MA0005 Algebra 2, 9. seminář

28. 11. 2019

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie – opakování
   - Rovina – parametrické rovnice
   - Rovina – obecná rovnice
2. Matice přechodu
   - Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi
   - Změna matice lineárního zobrazení při změně báze
   - Změna matice lineární transformace při změně báze

Literatura a zdroje

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.

Rovina – parametrické rovnice

Příklad 15.3.16: Dokažte, že body $A[2; 1; 6]$, $B[0; -1; -6]$, $C[-1; 2; 0]$ určují rovinu a napište její parametrické rovnice.

a) Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých rovina ABC protíná osu x, osu y a osu z.

b) Danou rovinu znázorněte ve zvolené soustavě souřadnic.

c) Rozhodněte, zda body $K[2; 4; 15]$, $L[-3; 2; 6]$ leží v rovině ABC.

d) Vypočítejte $z \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $M[-2; 1; z]$ ležel v rovině ABC.

Příklad 15.3.17: Je dána rovina
$\varrho = \{[1 + t + k; 2 + 3t - k; 5t + k],\ k, t \in \mathbb{R}\}$.

1. Vypočítejte průsečíky roviny ϱ se souřadnicovými osami a rovinu ϱ nakreslete.
2. Napište rovnice přímek, ve kterých rovina ϱ protíná souřadnicové roviny.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

16.
$x = 2 - t + k, y = 1 - t - 3k, z = 6 - 6t - 6k,\ \ k, t \in \mathbb{R};$
a) $P_x[1; 0; 0], P_y[0; 1; 0], P_z[0; 0; -3],$
c) $K \in ABC, L \notin ABC,$
d) $z = -6.$

17.
a) $P_x[2; 0; 0], P_y[0; 4; 0], P_z[0; 0; -4];$
b) $P_{xy} = \{[2 + t; -2t; 0], t \in \mathbb{R}\}, P_{xz} = \{[2 + k; 1; 0], k \in \mathbb{R}\},$
$P_{yz} = \{[0; 4 + m; m], m \in \mathbb{R}\}.$

Příklad 15.3.19: Dokažte, že dané tři body určují rovinu. V případě, že rovinu určují, napište její obecnou rovnici. Vypočítejte souřadnice průsečíků roviny s osami souřadnic a rovinu ve zvolené soustavě souřadnic znázorněte.

a) $A[1; 1; 1], B[5; 1; -3], C[2; 0; 2]$
b) $A[1; -3; -1], B[2; 2; 0], C[-4; 5; 5]$
c) $A[1; 2; -3], B[0; 1; 2], C[2; 3; -8]$
d) $A[0; 0; 0], B[1; 2; -2], C[-3; -6; -5]$

Příklad 15.3.20: Dokažte, že přímka p a bod A určují rovinu. Napište její obecnou rovnici.

a) $p = \{[3 - t; -2 + t; 4 + 2t], t \in \mathbb{R}\},\ A[0; -1; 5]$
b) $p = \{[2; 4; k], k \in \mathbb{R}\},\ A[0; 3; 0]$
c) $p = \{[1 + t; 2 - 2t; 0], t \in \mathbb{R}\},\ A[1; 0; 3]$

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

19.
a) $x + 2y + z - 4 = 0$,
b) $2x - y + 3z - 2 = 0$,
c) body A, B, C leží na přímce, rovinu neurčují,
d) $2x - y = 0$.

20.
a) $x + 5y - 2z + 15 = 0$,
b) $x - 2y + 6 = 0$,
c) $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β,

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$, tedy řešení soustavy

$$\beta|\vec{u} = \left(\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array} \right)$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$, tedy řešení soustavy

$$\beta|\vec{u} = \left(\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array}\right)$$

Budeme takovou soustavu řešit pro každý vektor zvlášť?

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu

Maticí přechodu $P_{\alpha,\beta}$ od báze β do báze α rozumíme matici, pro níž platí

$$\alpha = \beta \cdot P_{\alpha,\beta} \tag{1}$$

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu

Maticí přechodu $P_{\alpha,\beta}$ od báze β do báze α rozumíme matici, pro níž platí

$$\alpha = \beta \cdot P_{\alpha,\beta} \tag{1}$$

Poznámka:

- Vektory obou bází se ve vztahu (1) zapisují sloupcově.
- Matice přechodu $P_{\beta,\alpha}$ je regulární.
- Matice $(P_{\alpha,\beta})^{-1} = P_{\beta,\alpha}$ je maticí přechodu od báze α k bázi β a platí tento vztah:

$$\beta = \alpha \cdot P_{\beta,\alpha} \tag{2}$$

Matice přechodu – příklady

Příklad 1

Jsou dány dvě různé báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte matice přechodu $P_{\beta,\alpha}, P_{\alpha,\beta}$ a určete souřadnice vektoru $\vec{u}_\alpha = (1,2,1)$ v bázi β a souřadnice vektoru $\vec{v}_\beta = (-1,0,3)$ v bázi α.

1. $\alpha = ((1,0,1);(2,1,1);(0,0,2))$,
   $\beta = ((0,1,1);(1,0,2);(2,0,2))$.
2. $\alpha = ((1,0,2);(2,1,1);(3,2,4))$,
   $\beta = ((3,3,0);(2,2,4);(0,4,3))$.
3. $\alpha = ((1,2,0);(2,1,1);(1,0,1))$,
   $\beta = ((2,2,1);(1,2,1);(0,0,2))$.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 1

1. $P_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)_\alpha = (2,-2,\frac{7}{2})_\beta, (-1,0,3)_\beta = (8,-1,-1)_\alpha$

2. $P_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{24} \\ \frac{11}{16} & \frac{7}{16} & \frac{19}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $P_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)_\alpha = (\frac{5}{6},\frac{11}{4},-1)_\beta, (-1,0,3)_\beta = (-\frac{21}{2},-12,\frac{21}{2})_\alpha$

3. $P_{\beta,\alpha} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)_\alpha = (4,-2,\frac{1}{2})_\beta, (-1,0,3)_\beta = (5,-12,17)_\alpha$

Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích U, V. Pro zadané báze α prostoru U a β prostoru V určete matice $A_{S,\alpha}, A_{\beta,S}, A_{\beta,\alpha}$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
   $\alpha = ((1,2);(-2,1))$, $\beta = ((1,1,1);(1,1,0);(1,2,0))$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = ((1,0,1);(1,1,1);(1,2,0))$,
   $\beta = ((1,2,-1,0);(0,1,-1,-2);(-1,0,0,-2);(2,1,0,-3))$.

Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích U, V. Pro zadané báze α prostoru U a β prostoru V určete matice $A_{S,\alpha}, A_{\beta,S}, A_{\beta,\alpha}$.

3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = ((1,1,1);(1,0,4);(1,4,0))$, $\beta = ((1,0);(4,1))$.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 2

1. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,S} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 12 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$,
$A_{\beta,\alpha} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 21 & 14 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \\ -7 & -9 & -5 \end{pmatrix}$.

3. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,S} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$A_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -6 & -15 & -11 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Změna matice lineární transformace při změně báze – příklady

Příklad 3

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí A_S ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Pro bázi

$$\alpha = ((1,1,1);(1,1,0);(1,2,0))$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ určete matice $A_{S,\alpha}, A_{\alpha,S}, A_{\alpha,\alpha}$.

1. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

2. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Výsledky Příkladu 3

1. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,S} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,S} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -5 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Výsledky Příkladu 3

3. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,S} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

$A_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -3 & -9 & -14 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.