VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Maticový a tenzorový počet

Doc. RNDr. Martin Kovár, Ph.D.

Ústav matematiky

Obsah

Předmluva

Lineární a multilineární algebra, jak by také mohl znít alternativní název tohoto textu, poskytuje velmi účinný matematický aparát řadě technických i matematicko-fyzikálních disciplín. Centrálním pojmem tohoto textu je pojem *matice*, k se němuž v závěrečné kapitole připojuje i pojem *tenzoru*. Maticová symbolika umožňuje velmi jednoduchým a přehledným způsobem vyjadřovat jinak velmi komplikované vztahy mezi mnoha veličinami fyzikální i jiné (například ekonomické či statistické) povahy. Mezi významné oblasti použití patří například řešení soustav lineárních elektrických obvodů v elektrotechnice, v mechanice při studiu kmitání nebo v teorii pružnosti. Dalšími oblastmi použití jsou například kryptografie, teorie her, teorie grafů, při popisu nejrůznějších ekonomických vztahů, atd.

Hlavním cílem tohoto textu je pokrýt výkladem látku probíranou ve stejnojmenném předmětu na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií. Samotné základy maticového počtu jsou podány v prvních dvou kapitolách, kde jsou probírány základní maticové operace a důležité charakteristiky matic, jako jsou například hodnost matice nebo determinant. Do širšího kontextu, nezbytného pro pochopení aplikací maticového počtu, jsou matice zasazeny v kapitole třetí, kde jsou probírány vektorové, (nebo-li tzv. lineární) prostory. Některé hlubší poznatky z teorie matic, zejména problém vlastních hodnot, jsou studovány v kapitole čtvrté. Pátá kapitola je aplikační, získané poznatky jsou použity pro popis chování kvadratických forem. V poslední, šesté kapitole jsou vysvětleny základy tenzorového počtu. Každá kapitola obsahuje řadu řešených úloh, které jsou začleněny do kontextu celého výkladu.

Teoretický výklad je na konci každé kapitoly doplněn cvičeními, která jsou dvojího typu. Obvyklá početní – „numerická” cvičení jsou značena písmenem **N**. Tato cvičení představují určité minimum, které by studující, dostatečně připravený ke zkoušce, měl bezpodmínečně ovládat. Výsledky těchto úloh, které mají kontrolní funkci, avšak nepředstavují pro studujícího téměř žádnou nápovědu, jsou pro pohodlí studujícího zařazeny ihned za každým příkladem.

Druhým typem cvičení jsou počítačová cvičení, označená písmenem **M**, používající matematický software – systém počítačové algebry MATLAB (vyhoví téměř jakákoli základní verze tohoto systému, dostupná například pro operační systém MS Windows, včetně velmi raných verzí). Alternativou mohou být i konkurenční komerční systémy MAPLE nebo MATHEMATICA, případně starší a volně šiřitelné verze systému MUPAD. Všechny tyto systémy počítačové algebry umožňují práci s maticemi v rozsahu více než dostatečném pro tento předmět. V případě alternativy k doporučenému MATLABu je však nutné některá počítačová cvičení převzít volněji, případně přizpůsobit procedurám a funkcím alternativního systému. Počítačová cvičení pomáhají při výuce především tím, že umožňují provést některé rutinní výpočty rychleji a méně pracně, čímž umožňují studujícímu soustředit se lépe na hlavní linii výkladu. Počítačová cvičení nemusí studující nutně probrat všechna, měl by se jimi však zabývat natolik, nakolik je to prospěšné pro pochopení probírané látky.

Zařazený Test vstupních znalostí vychází z předpokladu, že k úspěšnému pochopení látky je nutné či alespoň vhodné, aby studující zvládal základní operace s komplexními čísly, dokázal hledat kořeny polynomů v $\mathbb{C}$, měl jisté geometrické představy na úrovni analytické geometrie ze střední školy, uměl řešit jednoduché soustavy lineárních rovnic (například dosazovací metodou) a dokázal derivovat jednoduchou polynomickou funkci.

0.1 Test vstupních znalostí

1. Vyřešte v $\mathbb{C}$:

$$z^2 + 6z + 25 = 0$$

$\Big[$ Výsledek: $z_{12} = -3 \pm 4i$ $\Big]$. $\square$

2. Pomocí Moiverovy věty vypočítejte:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{100}$$

$\Big[$ Výsledek: $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\Big]$. $\square$

3. Polynom (mnohočlen) rozložte na kořenové činitele:

$$x^7 + x^5 - x^3 - x$$

$\Big[$ Výsledek: $x(x-i)^2(x+i)^2(x+1)(x-1)$ $\Big]$. $\square$

4. Přímka je určena body $(6, -1)$ a $(2, 3)$ v rovině. Najděte parametrickou a obecnou rovnici této přímky.

$\Big[$ Výsledek: $x = 6 - 4t$, $y = -1 + 4t$, $t \in \mathbb{R}$; $x + y - 5 = 0.$ $\Big]$. $\square$

5. Najděte obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $(5, -1, 0)$ a má normálový vektor $(-1, 1, 2)$.

$\Big[$ Výsledek: -x+y+2z+6=0 $\Big]$. $\square$

6. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 5 \\ 3x & + & 4y & = & -9 \end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: $x = 1$, $y = -3$ $\Big]$. $\square$

7. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x - 5)$.

$\Big[$ Výsledek: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 8$ $\Big]$. $\square$

1 Matice a soustavy lineárních rovnic

V této kapitole studujeme základní vlastnosti matic a operací s maticemi. Jsou také studovány soustavy lineárních rovnic a hodnost matice.

1.1 Soustavy lineárních rovnic

Celá řada problémů v technických, přírodních i sociálních vědách vede na rovnice, které obsahují dvě třídy proměnných. Rovnice typu

$$y = ax$$

vyjadřující **závislou** proměnnou y pomocí **nezávislé** proměnné x a konstanty a, se nazývá **lineární rovnice**. Podobně, rovnice

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

která vyjadřuje b pomocí proměnných x_1, x_2, ..., x_n a známých konstant a_1, a_2,..., a_n je rovněž **lineární rovnicí**. V mnoha případech a aplikacích však bývají dány konstanty b, a_1, a_2,..., a_n a naopak musíme najít čísla x_1, x_2, ..., x_n, která danou rovnici (1.1) splňují.

Řešením lineární rovnice (1.1) nazýváme posloupnost n čísel s_1, s_2, ..., s_n takovou, že rovnost (1.1) je splněna, pokud dosadíme $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$. Například $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ a $x_3 = 4$ je řešení lineární rovnice

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13,$$

protože

$$6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -13.$$

Není to jediné řešení dané rovnice, protože například čísla $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ a $x_3 = -7$ tvoří také (jiné, další) řešení této rovnice.

Obecněji, **soustava** (nebo také **systém**) m **lineárních rovnic o** n **neznámých** je tvořena m rovnicemi, které obsahují celkem n různých neznámých. Přitom není nutné, aby každá z rovnic obsahovala všechny neznámé. V takovém případě se soustavou pracujeme obvykle způsobem, jako by každá z m rovnic obsahovala všechny neznámé, ale koeficienty u některých z nich jsou shodou okolností rovny nule. Soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{array} \tag{1.2}$$

Indexy i, j užíváme následujícím způsobem. První index označuje, že máme na mysli i-tou rovnici, tedy rovnici

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_j, \tag{1.3}$$

zatímco druhý index označuje j-tou proměnnou, v našem případě tedy x_j. **Řešení** soustavy (1.2) je definováno analogicky, jako pro jednu rovnici. Je to posloupnost n čísel s_1, s_2, ..., s_n takových, že (1.2) je splněna, pokud dosadíme $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$.

Abychom nalezli řešení soustavy lineárních rovnic, užíváme většinou techniky, které se souhrnně nazývají **eliminace**. Existuje více variant eliminační metody, které od sebe pro naše účely nemusíme příliš rozlišovat, avšak v situacích, kde záleží na přesnosti výpočtu s pohyblivou desetinnou čárkou, případně na rychlosti výpočtu prováděného v reálném čase, mohou být některé detaily důležité. Většina čtenářů tohoto skripta má již s eliminační metodou nějaké zkušenosti, zejména pro případ, že $m = n$, tedy že počet rovnic a počet neznámých jsou stejné. Později budeme běžně pracovat se systémy lineárních rovnic, kde $m \neq n$. Takový obecný případ vyžaduje ovšem poněkud více teorie, a proto podrobný výklad odsuneme na později.

Princip eliminačních metod spočívá v tom, že během některých operací s rovnicemi se nemění množina řešení. Tak například je možné zaměnit pořadí rovnic, vynásobit kteroukoli rovnici **nenulovým** číslem, či přičíst násobek rovnice k rovnici na jiném řádku, aniž by se množina řešení změnila (požadavek nenulovosti čísla kterým násobíme, stejně jako požadavek, aby rovnice, které sčítáme, byly na různých pozicích v daném pořadí, je podstatný). Několik jednoduchých příkladů použití eliminační metody při řešení soustavy dvou rovnic pro dvě až tři neznámé následuje.

Příklad 1.1 Uvažujme soustavu

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -3 \\ 2x & + & y & = & 8. \end{array} \tag{1.4}$$

Abychom eliminovali x, přičteme (-2)-krát první rovnici ke druhé, takže dostaneme

$$7y = 14,$$

tj. rovnici, která neobsahuje proměnnou x. Eliminovali jsme neznámou x. Nyní můžeme zjistit y, máme

$$y = 2.$$

Dosazením do (1.4) dostaneme

$$x = 3.$$

Abychom ověřili, že $x = 3$, $y = 2$ je řešení (1.4), přesvědčíme se, že tyto hodnoty splňují *všechny* rovnice dané soustavy. Vidíme, že daná soustava má jediné řešení.

□

Příklad 1.2 Uvažujme soustavu

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -7 \\ 2x & - & 6y & = & 7. \end{array} \tag{1.5}$$

Podobně jako v předchozí úloze se můžeme rozhodnout eliminovat x. Přičteme (-2)-krát první rovnici ke druhé rovnici, odkud

$$0 = 21,$$

což nedává smysl. To znamená, že soustava rovnic (1.5) nemá řešení.

□

Příklad 1.3 Uvažujme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -4 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 4. \end{array} \tag{1.6}$$

Proměnnou x eliminujeme vynásobením první rovnice (-2)-krát a přičtením ke druhé rovnici. Dostaneme rovnici

$$-3y + 3z = 12, \tag{1.7}$$

kterou musíme vyřešit. Řešením je

$$y = z - 4,$$

takže z první rovnice (1.6) dostáváme postupně

$$x = -4 - 2y + 3z = -4 - 2(z - 4) + 3z = z + 4.$$

Hodnotu proměnné z můžeme volit libovolně, je to tzv. **parametr**. Kvůli větší přehlednosti bývá dobrým zvykem označit parametry jinými písmeny a pak pomocí parametrů vyjádřit všechny neznámé. Řešení soustavy (1.6) má tedy tvar

$$\begin{array}{rcl} x & = & r + 4 \\ y & = & r - 4 \\ z & = & r, \end{array} \tag{1.8}$$

kde r je libovolné reálné nebo komplexní číslo.

Soustava (1.6) má tedy nekonečně mnoho řešení, a v třírozměrném eukleidovském prostoru všech možných hodnot (x, y, z) množina řešení dané soustavy tvoří přímku. Tu můžeme určit například pomocí směrového vektoru a libovolného bodu, který na přímce leží. Volbou $r = 0$ zjistíme, že na hledané přímce leží například bod $A = (4, -4, 0)$. Směrový vektor je určen koeficienty u parametru r, v našem případě je to tedy vektor $(1, 1, 1)$. Přímka, která geometricky vyjadřuje množinu řešení naší soustavy, má tedy parametrickou rovnici (ve vektorovém tvaru)

$$(x, y, z) = (4, -4, 0) + r \cdot (1, 1, 1), \tag{1.9}$$

kde $r \in \mathbb{R}$. Můžeme si všimnout, že (1.9) je jenom jiný, vektorový zápis pro (1.8). Avšak ze střední školy víme, že přímku lze ve třírozměrném eukleidovském prostoru vyjádřit i jako průsečnici dvou rovin. Příklad takových dvou rovin určují právě rovnice (1.6).

□

Dodejme, že eliminační metody řešení lineárních rovnic vešly ve známost především v souvislosti s pracemi německých matematiků Carla Friedricha Gausse (1777-1855) a Wilhelma Jordana (1842-1899), odkud pocházejí vžité názvy **Gaussova**, resp. **Gauss-Jordanova eliminace**. Principy eliminační metody však byly známy již ve staré Číně nejméně o 2000 let dříve. Spoluautorství eliminační metody bylo poměrně často (a bohužel nesprávně) také přisuzováno známému francouzskému matematikovi Camile Jordanovi (1838-1922).

