MA0005 Algebra 2, 8. seminář

21. 11. 2019

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie – opakování
   - Vzájemná poloha přímek v prostoru
2. Vlastní čísla a vlastní vektory
3. Analytická geometrie – opakování
   - Rovina – parametrické rovnice
   - Rovina – obecná rovnice

Literatura a zdroje

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.
- Fiala, J. a kol. Sbírka úloh z matematiky. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2008. Dostupné z: `https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka`.

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Příklad 15.2.11: Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.

a) $p = \{[-6+t; 7-t; 2t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[-5-k; 3-2k; 5+k],\ k \in \mathbb{R}\}$

b) $p = \{[1+t; 2-2t; t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[4-2k; 1+4k; 3-2k],\ k \in \mathbb{R}\}$

c) $p = \{[2-3t; 1+t; 4-t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[-4+3k; 3-k; 2+k],\ k \in \mathbb{R}\}$

d) $p = \{[2t; 3-t; 4-t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[2-2k; -1+k; 6+2k],\ k \in \mathbb{R}\}$

e) $p = \{[2; 4-t; 1+2t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[1-k; 2+3k; -1-2k],\ k \in \mathbb{R}\}$

f) $p = \{[2; 1+t; 3],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[k; 4; 1+k],\ k \in \mathbb{R}\}$

Výsledky: na dalším snímku.

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Příklad 15.2.13: Určete hodnotu parametru $m \in \mathbb{R}$ tak, aby přímky p, q byly různoběžné. Potom vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, q:

$$\begin{aligned} p &= \{[2+k; 3-2k; 4],\ k \in \mathbb{R}\} \\ q &= \{[1-4t; m+t; 1-3t],\ t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Výsledky:
11a) p, q různoběžky, $P[-4; 5; 4]$,
11b) p, q různé rovnoběžky,
11c) $p = q$,
11d) p, q mimoběžky,
11e) p, q mimoběžky,
11f) p, q různoběžky, $P[2; 4; 3]$.

Příklad 15.2.13: Určete hodnotu parametru $m \in \mathbb{R}$ tak, aby přímky p, q byly různoběžné. Potom vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, q:

$$\begin{aligned} p &= \{[2+k; 3-2k; 4],\ k \in \mathbb{R}\} \\ q &= \{[1-4t; m+t; 1-3t],\ t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Výsledky:
11a) p, q různoběžky, $P[-4; 5; 4]$,
11b) p, q různé rovnoběžky,
11c) $p = q$,
11d) p, q mimoběžky,
11e) p, q mimoběžky,
11f) p, q různoběžky, $P[2; 4; 3]$.

13. Pro $m = -2$ je průsečík $P[5; -3; 4]$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ s maticí A rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo λ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{u}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ s maticí A rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo λ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{u}$.

Poznámka:

- Vlastním vektorům se také říká "invariantní směry" či "invariantní vektory".
- Je-li $\vec{u}$ vlastní vektor, pak i vektor $\alpha \cdot \vec{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ je vlastní.
- Vlastní vektory odpovídající jedné vlastní hodnotě λ tvoří vektorový podprostor.

Vlastní čísla a vlastní vektory – postup nalezení

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$
\begin{aligned}
A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \vec{u} \\
A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad \text{(E: jednotková matice)} \\
(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} &= \vec{o}
\end{aligned}
$$

Vlastní čísla a vlastní vektory – postup nalezení

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$
\begin{aligned}
A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \vec{u} \\
A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad \text{(E: jednotková matice)} \\
(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} &= \vec{o}
\end{aligned}
$$

Postup nalezení vlastních čísel a vektorů

1. Najdeme determinant matice $A - \lambda \cdot E$, z něhož nám vyjde rovnice s neznámou λ, kterou vyřešíme.
2. Do systému $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ dosadíme vypočítané hodnoty λ a nalezneme vlastní vektory jako množinu řešení systému.

Vlastní čísla a vlastní vektory – příklady

Příklad 1

Lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ je dána maticí A ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace φ.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Výsledky příkladu 1

a) Pro $\lambda_1 = 6: \;\vec{n_1} = (3,2)$, pro $\lambda_2 = -7: \;\vec{n_2} = (-2,3)$;
b) pro $\lambda_1 = 6: \;\vec{n_1} = (1,1)$, pro $\lambda_2 = -1: \;\vec{n_2} = (-5,2)$;
c) pro $\lambda_1 = 9: \;\vec{n_1} = (5,2)$, pro $\lambda_2 = -5: \;\vec{n_2} = (-1,1)$;
d) pro $\lambda = 2: \;\vec{n} = (1,0)$;
e) pro $\lambda_1 = 1: \;\vec{n_1} = (-1,1)$, pro $\lambda_2 = -1: \;\vec{n_2} = (1,1)$.

