všech zobrazení $\langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$). Pro $f, g \in \mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ a pro $r \in \mathbb{R}$ definujeme $f + g \in \mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$, resp. $r \cdot f \in \mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ takto:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, resp.
- $(r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x))$

pro $\forall x \in \langle 0,1\rangle$. Dokažte, že pak $\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad 3.1.B7: Nechť $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ značí množinu všech posloupností reálných čísel. Pro $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a pro $r \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots), \\ r \cdot (x_1, x_2, \dots) &= (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots). \end{aligned}$$

Dokažte, že pak $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Vektorový prostor

Definice vektorového podprostoru

Vektorový podprostor prostoru $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je taková podmnožina W prostoru V, která je uzavřená vzhledem k operaci $+$ (sčítání vektorů) a $\cdot$ (násobení vektoru skalárem):

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$

"1" $\forall \vec{u} \in W, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in W$

Poznámka: Vektorový podprostor je tedy uzavřený na lineární kombinaci svých vektorů.

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad 3.2.B5: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (viz cvičení [3.1.B2]), je-li:

(a) $W = \{f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$

(b) $W = \{f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R} \mid f(0) \cdot f(1) = 0\}$

(c) $W = \{f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1 \text{ pro konečně mnoho } x \in \langle 0, 1 \rangle\}$

(d) $W = \{f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(1 - x) \text{ pro } \forall x \in \langle 0, 1 \rangle\}$

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad 3.2.B5: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (viz cvičení [3.1.B2]), je-li:

(a) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$

(b) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(0) \cdot f(1) = 0\}$

(c) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1 \text{ pro konečně mnoho } x \in \langle 0, 1\rangle\}$

(d) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(1 - x) \text{ pro } \forall x \in \langle 0, 1\rangle\}$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad 3.2.B5: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (viz cvičení [3.1.B2]), je-li:

(a) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$

(b) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(0) \cdot f(1) = 0\}$

(c) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1 \text{ pro konečně mnoho } x \in \langle 0, 1\rangle\}$

(d) $W = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(1 - x) \text{ pro } \forall x \in \langle 0, 1\rangle\}$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.
3.2.B5.(a) ano, (b) ne, (c) ne, (d) ano.

Lineární obal množiny vektorů

Lineární obal množiny vektorů

Lineárním obalem množiny (ne nutně nezávislých) vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$ z vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu $\{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{v_k} \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in T\}$ vzniklou jakoukoli lineární kombinací vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$.

Značíme jej $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ nebo $\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}\rangle$.

Alternativně říkáme, že $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ je podprostor generovaný vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Posloupnost vektorů $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ nazveme **bází** (množinou generátorů) vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$, jestliže

1. je lineárně nezávislá,
2. každý vektor $\vec{u} \in V$ lze vyjádřit lineární kombinací $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{v_k}$ pro nějaké $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T$ (tj. vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ generují celý prostor V).

Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet vektorů nějaké jeho báze. Značíme $\dim V$.

Čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ z vyjádření vektoru $\vec{u}$ nazýváme **souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ v bázi** $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$.

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,
3.3.B2.(a) ne, (b) ano.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:
(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;
(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;
(c) $\vec{u} \notin W$, $\vec{v} \in W$.

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6)$,
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5)$,
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3)$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5);$

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6),$
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8);$

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5),$
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3);$

Výsledky:
(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3});$

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5);$

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6),$
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8);$

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5),$
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3);$

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3});$

(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2});$

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5);$

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6),$
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8);$

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5),$
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3);$

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$;

(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$;

(c) $\dim W = 4$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_5})$.

Součet a průnik vektorových podprostorů

Součet a průnik vektorových podprostorů

Součtem $W_1 + W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme lineární obal jejich sjednocení, tj.

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \mid \alpha, \beta \in T, \vec{u} \in W_1, \vec{v} \in W_2\}$$

Průnikem $W_1 + W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu vektorů, které leží ve W_1 i W_2 zároveň, tj.

$$W_1 \cap W_2 = \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} \in W_1 \wedge \vec{u} \in W_2\}$$

Věta: Jsou-li W_1, W_2 podprostory s konečnou dimenzí, pak platí

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; -3)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 2)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; -1)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle$, $W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 1; 2)$, $\vec{u_3} = (3; 1; 3; 1)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{v_2} = (1; -1; 1; -1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 1; 3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{u_2} = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{v_1} = (1; 1; 1; 0)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 0; 1)$.

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; -3)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 2)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; -1)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle$, $W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 1; 2)$, $\vec{u_3} = (3; 1; 3; 1)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{v_2} = (1; -1; 1; -1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 1; 3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{u_2} = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{v_1} = (1; 1; 1; 0)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 0; 1)$.

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1))$;

Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; -3)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 2)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; -1)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle$, $W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 1; 2)$, $\vec{u_3} = (3; 1; 3; 1)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{v_2} = (1; -1; 1; -1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 1; 3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{u_2} = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{v_1} = (1; 1; 1; 0)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 0; 1)$.

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1))$;
(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_2}; \vec{u_3})$;

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; -3)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 2)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; -1)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle$, $W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2)$, $\vec{u_2} = (1; 2; 1; 2)$, $\vec{u_3} = (3; 1; 3; 1)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{v_2} = (1; -1; 1; -1)$, $\vec{v_3} = (1; 3; 1; 3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{u_2} = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{v_1} = (1; 1; 1; 0)$, $\vec{v_2} = (1; 2; 0; 1)$.

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1))$;
(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_2}; \vec{u_3})$;
(c). $\dim(W_1 + W_2) = 4$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, báze tedy neexistuje.