1.2 Matice

Jestliže podrobně prozkoumáme eliminační metodu, kterou jsme popsali v předchozím odstavci, můžeme si všimnout, že se během našich operací měnily pouze koeficienty u neznámých x_1, x_2, $\ldots$, x_n a čísla na pravé straně od rovnítka, ale neměnily se samotné neznámé, ani jejich pořadí. Proto nemusíme při úpravách zapisovat celé rovnice, ale pouze jejich koeficienty a pravé strany. Tento nový způsob zápisu rovnic nám usnadní a urychlí výpočty a dokonce umožní tyto výpočty například snadno a efektivně naprogramovat pro automatizovaný výpočet na počítači. Avšak nejde pouze o výhodný způsob zápisu soustav lineárních rovnic. Pojem matice, který v této části zavedeme, umožní mnohem více, než jen efektivní řešení soustav lineárních rovnic. Dostaneme do ruky nástroj, který nám umožní provádět a přehledně zapisovat složité vědecko-technické výpočty.

Maticí A typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schéma či „pole” reálných nebo komplexních čísel, uspořádaných do m vodorovných řad a n svislých sloupců tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Dále, i-tý řádek matice A je tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix},$$

kde $1 \leq i \leq m$, a j-tý sloupec matice A má tvar

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $1 \leq j \leq n$. Jestliže $m = n$, říkáme, že je matice A čtvercová řádu n. Čísla a_{11}, a_{22},..., a_{nn} tvoří **hlavní diagonálu** matice A. Na prvky matice A se odkazujeme pomocí indexů i, j tak, že číslo a_{ij} nazýváme **i,j-tým prvkem** matice A a píšeme

$$A = (a_{ij}).$$

Příklad 1.4 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pak A je matice 2×3 s prvky $a_{12} = 2$, $a_{22} = 0$ a $a_{23} = 1$; B je matice 2×2 s prvky $b_{11} = 1$, $b_{21} = 2$ a $b_{22} = -3$; C je matice typu 3×1 s $c_{11} = 1$, $c_{21} = -1$ a $c_{31} = 2$; D je matice 3×3; E je matice typu 1×1 a F je matice typu 1×3. V matici D prvky $d_{11} = 1$, $d_{22} = 0$ a $d_{33} = 2$ tvoří hlavní diagonálu.

$\square$

Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ v níž jsou všechny nediagonální prvky nulové, se nazývá **diagonální matice**.

Příklad 1.5

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

jsou diagonální matice.

$\square$

Diagonální matice $A = (a_{ij})$, která má všechny diagonální prvky stejné, se nazývá **skalární matice**. Speciálním případem skalární matice je matice **jednotková**; je to diagonální matice, která má všechny diagonální prvky rovny 1.

Příklad 1.6 Následující čtvercové matice jsou skalární:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Kromě toho, matice I_3 je jednotková matice řádu 3.

$\square$

O dvou maticích A, B typu $m \times n$ řekneme, že jsou si **rovny**, pokud $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots n\}$. Jinak řečeno, dvě matice si jsou rovny, pokud mají stejné prvky.

Příklad 1.7 Matice

$$A = \begin{pmatrix} u & 2 & -1 \\ 2 & -3 & t \\ 0 & v & 5 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{pmatrix}$$

si jsou rovny, právě když $t = 4$, $u = 1$, $v = -4$, $w = -1$, $x = -3$, $y = 0$ a $z = 5$.

$\square$

1.2.1 Sčítání matic

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou matice typu $m \times n$. Pak součet matice A s maticí B je matice $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pro niž platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

kde $i \in \{1, 2, \dots m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots n\}$.

Příklad 1.8 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Musíme zdůraznit, že součet matic je definován pouze pro matice téhož typu. Nyní však můžeme zavést úmluvu, že vždy, když vytvoříme výraz $A+B$, budeme předpokládat již automaticky, že matice A, B jsou stejného typu. Později uvidíme, že součet matic se chová velmi podobně, jako součet reálných nebo komplexních čísel.

1.2.2 Násobení matic

Nechť matice $A = (a_{ij})$ je typu $m \times p$ a matice $B = (b_{ij})$ je typu $p \times n$. Pak součin matice A s maticí B je matice $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$, definovaná vztahem

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{1.11}$$

Můžeme se přirozeně zeptat, proč je součin matic definován poměrně složitě, když sčítání matic, podobně jako jejich rovnost jsou tak jednoduché a přirozené pojmy. Avšak pouze důkladné porozumění skládání zobrazení a vztahu mezi maticemi a tím, co budeme později nazývat lineárními transformacemi nám objasní, že zvolená definice maticového součinu je právě ta správná. Prozatím se pro lepší pochopení maticového součinu spokojíme s jednoduchými příklady. Můžeme si však zatím všimnout, že maticový součin přechází v násobení (reálných nebo komplexních) čísel pro matice typu 1×1.

Příklad 1.9 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+2\cdot 4+(-1)\cdot 2 & 1\cdot 5+2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot(-2)+1\cdot 4+4\cdot 2 & 3\cdot 5+1\cdot(-3)+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

□

Základní vlastnosti maticového součinu budou shrnuty v následujícím odstavci. Avšak násobení matic vyžaduje mnohem více, než jejich součet, protože algebraické vlastnosti maticového součinu jsou značně odlišné od toho, co známe z algebry reálných čísel. Část problému spočívá v tom, že součin AB je definován pouze když počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B. Tedy, pokud je matice A typu $m \times p$ a matice B typu $p \times n$, je matice AB typu $m \times n$. Ale jak je to s maticí BA? Mohou nastat následující možnosti:

(i) Matice BA může být nedefinována; to se stane když $m \neq n$.

(ii) Jestliže je BA definována, což znamená že $m = n$, je BA typu $p \times p$, zatímco AB je typu $m \times m$. Tedy, pokud $m \neq p$, matice AB a BA jsou obě čtvercové, ale mají různý řád.

(iii) Jestliže mají AB a BA stejné rozměry (tj. stejný řád), mohou si být rovny.

(iv) Jestliže mají AB a BA stejné rozměry (tj. stejný řád), nemusí si být rovny.

To můžeme ilustrovat následujícími příklady.

Příklad 1.10 Je-li A typu 2×3 a B typu 3×4, pak AB je typu 2×4, zatímco BA není definována. □

Příklad 1.11 Nechť je A typu 2×3 a B typu 3×2. Pak AB je typu 2×2 a BA je typu 3×3. □

Příklad 1.12 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{zatímco} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tedy $AB \neq BA$. □

1.2.3 Komplexně sdružená matice

Buď $z = x + \mathbf{i}y$ komplexní číslo, x, y čísla reálná. Připomínáme, že **komplexně sdružené číslo** k číslu z je číslo $z^* = x - \mathbf{i}y$. Nechť $A = (a_{ij})$ je komplexní matice typu $m \times n$. Pak matice $A^* = (b_{ij})$ typu $n \times m$, kde

$$b_{ij} = a_{ij}^*$$

pro $i \in \{1, 2, \dots m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots n\}$, se nazývá **komplexně sdružená matice** k matici A. Komplexně sdružená matice je tedy matice, v níž všechny prvky nahradíme komplexně sdruženými čísly. Snadno se ověří, že $A = A^*$, právě když A je reálná matice.

Příklad 1.13 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 - 3\mathbf{i} \\ 0 & 1 + \mathbf{i} & 0 \\ -5 + 4\mathbf{i} & \mathbf{i} & -2\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 + 3\mathbf{i} \\ 0 & 1 - \mathbf{i} & 0 \\ -5 - 4\mathbf{i} & -\mathbf{i} & 2\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

$\square$

1.2.4 Transponovaná matice

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Pak matice $A^T = (a_{ij}^T)$ typu $n \times m$, kde

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

pro $i \in \{1, 2, \dots m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots n\}$, se nazývá **transponovaná matice** k matici A. Tedy transponovanou matici získáme z původní matice záměnou řádků za sloupce.

Příklad 1.14 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad E^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Matice A se nazývá **symetrická**, pokud

$$A = A^T.$$

To znamená, že matice A je symetrická, jestliže je to čtvercová matice, pro kterou

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Prvky symetrické matice jsou v matici rozmístěny symetricky podle hlavní diagonály.

Příklad 1.15 Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou symetrické.

□

Podobně definujeme také pojem samoadjungované matice. Matice A se nazývá **samoadjungovaná**, pokud

$$A = A^{T*}.$$

Tedy, matice A je samoadjungovaná, jestliže je to čtvercová matice, pro kterou

$$a_{ij} = a^*_{ji}.$$

Je zřejmé, že každá reálná symetrická matice je samoadjungovaná a každá (komplexní) samoadjungovaná matice má v hlavní diagonále reálná čísla. Existují i další vlastnosti samoadjungovaných matic, které jsou blízké vlastnostem reálných symetrických matic. Některé tyto vlastnosti prozkoumáme v dalších kapitolách.

Příklad 1.16 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-3\mathbf{i} \\ 0 & 5 & -\mathbf{i} \\ 2+3\mathbf{i} & \mathbf{i} & -3 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+3\mathbf{i} \\ 0 & 5 & \mathbf{i} \\ 2-3\mathbf{i} & -\mathbf{i} & -3 \end{pmatrix}$$

a

$$A^{T*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-3\mathbf{i} \\ 0 & 5 & -\mathbf{i} \\ 2+3\mathbf{i} & \mathbf{i} & -3 \end{pmatrix} = A.$$

□

1.2.5 Skalární násobení matice číslem

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a r reálné nebo komplexní číslo. Pak **skalární násobek** matice A číslem r je matice $rA = (b_{ij})$ typu $m \times n$, kde

$$b_{ij} = ra_{ij}$$

pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots n\}$.

Příklad 1.17 Jestliže $r = -3$ a

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

pak

$$rA = -3 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 & -9 \\ -6 & 15 & 0 \\ -9 & -18 & 6 \end{pmatrix}.$$

□

1.2.6 Soustavy lineárních rovnic

Uvažujme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých,

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{1.12}$$

Definujme následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Pak (1.12) můžeme psát v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

což zjednodušeně zapsáno dává vztah

$$A\bar{x} = \bar{b}. \tag{1.14}$$

Vztah (1.12) můžeme ovšem zapsat i pomocí transponovaných matic. Máme

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \bar{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{a}$$

$$\underline{b} = \bar{b}^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Potom

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix},$$

což zjednodušeně a symbolicky zapsáno dává

$$\underline{x}A = \underline{b}. \tag{1.16}$$

Poznamenejme, že oba vztahy (1.14) i (1.16) vyjadřují tentýž vztah (1.12), první jmenovaný vztah ovšem používá zápisu n-tice neznámých x_1, x_2, $\dots x_n$ ve sloupcovém tvaru, zatímco druhý ve tvaru řádkovém. Výhoda prvního způsobu spočívá především v tom, že matici A můžeme ze soustavy rovnic o něco snadněji přečíst, než transponovanou matici A^T. Rovněž po dosazení konkrétních čísel je (1.14) opticky bližší a podobnější zápisu původní soustavy (1.12). Proto budeme většinou upřednostňovat tento způsob zápisu.

V tomto odstavci jsme také zavedli konvenci, v níž sloupcově zapsané n-tice čísel značíme pruhem nahoře, tedy

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

zatímco řádkově zapsané n-tice čísel značíme podtržením nebo-li pruhem dole, tedy

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

V zásadě se jedná o „vektorové" veličiny téhož typu (aniž bychom zatím přesně specifikovali, co rozumíme pod pojmem *vektor*), avšak vzhledem k maticovým operacím se chovají odlišně, a proto je nutné je rozlišit. V záloze máme ještě jedno označení pro „vektorové" veličiny, a sice

$$\vec{x},$$

které však rezervujeme pro poněkud obecnější případ „vektoru".

Matice A z označení (1.13) se nazývá **matice soustavy** (1.12), nebo také **matice koeficientů** soustavy (1.12). Matice

$$(A|\bar{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix},$$

která vznikne přidáním sloupce $\bar{b}$ pravých stran k matici soustavy A, se nazývá **rozšířená matice** soustavy (1.12). Obráceně, jakákoli matice, která má více než jeden sloupec, může být považována za rozšířenou matici soustavy jistého systému lineárních rovnic. Matice soustavy i rozšířená matice soustavy hrají klíčovou roli pro řešení soustav lineárních rovnic.

Příklad 1.18 Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 5 \\ -2x & & & + & z & = & 7 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 3. \end{array}$$

Položíme-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

můžeme psát danou soustavu ve tvaru

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Matice soustavy je matice A a rozšířená matice je matice

$$(A|\bar{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & | & 5 \\ -2 & 0 & 1 & | & 7 \\ 3 & 2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 1.19 Matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ 3 & 0 & 2 & | & 5 \end{pmatrix}$$

je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & & & + & 2z & = & 5. \end{array}$$

□

1.3 Vlastnosti maticových operací

V této části budeme uvažovat vlastnosti právě definovaných maticových operací. Mnoho těchto vlastností bude podobných známým vlastnostem reálných čísel. Kromě toho však zde budou překvapující rozdíly mezi chováním reálných čísel a matic během některých operací, například násobení.