Vlastní čísla a vlastní vektory – příklady

Příklad 2

Lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána maticí A ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace φ.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vektory – pokračování příkladu 2

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vektory – pokračování příkladu 2

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Výsledky:

a) Pro $\lambda_1 = 1: \ \vec{n_1} = (-1, 0, 1)$, pro $\lambda_2 = 2: \ \vec{n_2} = (-1, -1, 1)$, pro $\lambda_3 = 3: \ \vec{n_3} = (0, -1, 1)$;

b) pro $\lambda = -1: \ \vec{n} = (2, -1, 1)$;

c) pro $\lambda = -1: \ \vec{n} = (-1, -1, 1)$;

d) pro $\lambda_1 = 2: \ \vec{n_1} = (1, 0, 0)$, pro $\lambda_2 = -1: \ \vec{n_2} = (0, -1, 1)$, pro $\lambda_3 = 1: \ \vec{n_3} = (1, 0, 1)$;

e) pro $\lambda_1 = 0: \ \vec{n_1} = (4, 4, 1)$, pro $\lambda_2 = 3: \ \vec{n_2} = (1, -2, 1)$.

Rovina – parametrické rovnice

Příklad 15.3.16: Dokažte, že body $A[2; 1; 6]$, $B[0; -1; -6]$, $C[-1; 2; 0]$ určují rovinu a napište její parametrické rovnice.

a) Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých rovina ABC protíná osu x, osu y a osu z.

b) Danou rovinu znázorněte ve zvolené soustavě souřadnic.

c) Rozhodněte, zda body $K[2; 4; 15]$, $L[-3; 2; 6]$ leží v rovině ABC.

d) Vypočítejte $z \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $M[-2; 1; z]$ ležel v rovině ABC.

Příklad 15.3.17: Je dána rovina
$\varrho = \{[1 + t + k; 2 + 3t - k; 5t + k],\ k, t \in \mathbb{R}\}$.

1. Vypočítejte průsečíky roviny ϱ se souřadnicovými osami a rovinu ϱ nakreslete.
2. Napište rovnice přímek, ve kterých rovina ϱ protíná souřadnicové roviny.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

16.
$x = 2 - t + k, y = 1 - t - 3k, z = 6 - 6t - 6k, \;\; k, t \in \mathbb{R};$
a) $P_x[1; 0; 0], P_y[0; 1; 0], P_z[0; 0; -3],$
c) $K \in ABC, L \notin ABC,$
d) $z = -6.$

17.
a) $P_x[2; 0; 0], P_y[0; 4; 0], P_z[0; 0; -4];$
b) $P_{xy} = \{[2 + t; -2t; 0], t \in \mathbb{R}\}, P_{xz} = \{[2 + k; 1; 0], k \in \mathbb{R}\},$
$P_{yz} = \{[0; 4 + m; m], m \in \mathbb{R}\}.$

Rovina – obecná rovnice

Příklad 15.3.19: Dokažte, že dané tři body určují rovinu. V případě, že rovinu určují, napište její obecnou rovnici. Vypočítejte souřadnice průsečíků roviny s osami souřadnic a rovinu ve zvolené soustavě souřadnic znázorněte.

a) $A[1; 1; 1], B[5; 1; -3], C[2; 0; 2]$
b) $A[1; -3; -1], B[2; 2; 0], C[-4; 5; 5]$
c) $A[1; 2; -3], B[0; 1; 2], C[2; 3; -8]$
d) $A[0; 0; 0], B[1; 2; -2], C[-3; -6; -5]$

Příklad 15.3.20: Dokažte, že přímka p a bod A určují rovinu. Napište její obecnou rovnici.

a) $p = \{[3 - t; -2 + t; 4 + 2t], t \in \mathbb{R}\}, \; A[0; -1; 5]$
b) $p = \{[2; 4; k], k \in \mathbb{R}\}, \; A[0; 3; 0]$
c) $p = \{[1 + t; 2 - 2t; 0], t \in \mathbb{R}\}, \; A[1; 0; 3]$

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

19.
a) $x + 2y + z - 4 = 0$,
b) $2x - y + 3z - 2 = 0$,
c) body A, B, C leží na přímce, rovinu neurčují,
d) $2x - y = 0$.

20.
a) $x + 5y - 2z + 15 = 0$,
b) $x - 2y + 6 = 0$,
c) $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.