Věta 1.1 *Nechť A, B, C jsou matice takových typů, že následující operace jsou definovány. Pak platí:*

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) *Existuje jediná matice $\mathbf{0}$ typu $m \times n$, pro kterou platí*

$$A + \mathbf{0} = A = \mathbf{0} + A.$$

(iv) *Ke každé matici A typu $m \times n$ existuje jediná matice D typu $m \times n$ taková, že*

$$A + D = \mathbf{0} = D + A.$$

Tuto matici značíme $D = -A$.

Důkaz. Části (i) a (ii) jsou zřejmé, protože sčítání matic je definováno po složkách a obě tvrzení plynou z vlastností sčítání reálných (nebo komplexních) čísel. Podmínku (*iii*) evidentně splňuje nulová matice $\mathbf{0}$, tj. matice typu $m \times n$, složená pouze z nul. Pokud by ovšem existovala matice, řekněme O, se stejnou vlastností, pak

$$O = O + \mathbf{0} = \mathbf{0} + O = \mathbf{0}.$$

Podobně podmínce (iv) vyhovuje matice $-A$, tvořená prvky opačnými k prvkům matice A. Pokud má ještě B stejnou vlastnost jako $-A$, platí

$$-A = -A + \mathbf{0} = -A + (A + B) = (-A + A) + B = \mathbf{0} + B = B.$$

$\square$

Příklad 1.20 Nulová matice typu 2×2 je matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

máme

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & -1+0 \\ 2+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nulová matice typu 2×3 je matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 1.21 Abychom ilustrovali Větu 1.1, nechť

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní máme

$$A + (-A) = \mathbf{0}.$$

□

Místo abychom psali (složitěji) $A+(-B)$, budeme jednoduše psát $A-B$ a tento výraz budeme nazývat **rozdíl** matic A, B (v tomto pořadí).

Příklad 1.22 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

Věta 1.2 *Nechť jsou matice A, B, C vhodných typů v každém z následujících případů. Pak platí:*

(i) $A(BC) = (AB)C$,

(ii) $A(B+C) = AB + AC$,

(iii) $(A+B)C = AC + BC$.

Důkaz. Dokažme nejprve (i). V označení $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $G = (g_{ij}) = A(BC)$ a $H = (h_{ij}) = (AB)C$ máme

$$g_{il} = \sum_j a_{ij}(\sum_k b_{jk}c_{kl}) = \sum_{j,k} a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum_k(\sum_j)a_{ij}b_{jk})c_{kl} = h_{il},$$

odkud plyne

$$G = H.$$

Dokažme (ii). Označme dále $P = (p_{ij}) = A(B + C)$. Pak

$$p_{ik} = \sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = (\sum_j a_{ij}b_{jk}) + (\sum_j a_{ij}c_{jk}),$$

odkud je již zřejmé, že

$$P = AB + AC.$$

Tvrzení (iii) je duální a analogické k (ii), pouze roznásobení závorky probíhá z druhé strany. Důkaz by byl velmi podobný důkazu (ii) a čtenář jej může provést sám jako cvičení. □

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Je-li p přirozené číslo, definujeme

$$A^p = A \cdot A \cdot \ldots A,$$

kde počet činitelů vpravo od rovnítka je právě p. Dále klademe

$$A^0 = I_n.$$

Pro přirozená čísla p, q a odpovídající mocniny čtvercových matic platí některá pravidla, která důvěrně známe pro práci s reálnými čísly, jako například

$$A^pA^q = A^{p+q}$$

a

$$(A^p)^q = A^{pq}.$$

Avšak musíme zdůraznit, že pro čtvercové matice obecně neplatí

$$(AB)^p = A^pB^p.$$

Pokud však $AB = BA$, toto tvrzení platí (dokažte jako cvičení).

Nyní upozorníme ještě na dvě důležité odlišnosti maticového násobení od násobení reálných čísel. Když a, b jsou dvě reálná čísla, pak $ab = 0$ může platit pouze když $a = 0$ nebo $b = 0$. Avšak pro matice toto obecně neplatí.

Příklad 1.23 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pak ani jedna z matic A, B není nulová, ale

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Když a, b a c jsou reálná čísla pro která $ab = ac$, přičemž $a \neq 0$, plyne odtud $b = c$. Říkáme, že jsme krátili rovnici $ab = ac$ číslem a. Zákon o krácení však v případě násobení matic neplatí.

Příklad 1.24 Když

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

je

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{pmatrix},$$

ale $B \neq C$.

□

Věta 1.3 *Nechť r, s jsou reálná nebo komplexní čísla a A, B matice vhodných typů. Pak platí*

(i) $r(sA) = (rs)A$,

(ii) $(r + s)A = rA + sA$,

(iii) $r(A + B) = rA + rB$,

(iv) $A(rB) = r(AB) = (rA)B$.

Důkaz věty je snadný, všechna tvrzení vyplynou v podstatě ihned z rozepsání matic do složek, tj. například $A = (a_{ij})$. Čtenář může provést důkaz sám jako cvičení.

Věta 1.4 *Nechť r je reálné nebo komplexní číslo a A, B matice vhodných typů. Pak platí*

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$,

(iv) $(rA)^T = rA^T$.

Důkaz. Tvrzení (i), (ii), (iv) jsou dostatečně zřejmá podobně jako celá předchozí věta. Pozornost zasluhuje pouze důkaz (iii). Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) = AB$, $D = (d_{ij}) = B^T A^T$, $G = (g_{ij}) = C^T$, $P = (p_{ij}) = A^T$, $Q = (q_{ij}) = B^T$. Platí

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} = g_{ki},$$

a protože $a_{ij} = p_{ji}$ a $b_{jk} = q_{kj}$, máme

$$g_{ki} = \sum_j p_{ji} q_{kj} = \sum_j q_{kj} p_{ji}.$$

Tedy $G = QP$, takže

$$(AB)^T = C^T = G = QP = B^T A^T.$$

□

1.4 Řešení soustav lineárních rovnic

V tomto odstavci se budeme systematicky zabývat eliminační metodou řešení soustavy lineárních rovnic. Metoda začíná rozšířenou maticí soustavy a končí maticí, která má jistý speciální tvar. Tato nová matice reprezentuje soustavu lineárních rovnic, která má přesně stejné řešení, jako původní zadaná soustava; ovšem toto řešení lze z nové soustavy přímo „přečíst”, obvykle narozdíl od původní soustavy. Například, jestliže

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

je rozšířenou maticí jisté soustavy lineárních rovnic, potom řešení soustavy lze z této soustavy snadno přečíst:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & 2x_4 & = & 4 \\ & x_2 & & - & x_4 & = & -5 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & = & 6. \end{array}$$

Úkolem tohoto odstavce bude upravit rozšířenou matici, reprezentující danou soustavu lineárních rovnic na tvar, z něhož již bude snadné řešení získat.

Říkáme, že matice A typu $m \times n$ je v **redukovaném schodovitém tvaru**, jestliže splňuje následující podmínky:

(i) Všechny řádky matice A, složené ze samých nul (pokud vůbec existují) jsou na posledních řádkových pozicích.

(ii) První nenulový prvek v každém nenulovém řádku je roven 1; tento prvek se nazývá **vedoucí prvek** daného řádku.

(iii) Jestliže i-tý a $(i+1)$-ní řádek jsou dva po sobě jdoucí nenulové řádky, pak vedoucí prvek $(i+1)$-ního řádku leží vpravo od vedoucího prvku i-tého řádku.

(iv) Pokud nějaký sloupec matice A obsahuje vedoucí prvek nějakého řádku, zbývající prvky tohoto sloupce jsou nuly.

Matice, splňující podmínky (i) a (iii) se nazývá **matice ve schodovitém tvaru**. Poznamenejme, že matice ve schodovitém tvaru nebo v redukovaném schodovitém tvaru nemusí mít žádný nulový řádek.

Příklad 1.25 Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

jsou v redukovaném schodovitém tvaru.

Příklad 1.26 Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nejsou v redukovaném schodovitém tvaru, matice B a D však jsou ve schodovitém (nikoli redukovaném) tvaru. Matice A, C nejsou ve schodovitém tvaru.

□

Nyní se vrátíme k diskusi, jak transformovat matici na její redukovaný schodovitý tvar. Elementární řádkovou úpravou nazýváme kteroukoli z následujících operací:

(i) Vzájemná výměna r-tého a s-tého řádku. To znamená, nahradit řádek $a_{r1},\ a_{r2},\ \ldots,\ a_{rn}$ řádkem $a_{s1},\ a_{s2},\ \ldots,\ a_{sn}$ a řádek $a_{s1},\ a_{s2},\ \ldots,\ a_{sn}$ nahradit řádkem $a_{r1},\ a_{r2},\ \ldots,\ a_{rn}$.

(ii) Vynásobení r-tého řádku číslem $c \neq 0$. To znamená, nahradit řádek $a_{r1},\ a_{r2},\ \ldots,\ a_{rn}$ řádkem $ca_{r1},\ ca_{r2},\ \ldots,\ ca_{rn}$

(iii) Přičtení d-násobku r-tého řádku k s-tému řádku pro $r \neq s$. To znamená, nahradit řádek $a_{s1},\ a_{s2},\ \ldots,\ a_{sn}$ řádkem $da_{r1} + a_{s1},\ da_{r2} + a_{s2},\ \ldots,\ da_{rn} + a_{sn}$.

O matici A typu $m \times n$ řekneme, že je **řádkově ekvivalentní** matici B typu $m \times n$, jestliže je možné získat matici B z matice A aplikací konečně mnoha elementárních řádkových úprav.

Věta 1.5 *Každá nenulová matice typu $m \times n$ je řádkově ekvivalentní s maticí v redukovaném schodovitém tvaru.*

Důkaz této věty neuvádíme. Není sice z teoretického hlediska obtížný, je však náročný na korektní a obecný zápis všech možností, které u matice, kterou chceme pomocí elementárních řádkových úprav na redukovaný schodovitý tvar převést, mohou nastat. Formalismus, který bychom museli kvůli korektnímu a dostatečně krátkému zápisu důkazu vybudovat, by zcela překryl původní, velmi jednoduchou myšlenku. Proto se spokojíme s demonstrací, jak se matice na její redukovaný schodovitý tvar převádí v následujícím příkladě. S dalšími příklady se čtenář může seznámit ve cvičení.

Příklad 1.27 Převedení matice A na její redukovaný schodovitý tvar B pomocí elementárních řádkových úprav:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{17}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \frac{19}{2} & 14 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{17}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 18 & 19 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{17}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{17}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

□

Následující příklady také ilustrují, jak můžeme využít elementárních řádkových úprav a redukovaného schodovitého tvaru matice k řešení soustav lineárních rovnic. Tento postup je znám jako **Gaussova eliminační metoda**.

Příklad 1.28 Řešme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3. \end{array}$$

Rozšířená matice této soustavy je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Tato matice je řádkově ekvivalentní matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

jíž odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccr} x & & & = & 2 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 3. \end{array}$$

Soustava má tedy jedné řešení $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$. □

Příklad 1.29 Řešme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & 5w & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & - & 9w & = & -3 \\ 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & -11 \\ x & - & 3y & + & 2z & + & 7w & = & -5. \end{array}$$

Její rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right).$$

Tato matice je řádkově ekvivalentní matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{1.17}$$

jíž odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & + & 2w & = & -5 \\ & & y & & & - & 3w & = & 2 \\ & & & & z & - & 2w & = & 3. \end{array}$$

Nulový řádek v (1.31) jsme ignorovali. Hodnotu jedné z neznámých můžeme volit; v obecném případě však nemůžeme vybrat kteroukoli neznámou. Zřejmě není výhodné volit takovou neznámou, vzhledem k níž je soustava již rozřešena (tedy takovou, jíž odpovídá vedoucí prvek v rozšířené matici v redukovaném schodovitém tvaru). V takovém případě bychom totiž museli některé vztahy přepočítat, což znamená mnoho zbytečných operací navíc. Naopak je vhodné volit zbývající neznámé, tedy ty, vzhledem k nimž soustava rozřešena **není**. V našem případě je to tedy neznámá w. Volíme tedy $w = r$, kde r je libovolné reálné, popřípadě komplexní číslo. Pak dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$\begin{array}{rcr} x & = & -5 + 2r \\ y & = & 2 + 3r \\ z & = & 3 + 2r \\ w & = & r. \end{array}$$

Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení.

□

Příklad 1.30 Řešme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & + & 4x_5 & + & 3x_6 & = & 9. \end{array}$$

Rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Tato matice je řádkově ekvivalentní matici

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

jíž odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & & & - & x_6 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & & & + & 2x_6 & = & 1 \\ & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & = & 2. \end{array}$$

Jako parametry je vhodné zvolit proměnné x_2, x_4 a x_6. Obecné řešení má tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= r + 3s - 2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 1 - 2r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= 2 - r \\ x_6 &= r, \end{aligned}$$

kde r, s, t jsou libovolná reálná, případně komplexní čísla.

□

Příklad 1.31 Řešme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4w & = & 5 \\ x & + & 3y & + & 5z & + & 7w & = & 11 \\ x & & & - & z & - & 2w & = & -6. \end{array}$$

Její rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right).$$

Tato matice je řádkově ekvivalentní matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Poslední řádek této matice reprezentuje rovnici

$$0x + 0y + 0z + 0w = 1,$$

která však nemá řešení. Proto ani celá soustava nemá řešení. □

1.4.1 Hodnost matice

Libovolnou n-tici reálných nebo komplexních čísel nazveme n-**rozměrným** (reálným nebo komplexním) **vektorem**. Připomínáme, že n-rozměrný vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ může být zapsán například jako matice typu $1 \times n$, tedy řádkovým způsobem, nebo jako matice typu $n \times 1$, tedy sloupcovým způsobem. Píšeme

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Buďte $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots \underline{a}_m$ reálné n-rozměrné vektory. Řekneme, že tvoří **lineárně nezávislý systém**, nebo krátce, že jsou **lineárně nezávislé**, jestliže neexistují reálná čísla γ_1, γ_2, $\dots \gamma_n$, s jedinou výjimkou $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots \gamma_n = 0$, že

$$\gamma_1 \underline{a}_1 + \gamma_2 \underline{a}_2 + \dots + \gamma_m \underline{a}_m = \mathbf{0}.$$

Pokud nejsou n-rozměrné vektory lineárně nezávislé, říkáme, že jsou **lineárně závislé**.

Zcela analogicky bychom mohli v předchozí definici použít sloupcové formy zápisu n-rozměrných vektorů – nic podstatného by se nezměnilo. Rozhodnutí o lineární závislosti nebo nezávislosti určitého systému vektorů přímo z předchozí definice znamená obvykle vyřešit jistou soustavu lineárních rovnic. Můžeme to ilustrovat následujícími příklady.

Příklad 1.32 Uvažujme vektory

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hledáme koeficienty γ_1, γ_2, γ_3 takové, že

$$\gamma_1 \underline{a}_1 + \gamma_2 \underline{a}_2 + \gamma_3 \underline{a}_3 = \mathbf{0},$$

což znamená řešit soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \gamma_1 & + & 2\gamma_2 & + & 3\gamma_3 & = & 0 \\ -\gamma_1 & + & 3\gamma_2 & + & 2\gamma_3 & = & 0 \\ 2\gamma_1 & + & \gamma_2 & - & 2\gamma_3 & = & 0 \end{array} \tag{1.18}$$

vzheldem k neznámým γ_1, γ_2, γ_3. Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \tag{1.19}$$

a je řádkově ekvivalentní matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Jediné řešení naší soustavy tedy je $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. To ovšem znamená, že vektory $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ jsou lineárně nezávislé.

□

Poznamenejme, že soustava lineárních rovnic, která má na pravé straně jenom samé nuly, se nazývá **homogenní**. Tedy například soustava rovnic (1.18) s rozšířenou maticí (1.19) je homogenní soustava. Elementární řádkové úpravy nemají na poslední sloupec rozšířené matice, složený pouze z nul, žádný vliv; tento sloupec lze tedy eventuálně vynechat a upravovat pouze matici soustavy.

Příklad 1.33 Uvažujme vektory

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Opět hledáme koeficienty γ_1, γ_2, γ_3 takové, že

$$\gamma_1\underline{a}_1 + \gamma_2\underline{a}_2 + \gamma_3\underline{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Musíme vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \gamma_1 & + & 3\gamma_2 & + & 4\gamma_3 & = & 0 \\ 2\gamma_1 & - & 1\gamma_2 & + & 1\gamma_3 & = & 0 \\ 3\gamma_1 & & & - & 3\gamma_3 & = & 0 \end{array}$$

vzheldem k neznámým γ_1, γ_2, γ_3. Soustava je homogenní a její matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je řádkově ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

které odpovídá jednodušší soustava (ovšem se stejným řešením)

$$\begin{array}{rcrcl} \gamma_1 & & + & \gamma_3 & = & 0 \\ & \gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 0. \end{array}$$

Volit můžeme například γ_3; pak volba $\gamma_3 = -1$ dá $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Odtud je již zřejmé, že vektory $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ jsou lineárně závislé. Platí totiž

$$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 - \underline{a}_3 = \mathbf{0}.$$

□

Za zmínku stojí také fakt, že není nutné sestavovat soustavu pro neznámé koeficienty, stačí sestavit její matici, eventuálně rozšířenou matici, kterou pak upravíme na redukovaný schodovitý tvar. Z existence nulových řádků pak vyvodíme možnost volby některých koeficientů a rozhodneme o lineární závislosti či nezávislosti.

Doposud příliš nezáleželo na tom, zda jsme pracovali s reálnými nebo komplexními čísly. V případě lineární závislosti či nezávislosti však může být podstatné, zda uvažované koeficienty mohou být pouze reálné, nebo i komplexní.

Příklad 1.34 Uvažujme dvě komplexní čísla $a = 1$, $b = \mathbf{i}$ a předpokládejme, že existují koeficienty α, β tak, že

$$\alpha a + \beta b = 0 \tag{1.20}$$

Pokud $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, rovnost může nastat jedině když $\alpha = \beta = 0$ a nad reálnými čísly $\mathbb{R}$ jsou tedy čísla a, b, uvažovaná jako vektory, nezávislá. Pokud však připustíme, že $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, můžeme volit například $\alpha = 1$, $\beta = \mathbf{i}$ abychom dosáhli požadované rovnosti (1.20), neboť $1+\mathbf{i}^2 = 0$. V tomto případě jsou tedy čísla a, b, jakožto vektory nad množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$, závislá. $\square$

Nechť $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\dots \underline{a}_m$ jsou n-rozměrné vektory a β_1, β_2, $\dots$, β_m konstanty. Pak výraz

$$\beta_1 \underline{a}_1 + \beta_2 \underline{a}_2 + \cdots + \beta_m \underline{a}_m$$

se nazývá **lineární kombinace** vektorů $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\dots \underline{a}_m$ s koeficienty β_1, β_2, $\dots$, β_m.

Věta 1.6 *Jsou-li n-rozměrné vektory $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\dots$, $\underline{b}_m$ lineárně závislé, pak existuje index $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ takový, že vektor $\underline{b}_j$ je lineární kombinací ostatních vektorů. Naopak, jestliže $\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m$, tvoří vektory $\underline{v}$, $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\dots$, $\underline{b}_m$ lineárně závislý systém.*

Důkaz. Nechť jsou vektory $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\dots$, $\underline{b}_m$ lineárně závislé. Pak existují koeficienty β_1, β_2, $\dots$, β_m takové, že

$$\beta_1 \underline{b}_1 + \beta_2 \underline{b}_2 + \cdots + \beta_m \underline{b}_m = \mathbf{0},$$

přičemž mezi čísly β_1, β_2, $\dots$, β_m existuje aspoň jedno nenulové. Vhodným přeznačením vektorů $\underline{b}_i$ a koeficientů β_i můžeme vždy dosáhnout toho, že $\beta_1 \neq 0$. Pak ovšem

$$\underline{b}_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1}\underline{b}_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1}\underline{b}_3 - \cdots - \frac{\beta_m}{\beta_1}\underline{b}_m.$$

Naopak, nechť

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m.$$

Pak také

$$-\underline{v} + \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m = \mathbf{0}.$$

V této lineární kombinaci je aspoň jeden z koeficientů (například u $\underline{v}$) nenulový, odkud již plyne, že vektory $\underline{v}$, $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, ..., $\underline{b}_m$ jsou lineárně závislé. □

Buď A matice typu $m \times n$. **Řádkovou hodností** matice A nazveme takové číslo $h_r(A)$, které udává maximální počet prvků lineárně nezávislého systému, tvořeného řádky matice A. Podobně **sloupcovou hodností** matice A nazveme takové číslo $h_s(A)$, které udává maximální počet prvků lineárně nezávislého systému, tvořeného sloupci matice A. Později ukážeme, že řádková a sloupcová hodnost jsou pro každou matici stejné, takže můžeme hovořit pouze o hodnosti matice.

Věta 1.7 *Elementární řádkové úpravy nemění řádkovou hodnost matice.*

Důkaz. Je zřejmé, že jakákoli změna pořadí řádků, tím méně vzájemná výměna dvou z nich, hodnost matice nezmění.

Nejprve tedy ukážeme, že hodnost matice zůstává nezměněna, násobíme-li jeden řádek nenulovou konstantou. Buď $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_s\}$ systém n-rozměrných vektorů a předpokládejme, že je lineárně nezávislý. Označme $\underline{b}_1 = a_1$, $\underline{b}_2 = a_2$, ..., $\underline{b}_s = c \cdot a_s$, kde $c \neq 0$. Pokud pro nějaké γ_1, γ_2, ..., γ_s je

$$\gamma_1 \underline{b}_1 + \gamma_2 \underline{b}_2 + \cdots + \gamma_s \underline{b}_s = \mathbf{0},$$

je

$$\gamma_1 \underline{a}_1 + \gamma_2 \underline{a}_2 + \cdots + \gamma_s c \underline{a}_s = \mathbf{0}$$

a z lineární nezávislosti vektorů $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_s$ plyne $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_s c = 0$, což dává ihned $\gamma_s = 0$, neboť $c \neq 0$. Tedy i vektory $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_s$ jsou lineárně nezávislé.

Platí ovšem také $\underline{a}_s = \frac{1}{c} \underline{b}_s$, takže z lineární nezávislosti systému $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_s\}$ plyne i nezávislost $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_s\}$. Vynásobíme-li tedy řádek matice nenulovým číslem, lineárně nezávislé systémy řádků si navzájem jednoznačně odpovídají a obě matice tedy mají stejnou hodnost.

Nyní ukážeme, že přičtení násobku řádku k jinému řádku matice nezmění její hodnost. Nechť matice B vznikne z A přičtením násobku jistého řádku k jinému řádku. Ukážeme, že $h_r(B) \geq h_r(A)$. Nechť $h_r(A) = k$. Pak existuje lineárně nezávislý systém $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k\}$ řádků matice A, který je maximální. Zbylé řádky matice A můžeme označit $\underline{a}_{k+1}$, $\underline{a}_{k+2}$, ..., $\underline{a}_m$, kde $m \geq k$. Pokud se změna matice A v matici B nedotkne žádného z řádků $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ..., $\underline{a}_k$, pak zajisté $h_r(B) \geq k$.

Předpokládejme tedy, že $\underline{b}_1 = \underline{a}_1 + c \cdot \underline{a}_i$, $\underline{b}_2 = \underline{a}_2, \ldots, \underline{b}_m = \underline{a}_m$ pro jisté $i \in \{1, 2, \ldots m\}$. Tvoří-li $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$, ...,$\underline{b}_k$, $\underline{b}_i$ lineárně nezávislý systém, je opět $h_r(B) \geq k$. Nechť jsou tedy vektory $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$, ...,$\underline{b}_k$, $\underline{b}_i$ lineárně závislé. Existují koeficienty γ_2, γ_3, ..., γ_k, γ_i, které nejsou všechny nulové tak, že

$$\gamma_2 \underline{b}_2 + \gamma_3 \underline{b}_3 + \cdots + \gamma_k \underline{b}_k + \gamma_i \underline{b}_i = \mathbf{0}.$$

Musí být $\gamma_i \neq 0$, jinak by totiž byly $\underline{b}_2 = \underline{a}_2$, $\underline{b}_3 = \underline{a}_3$, ..., $\underline{b}_k = \underline{a}_k$, lineárně závislé, což není možné vzhledem k lineární nezávislosti většího systému vektorů $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k\}$. Pak

$$\underline{b}_i = -\frac{\gamma_2}{\gamma_i}\underline{b}_2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_i}\underline{b}_3 - \cdots - \frac{\gamma_m}{\gamma_i}\underline{b}_k,$$

což znamená, že

$$\underline{a}_i = -\frac{\gamma_2}{\gamma_i}\underline{a}_2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_i}\underline{a}_3 - \cdots - \frac{\gamma_m}{\gamma_i}\underline{a}_k.$$

Odtud plyne, že

$$\underline{b}_1 = \underline{a}_1 + c\underline{a}_i = \underline{a}_1 - c\frac{\gamma_2}{\gamma_i}\underline{a}_2 - c\frac{\gamma_3}{\gamma_i}\underline{a}_3 - \cdots - c\frac{\gamma_m}{\gamma_i}\underline{a}_k.$$

Ověříme, že jsou vektory $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, ..., $\underline{b}_k$ lineárně nezávislé. Nechť existují koeficienty β_1, β_2,... β_k, že

$$\beta_1\underline{b}_1 + \beta_2\underline{b}_2 + \cdots + \beta_k\underline{b}_k = \mathbf{0}.$$

Pak

$$\beta_1\underline{a}_1 - \beta_1 c\frac{\gamma_2}{\gamma_i}\underline{a}_2 - \beta_1 c\frac{\gamma_3}{\gamma_i}\underline{a}_3 - \cdots - \beta_1 c\frac{\gamma_m}{\gamma_i}\underline{a}_k + \beta_2\underline{b}_2 + \cdots + \beta_k\underline{b}_k = \mathbf{0},$$

což po úpravě dává

$$\beta_1\underline{a}_1 + (\beta_2 - \beta_1 c\frac{\gamma_2}{\gamma_i})\underline{a}_2 + (\beta_3 - \beta_1 c\frac{\gamma_3}{\gamma_i})\underline{a}_3 + \cdots + (\beta_k - \beta_1 c\frac{\gamma_k}{\gamma_i})\underline{a}_k = \mathbf{0}.$$

Protože jsou vektory $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ..., $\underline{a}_k$ lineárně nezávislé, je

$$\beta_1 = \beta_2 - \beta_1 c\frac{\gamma_2}{\gamma_i} = \beta_3 - \beta_1 c\frac{\gamma_3}{\gamma_i} = \cdots = \beta_k - \beta_1 c\frac{\gamma_k}{\gamma_i} = 0.$$

Pak ovšem

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0,$$

což znamená, že i vektory $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, ..., $\underline{b}_k$ jsou lineárně nezávislé. Pak $h_r(B) \geq k = h_r(A)$.

Záměnou rolí matic A, B získáme analogickou, avšak opačnou nerovnost $h_r(A) \geq h_r(B)$. Záměna rolí obou matic je možná proto, že úprava, kterou jsme provedli byla vratná: Je-li totiž pro $i \neq j$ např. $\underline{b}_j = \underline{a}_j + c \cdot \underline{a}_i$, je také $\underline{a}_j = \underline{b}_j - c \cdot \underline{b}_i$. Zde jsme použili faktu, že v daném kroku měníme pouze jeden, a to j-tý řádek, takže $\underline{a}_i = \underline{b}_i$. Celkově tedy máme $h_r(A) = h_r(B)$.

□

Věta 1.8 *Elementární řádkové úpravy nemění sloupcovou hodnost matice.*

Důkaz. Nechť

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

jsou m-rozměrné sloupcové vektory, které jsou zároveň vybranými sloupci matice A. Existují-li koeficienty x_1, x_2, …, x_k takové, že

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_k\bar{a}_k = \mathbf{0}, \tag{1.21}$$

pak také

$$x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \cdots + x_k\bar{b}_k = \mathbf{0}, \tag{1.22}$$

pro libovolné sloupcové vektory $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, … $\bar{b}_k$, které získáme elementární řádkovou úpravou matice A. Vztahy (1.21), případně (1.4.1) nejsou ničím jiným než soustavami homogenních lineárních rovnic, na jejichž řešení nemají elementární řádkové úpravy vliv a proto mají obě soustavy stejné řešení, tedy stejnou množinu vyhovujících koeficientů x_1, x_2, …, x_k. To ovšem znamená, že je systém vektorů $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k\}$ lineárně nezávislý, právě když je systém $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_k\}$ lineárně nezávislý. Odtud vyplývá, že ani sloupcová hodnost matice A se následkem řádkových elementárních úprav nemůže změnit. □

Věta 1.9 *Nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru a sloupce, které obsahují vedoucí prvky dané matice, jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť A je matice ve schodovitém tvaru. Pak A má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1k_1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2k_2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{mk_m} & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix},$$

kde a_{1k_1}, a_{2k_2}, …, a_{mk_m} jsou vedoucí prvky příslušného řádku a tedy nenulová čísla. Pokud pro nějaké koeficienty γ_1, γ_2, …, γ_m platí

$$\gamma_1\underline{a}_1 + \gamma_2\underline{a}_2 + \cdots + \gamma_m\underline{a}_m = \mathbf{0},$$

znamená to, že

$$\begin{aligned} \gamma_1 a_{1k_1} &= 0 \\ \gamma_1 a_{1k_1} + \gamma_2 a_{2k_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \gamma_1 a_{1k_1} + \gamma_2 a_{2k_2} + \cdots + \gamma_m a_{mk_m} &= 0. \end{aligned}$$

Odtud postupně dostáváme $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, …, $\gamma_m = 0$. Pak ovšem jsou řádkové vektory $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ lineárně nezávislé. Důkaz lineární nezávislosti sloupců, obsahujících vedoucí prvky je velmi podobný. □

Důsledkem předchozí věty je, že řádková hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků. Nyní můžeme dokázat naše hlavní tvrzení o hodnosti matice, totiž rovnost obou hodností pro libovolnou matici.

Věta 1.10 *Řádková i sloupcová hodnost matice si jsou rovny.*

Důkaz. Buď A matice typu $m \times n$, B její schodovitý tvar. Platí $h_r(A) = h_r(B)$ podle věty (1.7) a $h_s(A) = h_s(B)$ podle věty (1.8). Podle věty (1.9) je $h_s(B) \geq h_r(B)$, takže celkově $h_s(A) \geq h_r(A)$. Použijeme-li místo A matici A^T, dostaneme $h_r(A) = h_s(A^T) \geq h_r(A^T) = h_s(A)$. Je tedy $h_r(A) = h_s(A)$. $\square$

V důsledku předchozí věty můžeme vynechat přívlastek u řádkové, případně sloupcové hodnosti a mluvit pouze o **hodnosti matice** A, kterou budeme značit $h(A)$.

Příklad 1.35 Určeme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je řádkově ekvivalentní matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice B má tři nenulové řádky; platí tedy $h(A) = h(B) = 3$. $\square$

Nyní prozkoumáme vztah hodnosti k součinu matic.

Věta 1.11 *Buďte A matice typu $m \times p$ a B matice typu $p \times n$. Pak platí*

$$h(A) \geq h(AB) \leq h(B).$$

Důkaz. Rozměry matic zaručují, že součin AB je definován. Označme $C = (c_{ij}) = AB$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Platí

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

takže

$$\underline{c}_i = \begin{pmatrix} \sum_k a_{ik} b_{k1} & \sum_k a_{ik} b_{k2} & \dots & \sum_k a_{ik} b_{kn} \end{pmatrix} = \sum_k a_{ik} \begin{pmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \sum_k a_{ik} \underline{b}_k.$$

Je tedy zřejmé, že řádky matice C jsou lineárními kombinacemi jistých řádků matice B. Uvažujme tedy matici

$$D = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}.$$

Zmíněné lineární kombinace určují způsob, jak pomocí elementárních řádkových úprav v matici D vynulovat řádky, příslušné matici C. Je tedy $h(D) = h(B)$. Ovšem z definice řádkové hodnosti plyne $h(C) \leq h(D)$, odkud $h(AB) = h(C) \leq h(B)$. Z možnosti záměny řádků za sloupce, nebo alternativně přechodem ke transponovaným maticím, dostaneme i druhou nerovnost $h(AB) \leq h(A)$. □

Následující tvrzení je známé jako **Frobeniova věta**.

Věta 1.12 *Buď $A\bar{x} = \bar{b}$ systém lineárních rovnic. Tento systém má řešení, právě když hodnosti matice soustavy A a rozšířené matice $(A|\bar{b})$ jsou stejné.*

Důkaz. Je evidentní, že $h(A|\bar{b}) \geq h(A)$, protože matice $(A|\bar{b})$ obsahuje celou matici A a ještě jeden sloupec navíc. Nechť $A\bar{x} = \bar{b}$. Jsou-li $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ sloupce matice A, platí

$$\bar{b} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n, \tag{1.23}$$

takže sloupcový vektor $\bar{b}$ je lineární kombinací sloupců $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$. Nechť $h(A) = k \leq n$. Pak mezi vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ existuje k nezávislých, a vhodným eventuálním přeznačením lze vždy dosáhnout toho, že vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_k$ jsou lineárně nezávislé. Pak každý ze zbývajících vektorů $\bar{a}_{k+1}, \bar{a}_{k+2}, \ldots, \bar{a}_n$ je lineární kombinací prvních k vektorů. Vyjádřením těchto lineárních kombinací a dosazením do (1.23) můžeme ukázat, že $\bar{b}$ je lineární kombinací sloupcových vektorů $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_k$, s nimiž $\bar{b}$ tvoří lineárně závislý systém. Tedy platí $h(A|\bar{b}) \leq h(A)$, odkud $h(A|\bar{b}) = h(A)$.

Naopak, předpokládejme, že $h(A|\bar{b}) = h(A)$. Nechť $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k\}$ je maximální lineárně nezávislý systém sloupců matice A. Tento systém musí být maximální i v rozšířené matici $(A|\bar{b})$, protože jinak by tato matice měla větší hodnost. Pak ovšem systém $\{\bar{b}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k\}$ je lineárně závislý, což podle Věty 1.6 znamená, že existují čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s vlastností

$$\bar{b} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_k\bar{a}_k.$$

Zvolíme-li $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$, můžeme psát

$$\bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \cdots + \bar{a}_nx_n = \bar{b}$$

nebo ekvivalentně

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

□

Příklad 1.36 Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3. \end{array}$$

Tuto soustavu jsme řešili v Příkladě 1.28. Její rozšířená matice je

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Odtud je vidět, že $h(A) = 3 = h(A|\bar{b})$, takže soustava má, podle Věty 1.12, řešení. □

Příklad 1.37 Rozhodněme o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic (viz. také Příklad 1.29)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & 5w & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & - & 9w & = & -3 \\ 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & -11 \\ x & - & 3y & + & 2z & + & 7w & = & -5. \end{array}$$

Její rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

odkud $h(A) = 3 = h(A|\bar{b})$. Podle Věty 1.12 soustava má řešení. □

Příklad 1.38 Prozkoumejme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4w & = & 5 \\ x & + & 3y & + & 5z & + & 7w & = & 11 \\ x & & & - & z & - & 2w & = & -6, \end{array}$$

kterou jsme již řešili v Příkladě 1.31. Její rozšířená matice je

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde vidíme, že $h(A) = 2$, zatímco $h(A|\bar{b}) = 3$. Podle Věty 1.12 soustava nemá řešení. □

Můžeme si všimnout, že Frobeniova věta, tj. Věta 1.12, nic neříká o počtu řešení, které daná soustava lineárních rovnic má, ale hovoří pouze o existenci (nějakého) řešení.

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **regulární**, jestliže $h(A) = n$. V opačném případě říkáme, že A je **singulární**. Příkladem regulární matice je například matice jednotková.

Věta 1.13 *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Soustava $A\bar{x} = \mathbf{0}$ má jediné řešení, právě když A je regulární matice.*

Důkaz. Nechť A je regulární. Pak jsou sloupce $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ matice A lineárně nezávislé, takže pokud $A\bar{x} = \mathbf{0}$, platí

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n = \mathbf{0}.$$

Z lineární nezávislosti vektorů $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ pak plyne $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Naopak, má-li $A\bar{x} = \mathbf{0}$ jediné řešení $\bar{x} = \mathbf{0}$, pak jedinou možností jak anulovat lineární kombinaci

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n$$

je zvolit všechny koeficienty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nulové. Tedy sloupcové vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ jsou lineárně nezávislé. To ovšem znamená, že $h(A) = n$ a tedy matice A je regulární. □

Věta 1.14 *Nechť A je čtvercová regulární matice řádu n. Pak soustava $A\bar{x} = \bar{b}$ má jediné řešení.*

Důkaz. Protože $h(A) = n$, je také $h(A|\bar{b}) = n$. Obě matice mají totiž n řádků a tedy hodnost matice $(A|\bar{b})$ nemůže být větší. Podle Věty 1.12 má soustava řešení. Nechť $\bar{y}$, $\bar{z}$ jsou dvě řešení soustavy $A\bar{x} = \bar{b}$. Máme tedy

$$A\bar{y} = \bar{b} \quad \text{a zároveň} \quad A\bar{z} = \bar{b}.$$

Pak

$$A(\bar{y} - \bar{z}) = A\bar{y} - A\bar{z} = \bar{b} - \bar{b} = \mathbf{0}.$$

Podle Věty 1.13 je $\bar{x} = \bar{y} - \bar{z} = \mathbf{0}$, odkud $\bar{y} = \bar{z}$. Řešení je tedy jediné. □

Jako ilustrace k předchozí větě poslouží Příklad 1.36. Matice soustavy je v tomto případě regulární, takže řešení je jediné, jak se můžeme přesvědčit v Příkladě 1.28.

O dvou čtvercových maticích A, B řádu n řekneme, že jsou navzájem **inverzní**, pokud

$$AB = I_n = BA.$$

Příklad 1.39 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Protože $AB = BA = I_2$, matice A, B jsou navzájem inverzní. □

Příklad 1.40 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Abychom nalezli A^{-1}, položíme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Chceme aby platilo

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak ovšem

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odkud dostáváme rovnice

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} a & & & + & 2c & & & = & 1 \\ 3a & & & + & 4c & & & = & 0 \\ & & b & & & + & 2d & = & 0 \\ & & 3b & & & & 4d & = & 1. \end{array}$$

Řešení těchto rovnic je $a = -2$, $b = 1$, $c = \frac{3}{2}$ a $d = -\frac{1}{2}$ (ověřte). Pak platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Můžeme ještě ověřit, že

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

□

Některé matice však inverzní matici nemají; o tom se můžeme přesvědčit v následujícím příkladě.

Příklad 1.41 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Abychom nalezli A^{-1}, klademe opět

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Přitom chceme aby platilo

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak ovšem

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odkud dostáváme rovnice

$$\begin{array}{rrrrcl} a & & + \; 2c & & = & 1 \\ 2a & & + \; 4c & & = & 0 \\ & b & & + \; 2d & = & 0 \\ & 2b & & 4d & = & 1. \end{array}$$

Tato soustava lineárních rovnic nemá řešení (ověřte např. podle Věty 1.12), odkud plyne, že k matici A neexistuje inverzní matice. □

Když si všimneme podrobněji matic v předchozích příkladech a budeme zkoumat, co mají společného ty matice, k nimž inverzní matice existuje, můžeme si všimnout, že jsou všechny regulární. Přirozeně tak vzniká hypotéza, že regularita matice je vhodným kritériem existence inverzní matice. Následující věta ukazuje, že je tato hypotéza správná.

Věta 1.15 *Čtvercová matice je regulární, právě když má inverzní matici.*

Důkaz. Uvažujme maticovou rovnici

$$AX = I_n, \tag{1.24}$$

kde A je regulární matice a X neznámá čtvercová matice řádu n. Označíme-li

$$X = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \dots & \bar{i}_n \end{pmatrix},$$

můžeme přepsat rovnici (1.24) do tvaru

$$A\bar{x}_1 = \bar{i}_1, \quad A\bar{x}_2 = \bar{i}_2, \quad \dots, \quad A\bar{x}_n = \bar{i}_n.$$

Každá z těchto n soustav má stejnou matici soustavy A a protože je A regulární, všechny tyto soustavy mají jediné řešení podle Věty 1.14. Tedy také maticová rovnice (1.24) má jediné řešení. Zbývá ukázat, že také

$$XA = I_n.$$

Záměnou řádků za sloupce lze dokázat, že existuje čtvercová matice řádu n, že $YA = I_n$. Pak $Y = YI_n = YAX = I_nX = X$. Tedy $XA = I_n$ a proto je X inverzní k A.

Nechť A má inverzní matici C. Pak $CA = I_n$. Je-li $\bar{x}$ řešení rovnice $A\bar{x} = \mathbf{0}$, lze psát $\bar{x} = I_n\bar{x} = CA\bar{x} = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$, takže soustava $A\bar{x} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\bar{x} = \mathbf{0}$. Podle Věty (1.13) je A regulární matice. □

Poznamenejme jen, že abychom ověřili, že matice A, Y jsou navzájem inverzní, stačí spočítat jeden ze součinů AY, YA. Když totiž $YA = I_n$, pak podle druhé části důkazu předchozí věty máme A regulární. Pak podle první části důkazu A má zprava inverzní matici X a platí $X = Y$.

Důkaz předchozí věty poskytuje návod, jak počítat inverzní matice efektivně pomocí Gaussovy eliminace. To ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 1.42 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici k matici A najdeme převedením matice $(A|I_3)$ na redukovaný schodovitý tvar. Pokud inverzní matice existuje, redukovaný schodovitý tvar této matice bude $(I_3|A^{-1})$. V případě, že na levé straně od svislé čáry nevyjde v redukovaném schodovitém tvaru jednotková matice, inverzní matice neexistuje. Platí (proveďte podrobný výpočet jako cvičení)

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) = (I_3|A^{-1}).$$

Inverzní matice k A existuje a platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 1.43 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Platí (proveďte podrobný výpočet jako cvičení)

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Od tohoto kroku je zřejmé, že matici na levé straně na jednotkovou matici upravit nelze, protože její hodnost (a také hodnost matice A) je pouze 2. Tedy inverzní matice k matici A neexistuje. □

1.5 Klíčové myšlenky kapitoly

- Matice sčítáme po složkách. Aby byl součet definován, musí být sčítané matice stejného typu. Sčítání matic má mnohé podobné vlastnosti, jako sčítání reálných nebo komplexních čísel a je komutativní.
- Matice násobíme číslem po složkách.
- Pro součin dvou matic musí být násobené matice vhodného typu. Násobení matic je asociativní, distribuuje se sčítáním, ale **není** komutativní.
- Matice reprezentuje koeficienty soustavy lineárních rovnic. Není nutné přepisovat celé rovnice, stačí pracovat s koeficienty.
- Složitější soustavu rovnic (reprezentovanou rozšířenou maticí) převádíme pomocí elementárních řádkových úprav na jednodušší soustavu, která má stejné řešení. To nakonec z výsledné soustavy, jejíž matice má redukovaný schodovitý tvar, snadno přečteme.
- Řádková (sloupcová) hodnost matice vyjadřuje maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců). Řádková i sloupcová hodnost matice si jsou rovny.
- Výpočet inverzní matice k matici řádu n Gaussovou eliminací je ekvivalentní řešení n soustav lineárních rovnic o n neznámých se stejnou maticí soustavy a n (obecně různými) pravými stranami.

1.6 Cvičení N

1. Jsou dány matice

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&-1&3\\4&1&5\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}2&-4&5\\0&1&4\\3&2&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-4&5\\2&3\end{pmatrix}$$

Spočítejte $A(BD)$, $(AB)D$, $A(C+E)$, $AC+AE$, $DF+AB$.

$\Bigg[$ Výsledek:$A(BD)=(AB)D=\begin{pmatrix}58&4\\66&4\end{pmatrix}$, $A(C+E)=AC+AE=\begin{pmatrix}28&8&38\\34&4&41\end{pmatrix}$, $DF+AB=\begin{pmatrix}-2&17\\16&31\end{pmatrix}$. $\Bigg]$. □

2. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}x&+&y&+&2z&+&3w&=&13\\x&-&2y&+&z&+&w&=&8\\3x&+&y&+&z&-&w&=&1\end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: $x=-2+r$, $y=-1$, $z=8-2r$, $w=r$, $r\in\mathbb{R}$ $\Big]$. □

3. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr}x&+&y&+&z&=&1\\x&+&y&-&2z&=&3\\2x&+&y&+&z&=&2\end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: $x=1$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$ $\Big]$. □

4. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}2x&+&y&+&z&-&2w&=&1\\3x&-&2y&+&z&-&6w&=&-2\\x&+&y&-&z&-&w&=&-1\\6x&&&+&z&-&9w&=&-2\\5x&-&y&+&2z&-&8w&=&3\end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: Nemá řešení. $\Big]$. □

5. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: $x_1 = -r,\ x_2 = r,\ x_3 = -r,\ x_4 = r,\ r \in \mathbb{R}$ $\Big]$. □

6. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$ $\Big]$. □

7. Řešte soustavu lineárních rovnic se zadanou rozšířenou maticí soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $x_1 = -1,\ x_2 = 4,\ x_3 = -3$ $\Big]$. □

8. Řešte soustavu lineárních rovnic se zadanou rozšířenou maticí soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ $\Big]$. □

9. Řešte soustavu lineárních rovnic se zadanou rozšířenou maticí soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & | & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $x_1 = 1 - r,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_4 = r,\ r \in \mathbb{R}$ $\Big]$. □

10. Řešte soustavu lineárních rovnic se zadanou rozšířenou maticí soustavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

$\Big[$ Výsledek: Nemá řešení. $\Big]$. $\square$

11. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které výsledná soustava lineárních rovnic (a)nemá řešení, (b) má jediné řešení, (c) má nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: (a) $a = -2$, (b) $a \neq \pm 2$, (c) $a = 2$ $\Big]$. $\square$

12. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které výsledná soustava lineárních rovnic (a)nemá řešení, (b) má jediné řešení, (c) má nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: (a) $a = \pm\sqrt{6}$, (b) $a \neq \pm\sqrt{6}$, (c) Tento případ nikdy nenastane. $\Big]$. $\square$

13. K dané matici najděte metodou Gaussovy eliminace matici inverzní:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Big]$. $\square$

14. K dané matici najděte metodou Gaussovy eliminace matici inverzní:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\text{ Výsledek: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right].$$ □

15. K dané matici najděte metodou Gaussovy eliminace matici inverzní:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$\left[\text{ Výsledek: } A^{-1} \text{ neexistuje, matice } A \text{ je singulární. } \right].$ □

16. K dané matici najděte metodou Gaussovy eliminace matici inverzní:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\text{ Výsledek: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right].$$ □

17. K dané matici najděte metodou Gaussovy eliminace matici inverzní:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\text{ Výsledek: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right].$$ □

18. Zjistěte hodnost matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -2 & 1 \\ 7 & 8 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\left[\text{ Výsledek: } h(A) = 3 \right].$ □

19. Zjistěte hodnost matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $h(A) = 2$ $\Big]$. □

20. Zjistěte hodnost matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $h(A) = 3$ $\Big]$. □

21. Zjistěte hodnost matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 9 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $h(A) = 5$ $\Big]$. □

1.7 Cvičení M

1. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Matlabu spočítejte (pokud je daný výraz definován): $A * C$, $A * B$, $A + C'$, $B * A - C' * A$, $(2 * C - 6 * A') * B'$, $A * C - C * A$, $A * A' + C' * C$.

2. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte s pomocí Matlabu nejmenší takové $k \in \mathbb{N}$, pro které $A^k = I_3$.

3. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte s pomocí Matlabu nejmenší takové $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, pro které $A^k = A$.

5. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pomocí procedury **polyvalm** v systému Matlab spočítejte následující maticové polynomy: $A^4 - A^3 + A^2 + 2I_3$, $A^3 - 3A^2 + 3A$.

6. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Pomocí Matlabu spočítejte následující výrazy: (a) $(A^2 - 7A)(A + 3I_3)$; (b) $(A - I_3)^2 + (A^3 + A)$; (c) Odhadněte, zda a k jaké matici konverguje posloupnost A, A^2, A^3,....

7. Najděte redukovaný schodovitý tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

pomocí procedury **rref** systému Matlab.

V následujících úlohách zjistěte pomocí Matlabu, zda je matice A regulární nebo singulární a určete její hodnost. Můžete použít například procedury **rref**.

8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

V následujících úlohách použijte **rref** k nalezení inverzní matice k matici A.

12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 Kontrolní otázky

1. Uveďte příklad dvou čtvercových matic A, B, pro které $AB \neq BA$.

2. Uveďte příklad matice A, pro kterou $A = A^T$.

3. Uveďte příklad matice A, pro kterou $A = A^*$.

4. Existuje reálná matice, jejíž řádková a sloupcová hodnost se liší?

5. Jaký je vztah mezi řádkovou hodností matice a řádkovou hodností jejího redukovaného schodovitého tvaru?

6. Matice A řádu n má inverzní matici A^{-1}. Vyjádřete hodnost matice A^{-1} pomocí hodnosti matice A.

2 Determinanty

Obsahem této kapitoly je důležitá charakteristika čtvercových matic, nazývaná determinant.

Nechť $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Libovolná n-tice $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ tvořená čísly $i_k \in \mathbb{N}_n$, v níž se žádná dvě čísla neopakují (a tedy se každé z $\mathbb{N}_n$ vyskytuje, a to právě jednou) se nazývá **permutace množiny** $\mathbb{N}_n$. Není těžké odvodit, že těchto permutací je celkem $n!$ (pokuste se o to jako cvičení!). Je-li $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ permutace množiny $\mathbb{N}_n$, říkáme, že σ má **inverzi** (i_r, i_s), pokud $r < s$ a $i_r > i_s$. Inverze dané permutace je tedy každá dvojice čísel, které se v permutaci vyskytují, přičemž jejich vzájemné pořadí se v permutaci neshoduje s jejich přirozeným uspořádáním podle velikosti (tj. je právě opačné).

Příklad 2.1 Množina $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ má celkem $3! = 6$ permutací. Permutace $(1, 2, 3)$ nemá inverzi, permutace $(3, 1, 2)$ má dvě inverze $(3, 1)$ a $(3, 2)$, permutace $(2, 3, 1)$ má dvě inverze $(2, 1)$ a $(3, 1)$, permutace $(3, 2, 1)$ má tři inverze $(3, 1)$, $(3, 2)$ a $(2, 1)$, permutace $(2, 1, 3)$ má jednu inverzi $(2, 1)$ a permutace $(1, 3, 2)$ má jedinou inverzi $(3, 2)$. □

Počet inverzí dané permutace $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ se nazývá **parita** permutace σ a značí se $\pi(\sigma)$. Permutace σ se nazývá **lichá** (resp. **sudá**), je-li $\pi(\sigma)$ liché (resp. sudé) číslo. Lze ukázat, že změníme-li v permutaci pořadí dvou sousedních prvků, parita permutace se změní o ± 1.

Příklad 2.2 Platí $\pi(1, 2, 3) = 0$, $\pi(3, 1, 2) = 2$, $\pi(2, 3, 1) = 2$, $\pi(3, 2, 1) = 3$, $\pi(2, 1, 3) = 1$ a $\pi(1, 3, 2) = 1$. Tedy permutace $(1, 2, 3)$, $(3, 1, 2)$ a $(2, 3, 1)$ jsou sudé, kdežto permutace $(3, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$ a $(1, 3, 2)$ jsou liché. □

Nechť A je matice řádu n. **Determinantem** matice $A = (a_{ij})$ nazýváme číslo

$$\det A = |A| = \sum (-1)^{\pi(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \tag{2.1}$$

kde se sčítá přes všechny permutace $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ množiny $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Příklad 2.3 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Existují dvě permutace množiny $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$, a to $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Pak

$$\det A = (-1)^{\pi(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\pi(2,1)} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

□

Poznamenejme, že tomuto způsobu výpočtu determinantu matice řádu 2 se říká **křížové pravidlo**, a to proto, že spojnice prvků, které se v matici navzájem násobí vytvoří tvar kříže. Existuje rovněž podobná, avšak o něco složitější pomůcka pro výpočet determinantu řádu 3, zvaná **Sarrusovo pravidlo**, které uvádíme v následujícím příkladě.

Příklad 2.4 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

S použitím Příkladu 2.2 můžeme psát

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

V čem spočívá Sarrusovo pravidlo? Člen $+a_{11}a_{22}a_{33}$ je součinem prvků v hlavní diagonále. Další dva členy, $+a_{12}a_{23}a_{31}$ a $+a_{13}a_{21}a_{32}$, jsou tvořeny součinem prvků, které tvoří v matici dva trojúhelníky, jejichž základna (tj. jedna ze stran) je rovnoběžná s hlavní diagonálou. Před těmito třemi členy stojí vždy kladné znaménko v rozvoji determinantu. Zbývající tři členy rozvoje jsou se záporným znaménkem. Snadno je odvodíme jako součin prvků v druhé, tzv. vedlejší diagonále (člen $-a_{13}a_{22}a_{31}$) a součiny prvků, ležících ve vrcholech trojúhelníků se základnou rovnoběžnou s vedlejší diagonálou (členy $-a_{12}a_{21}a_{33}$ a $-a_{11}a_{23}a_{32}$).

□

Použijme obě pravidla na konkrétních číselných maticích.

Příklad 2.5 Nejdříve křížové pravidlo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$$

Nyní si vyzkoušejme Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 2 + 6 + 18 - 9 - 3 - 8 = 2 + 6 + 18 - 9 - 3 - 8 = 6.$$

□

Poznamenejme, že pro výpočet determinantů vyšších řádů neexistuje přiměřeně jednoduchá pomůcka, podobná křížovému nebo Sarrusovu pravidlu. Následující věta shrnuje některé vlastnosti determinantů.

Věta 2.1 *Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n. Pak platí:*

(i) $\det A = \det A^T$.

(ii) *Nechť B vznikne z A vzájemnou výměnou dvou (od sebe různých) řádků. Pak*

$$\det B = -\det A.$$

(iii) *Nechť B vznikne z A násobením jednoho řádku konstantou c. Pak*

$$\det B = c \det A.$$

(iv) *Nechť B vznikne z A přičtením násobku r-tého řádku k s-tému řádku pro $r \neq s$. Pak*

$$\det B = \det A.$$

Důkaz předchozí věty vyplývá přímo z definice determinantu a faktu, že z každého sloupce a z každého řádku matice obsahuje term $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ právě jeden prvek. Podrobnosti důkazu vynecháváme. Podotkněme, že analogické tvrzení platí i pro sloupcové úpravy. Dále si můžeme všimnout, že pokud je matice A **horní** (resp. **dolní**) **trojúhelníkovitá**, tedy matice, která má pod (resp. nad) hlavní diagonálou samé nuly, platí

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Je tomu tak proto, že ostatní členy rozvoje determinantu obsahují v součinu nulový prvek. Horní trojúhelníkovitá matice je zároveň zvláštním případem matice ve schodovitém tvaru.

Příklad 2.6 Matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je horní trojúhelníkovitá matice. Platí

$$\det A = 3 \cdot (-2) \cdot 2 = -12.$$

□

Příklad 2.7 Matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je dolní trojúhelníkovitá matice. Platí

$$\det A = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6.$$

□

Věta 2.1 umožňuje počítat efektivně determinanty vyšších řádů pomocí Gaussovy eliminace. Během elementárních řádkových úprav se hodnota determinantu jistým, známým a definovaným způsobem mění, takže když tuto změnu adekvátně započteme, můžeme determinant původní matice odvodit z jejího schodovitého tvaru. Budeme to ilustrovat na následujícím příkladě.

Příklad 2.8 Platí

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-\frac{3}{2}) = -120.$$

□

Věta 2.2 *Čtvercová matice A řádu n je regulární, právě když* $\det A \neq 0$.

Důkaz. Je-li $B = (b_{ij})$ schodovitý tvar matice A, z Věty 2.1 plyne

$$\det A = c \cdot \det B,$$

kde $c \neq 0$ je vhodná konstanta. Avšak B je zároveň horní trojúhelníkovitá matice s diagonálními prvky b_{11}, b_{22}, …, b_{nn}, a tedy

$$\det A = c \cdot b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{nn}.$$

Je-li $\det A = 0$, existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $b_{ii} = 0$. Z vlastností matice ve schodovitém tvaru plyne také

$$b_{i+1,i+1} = b_{i+2,i+2} = \dots = b_{nn} = 0.$$

Tedy B má nulový poslední řádek, takže $h(A) = h(B) < n$. Pak ovšem A není regulární.

Naopak, pokud $\det A \neq 0$, jsou všechny diagonální prvky matice B nenulové, takže $h(A) = h(B) = n$. Tedy matice A je regulární.

□

Než přistoupíme k dalšímu výkladu, musíme provést některá označení. Označme

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{je-li } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ sudá permutace množiny } \mathbb{N}_n, \\ -1, & \text{je-li } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ lichá permutace množiny } \mathbb{N}_n, \\ 0, & \text{není-li } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ permutace množiny } \mathbb{N}_n. \end{cases}$$

Dále označme $\vec{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ pro libovolnou n-tici prvků $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_n$ (tedy ne nutně permutaci) a nazvěme tuto n-tici **multiindexem**. Definiční vztah (7) determinantu matice $A = (a_{ij})$ můžeme pak přepsat do tvaru

$$\det A = \sum_{\vec{i}} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}, \tag{2.2}$$

přičemž narozdíl od (7) sčítáme přes všechny hodnoty multiindexu $\vec{i}$, tedy nejen přes permutace.

Term $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ se nazývá **Levi-Civitův** (zobecněný) **symbol** a jeho použití je poměrně časté např. v teoretické fyzice. Důležitou a praktickou pomůckou ve vyjadřování vztahů mezi maticemi je také tzv. **Kroneckerovo delta**, dané vztahem

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Platí tedy například

$$I_n = \delta_{ij}.$$

Věta 2.3 *Pro čtvercové matice A, B řádu n platí* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Důkaz. Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ a $C = (c_{ij}) = AB$. Platí

$$\begin{aligned}
\det A \cdot \det B = \Big(\sum_{\vec{i}} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}\Big)\Big(\sum_{\vec{j}} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{nj_n}\Big) = \\
= \sum_{\vec{i}} \Big(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} \big(\sum_{\vec{j}} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{nj_n}\big)\Big) = \\
= \sum_{\vec{i}} \Big(\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \big(\sum_{\vec{j}} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \ldots b_{i_n j_n}\big)\Big) = \\
= \sum_{\vec{i}} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} \Big(\sum_{\vec{j}} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \ldots b_{i_n j_n}\Big) = \\
= \sum_{\vec{j}} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} \sum_{\vec{i}} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \ldots b_{i_n j_n} = \\
= \sum_{\vec{j}} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} \Big(\sum_{i_1} a_{1i_1} b_{i_1 j_1}\Big) \cdot \Big(\sum_{i_2} a_{2i_2} b_{i_2 j_n}\Big) \cdot \cdots \cdot \Big(\sum_{i_n} a_{1i_n} b_{i_n j_n}\Big) = \\
= \sum_{\vec{j}} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} c_{1j_1} c_{2j_2} \ldots c_{nj_n} = \det C = \det(AB).
\end{aligned}$$

$\square$

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Buď M_{ij} podmatice matice A typu $(n-1)\times(n-1)$ vzniklá odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce. Determinant $\det M_{ij}$ se nazývá **minor** nebo také **poddeterminant** příslušný prvku a_{ij} v matici A. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$ se nazývá **kofaktor** nebo-li **algebraický doplněk** prvku a_{ij} v matici A.

Věta 2.4 *Pro čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n platí:*

(i) $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

(ii) $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$

Rovnost (i) se nazývá **Laplaceovým rozvojem** determinantu matice A **podle i-tého řádku**, (ii) se nazývá **Laplaceovým rozvojem** determinantu matice A **podle j-tého sloupce**.

Důkaz. Odvodíme vztah pro rozvoj $\det A$ podle prvního řádku, ostatní rozvoje jsou analogické. Platí

$$\det A = \sum_{\vec{i}} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} = \sum_{i_1} a_{1i_1}\Big(\sum_{i_2}\cdots$$
$$\cdots\sum_{i_n}\varepsilon_{i_1 i_2\ldots i_n} a_{2i_2}a_{3i_3}\ldots a_{ni_n}\Big) = \sum_{i_1} a_{1i_1}\Big((-1)^{i_1+1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n}\varepsilon_{i_2 i_3\ldots i_n} a_{2i_2}a_{3i_3}\ldots a_{ni_n}\Big) =$$
$$= \sum_{i_1} a_{1i_1}(-1)^{i_1+1}M_{1i_1} = \sum_{i_1} a_{1i_1}A_{1i_1}.$$

□

Příklad 2.9 Abychom spočítali determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

Použijeme Laplaceova rozvoje podle třetího řádku. Tento postup je výhodný zejména proto, že třetí řádek matice A obsahuje několik nul, takže odpovídající členy rozvoje budou nulové a nemusíme je počítat. Tedy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}\cdot(-3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(6+(-16)+0-$$
$$-0-(-12)-(-18)) + 3\cdot(-4+0+4-(-12)-0-16) = 3\cdot 20 + 3\cdot(-4) =$$
$$= 60 - 12 = 48.$$

□

Pochopitelně, v předchozím příkladě jsme mohli dva vzniklé determinanty řádu 3 rozvinout v determinanty řádu 2 opět pomocí Laplaceova rozvoje, ovšem praktičtější bylo použití Sarrusova pravidla. Obecně můžeme říci, že výpočet determinantu Laplaceovým rozvojem bývá výhodný pro matice řádu nejvýše 4 až 5, pak náročnost výpočtu rychle narůstá. Pouze pro matice, které obsahují velké množství nulových položek (tzv. řídké matice) může být Laplaceův rozvoj výhodný i v případě vyššího řádu. Pro tzv. „ruční" výpočet, tj. bez použití výpočetní techniky, bývá nejefektivnější kombinovat více způsobů, např. pomocí Gaussovy eliminace získat matici, která obsahuje větší množství nul a pak tuto matici rozvinout podle řádků či sloupců s mnoha nulovými položkami.

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Pak matici

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí **adjungovanou** k matici A. Matice adjungovaná vznikne tedy z původní matice tak, že nahradíme každý prvek jeho algebraickým doplňkem v této matici, a pak vzniklou matici z algebraických doplňků transponujeme.

Adjungovaná matice má řadu důležitých a zajímavých vlastností, z nichž jednu uvádí následující věta.

Věta 2.5 *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak platí*

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\det A) \cdot I_n$$

Důkaz. Nechť $A = (a_{ij})$. Podle Věty (2.4) platí

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix} = \det A.$$

Podobně, je-li $B = (b_{ij})$ matice, která vznikne z A tak, že i-tý řádek v A nahradíme j-tým pro $i \neq j$ (a j-tý ponecháme, nenahrazujeme ho ničím), dostaneme analogicky

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{in} \end{pmatrix} = \det B.$$

Protože však B má dva stejné řádky, a to j-tý řádek na svém původním místě a také na místě, kde dříve byl i-tý řádek, je $\det B = 0$. Pak ovšem platí

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} = \delta_{ij} \cdot \det A.$$

□

Z předchozí věty ihned plyne, jak pomocí adjungované matice spočítat matici inverzní, pokud ovšem je původní matice regulární. Regularita matice A znamená, podle Věty 2.2, že $\det A \neq 0$ a proto

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}.$$

Příklad 2.10 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pak

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28.$$

Potom

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 2.11 Uvažujme matici A z Příkladu 2.10. Pak platí

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{pmatrix} =$$
$$= -94 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -94 \cdot I_3.$$

Přitom

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -54 + 0 + (-4) - 6 - 0 - 30 = -94.$$

Platí tedy

$$A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A) \cdot I_3.$$

□

Příklad 2.12 Vezměme opět matici A z Příkladu 2.10 a Příkladu 2.11. Potom platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{pmatrix}.$$

□

Následující větě se říká **Cramerovo pravidlo**.

Věta 2.6 *Nechť $A\bar{x} = \bar{b}$ je soustava lineárních rovnic, $A = (a_{ij})$ regulární matice řádu n. Pak pro $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

kde A_j je matice, která vznikne nahrazením j-tého sloupce matice A sloupcem pravých stran $\bar{b}$.

Důkaz. Podle Věty 2.4 je

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Protože matice A_j má, kromě j-tého sloupce, stejné prvky jako A, je také

$$\det A_j = A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n.$$

Podle Věty 2.5 je
$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A},$$
takže
$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)\bar{b}.$$
Potom platí
$$x_j = \frac{1}{\det A}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n) = \frac{\det A_j}{\det A}.$$
□

Příklad 2.13 Uvažujme soustavu lineárních rovnic
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3. \end{array}$$
Matice této soustavy je
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
a sloupec pravých stran je
$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
Pak
$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$
tedy matice A je regulární a lze proto k řešení soustavy použít Větu 2.6 (tj. Cramerovo pravidlo). Platí tedy
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2;$$
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3;$$
$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

□

2.1 Klíčové myšlenky kapitoly

- K výpočtu determinantu řádu 2 slouží křížové pravidlo.
- K výpočtu determinantu řádu 3 slouží Sarrusovo pravidlo.
- Elementární řádkové úpravy mohou měnit hodnotu determinantu, avšak známým, přesně definovaným způsobem, čehož při výpočtu využíváme.
- Determinanty vyšších řádů převádíme na nižší (např. Laplaceovým rozvojem), nebo na determinanty matic, u nichž je výpočet snazší (např. horní trojúhelníkovitá či diagonální matice).
- Principu Laplaceova rozvoje je využito i při výpočtu inverzní matice pomocí matice adjungované.

2.2 Cvičení N

1. K matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ spočítejte všechny kofaktory (algebraické doplňky) jejích prvků.

$\Big[$ Výsledek: $A_{11} = -11$, $A_{12} = 29$, $A_{13} = 1$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 7$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -10$, $A_{33} = 1$. $\Big]$. □

2. Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Big[$ Výsledek: $\det A = -43$ $\Big]$. □

3. Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Big[$ Výsledek: $\det A = 75$ $\Big]$. □

4. Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\Big[$ Výsledek: $\det A = 5$ $\Big]$. □

5. Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$\left[\text{ Výsledek: } \det A = 0 \right]$. □

6. Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\left[\text{ Výsledek: } \det A = 36 \right]$. □

7. K matici $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ spočítejte $\operatorname{adj} A$.

$\left[\text{ Výsledek: } \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 24 & -42 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -4 & 32 & 30 \end{pmatrix} \right]$. □

8. Metodou adjungované matice spočítejte k matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matici inverzní.

$\left[\text{ Výsledek: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]$. □

9. Metodou adjungované matice spočítejte k matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ matici inverzní.

$\left[\text{ Výsledek: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \right]$. □

10. Metodou adjungované matice spočítejte k matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matici inverzní.

$\left[\text{ Výsledek: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \right]$. □

11. Řešte s pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -5 \end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $\Big]$. $\square$

12. Řešte s pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$\Big[$ Výsledek: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ $\Big]$. $\square$

2.3 Cvičení M

V následujících úlohách použijte procedury **cofactor** systému Matlab k výpočtu determinantu matice A Laplaceovým rozvojem:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Pomocí procedury **adjoint** systému Matlab spočítejte k matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ matici inverzní.

2.4 Kontrolní otázky

1. Uveďte přesnou definici determinantu.

2. Zdůvodněte elementárním způsobem, proč determinant matice s aspoň dvěma stejnými řádky je nulový.

3. Na základě svých zkušeností porovnejte výpočetní náročnost různých metod výpočtu determinantu a inverzní matice.

4. Matice A má inverzní matici A^{-1}. Vyjádřete $\det A^{-1}$ pomocí $\det A$.

3 Vektorové prostory

V této kapitole dáme našim dosavadním poznatkům o maticích hlubší teoretický základ. Budeme se zabývat matematickou strukturou, která leží v pozadí většiny aplikací maticového počtu. Strukturou, jejíž vlastnosti umožňují, aby se lineární vztahy chovaly tak, jak očekáváme a aby použití maticového počtu bylo smysluplné.

Buď G množina, $\diamond$ operace na G, splňující podmínky:

(i) Pro každé $a, b \in G$ je $a \diamond b \in G$.

(ii) Pro všechna $a, b, c \in G$ je $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$.

(iii) Existuje $e \in G$, že pro každé $a \in G$ je $e \diamond a = a = a \diamond e$.

(iv) Pro každé $a \in G$ existuje $b \in G$, že $a \diamond b = e = b \diamond a$.

Pak se uspořádaná dvojice $(G, \diamond)$ nazývá **grupa**. Množina G se nazývá nosnou množinou této grupy, a v méně přesných úvahách se s ní ztotožňuje. Prvek e se nazývá **jednotkovým prvkem** nebo někdy také **neutrálním prvkem** grupy $(G, \diamond)$ podle toho, zda na operaci $\diamond$ pohlížíme více jako na zobecněné násobení nebo sčítání čísel. V jednom případě hovoříme o **multiplikativní**, ve druhém případě o **aditivní** symbolice. Prvek b z podmínky (iv) se nazývá **inverzní** (v případě multiplikativního názvosloví) nebo **opačný** (v případě aditivního názvosloví) k prvku a.

Grupa $(G, \diamond)$ se nazývá **komutativní** nebo také **abelovská**, platí-li navíc také pátá podmínka:

(v) Pro každé $a, b \in G$ je $a \diamond b = b \diamond a$.

Příklad 3.1 Některé příklady grup: $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$; $(\mathbb{Z}, +)$; tzv. **triviální grupa** $(\{e\}, \diamond)$, jejíž nosná množina má jediný prvek, takže grupovou operaci lze definovat jediným možným způsobem; $(S_n, \circ)$, kde S_n je množina všech permutací n-prvkové množiny $\mathbb{N}_n$ a $\circ$ je operace skládání zobrazení; množina všech reálných matic typu $m \times n$ s operací sčítání, množina všech regulárních čtvercových matic řádu n s operací násobení a další. $\square$

Buď $(V, \oplus)$ komutativní grupa a nechť ke každému $\gamma \in \mathbb{R}$ a $w \in V$ existuje prvek $\gamma \odot w \in V$ tak, že pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$ platí

(i) $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$,

(ii) $(\alpha + \beta)\odot = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$,

(iii) $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \cdot \beta) \odot u$,

(iv) $1 \odot u = u$.

Pak se uspořádaná trojice $(V, \oplus, \odot)$ nazývá **vektorový prostor nad tělesem reálných čísel** $\mathbb{R}$. Zaměníme-li množinu $\mathbb{R}$ množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$, dostáváme analogickou definici **vektorového prostoru nad tělesem komplexních čísel**. Prvky množiny V se nazývají **vektory**. Neutrální prvek grupy $(V, \oplus)$ se nazývá **nulový vektor**. Nulový vektor obvykle značíme o nebo také $\vec{0}$. Opačný prvek k vektoru $v \in V$ značíme $-v$ a nazýváme jej **opačný vektor**. Prvky číselného tělesa, nad nímž je daný vektorový prostor zkonstruován, se nazývají **skaláry**. Zdůrazňujeme, že operace $\oplus : V \times V \to V$, $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ jsou úplně jiné operace, než $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Operace $\oplus$ má totiž na vstupu dva vektory, jimž přiřazuje vektor třetí, zatímco $+$ vytváří ze dvou reálných čísel jisté reálné číslo. Podobně, na vstupu operace $\odot$ je reálné číslo a vektor, výstupem je vektor. Naopak, $\cdot$ vytváří ze dvou reálných čísel opět jisté reálné číslo. Pokud však nemůže dojít k omylu a z kontextu je zřejmé, které operace aktuálně používáme, právě kvůli platnosti předchozí věty si můžeme dovolit značit oba typy operací stejnými znaménky (a často tak opravdu, pouze kvůli našemu pohodlí, činíme). Pokud jde o prioritu operací $\oplus$ a $\odot$, držíme se obvyklých zvyklostí pro násobení a sčítání, v případě nejasností raději používáme závorky.

Příklad 3.2 Některé příklady vektorových prostorů: pro libovolné $n = 1, 2, \dots$ je $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ i nad $\mathbb{R}$. Množina matic typu $m \times n$ s operací sčítání matic a operací násobení matice komplexním nebo reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, případně nad $\mathbb{R}$. Množina $(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ všech polynomů (mnohočlenů) stupně n v proměnné x nad $\mathbb{R}$ s operací sčítání polynomů a násobení reálným číslem nebo množina $(\mathcal{C}_{\langle a,b \rangle}, +, \cdot)$ spojitých funkcí na daném reálném intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ s operací sčítání funkcí a násobení funkcí reálným číslem jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. □

Můžeme tedy shrnout, že vektory mohou být dosti abstraktní objekty, prvky určité množiny, na níž jsou definovány vhodné operace a nemusí to tedy být pouze uspořádané n-tice reálných nebo komplexních čísel. Později uvidíme, že přesto mohou být některé abstraktní vektory jako n-tice reálných nebo komplexních čísel reprezentovány.

Věta 3.1 *Nechť* $(V, \oplus, \odot)$ *je vektorový prostor. Pak platí:*

(i) $0 \odot u = o$ *pro každý vektor* $u \in V$*;*

(ii) $\alpha \odot o = o$ *pro každý skalár* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iii) *jestliže* $\alpha \odot u = o$*, pak buď* $\alpha = 0$ *nebo* $u = o$*;*

(iv) $(-1) \odot u = -u$ *pro každý vektor* $u \in V$*.*

Důkaz. Ukážeme nejprve (i). Platí $o = 0 \odot u \oplus (-0 \odot u) = (0 + 0) \odot u \oplus (-0 \odot u) = 0 \odot u \oplus 0 \odot u \oplus (-0 \odot u) = 0 \odot u \oplus o = 0 \odot u$.

Dokažme (ii). Pokud $\alpha = 0$, není již co dokazovat, stačí použít (i). Nechť tedy $\alpha \neq 0$. Platí $\alpha \odot o = \alpha \odot o \oplus o = \alpha \odot o \oplus 1 \odot o = \alpha \odot o \oplus (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}) \odot o = \alpha \odot o \oplus \alpha \odot (\frac{1}{\alpha} \odot o) = \alpha \odot (o \oplus \frac{1}{\alpha} \odot o) = \alpha \odot (\frac{1}{\alpha} \odot o) = (\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}) \odot o = 1 \odot o = o$.

Dokážeme (iii). Nechť $\alpha \odot u = o$ a $\alpha \neq 0$. Pak $u = 1 \odot u = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \odot u = \frac{1}{\alpha} \odot (\alpha \odot u) = \frac{1}{\alpha} \odot o = o$ podle (ii).

Nakonec dokažme (iv). Platí $u \oplus (-1) \odot u = 1 \odot u \oplus (-1) \odot u = (1-1) \odot u = 0 \odot u = o$ podle (i). Pak $-u = -u \oplus o = -u \oplus u \oplus (-1) \odot u = o \oplus (-1) \odot u = (-1) \odot u$. □

Nechť $(V, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor, $W \subseteq V$ podmnožina množiny V. Je-li možné zúžit definiční obor operací $\oplus$, $\odot$ tak, že (s těmito zúženými operacemi) je $(W, \oplus, \odot)$ opět vektorový prostor, nazývá se $(W, \oplus, \odot)$ vektorovým **podprostorem** prostoru $(V, \oplus, \odot)$.

Příklad 3.3 Je-li $(V, \oplus, \odot)$ vektorový prostor, pak $(\{o\}, \oplus, \odot)$ je (tzv. **triviální**) vektorový podprostor prostoru $(V, \oplus, \odot)$. Operace $\oplus$ a $\odot$ zde fungují takto:

$$o \oplus o = o,$$

$$\alpha \odot o = o,$$

pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Dále, prostor $(V, \oplus, \odot)$ je sám svým podprostorem. □

Příklad 3.4 Uvažujme množiny $\mathcal{P}_2(x) = \{ax^2+bx+c | \, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{P}_1(x) = \{px+q| \, p, q \in \mathbb{R}\}$, a $\mathcal{P}_0(x) = \{r | r \in \mathbb{R}\}$. Všechny tyto tři množiny uvažujeme s přirozeným způsobem definovaným sčítáním funkcí a násobení funkce reálným číslem. Pak $\mathcal{P}_2(x)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{P}_1(x)$, $\mathcal{P}_0(x)$ jsou jeho podprostory. Kromě toho, $\mathcal{P}_0(x)$ je vektorový podprostor prostoru $\mathcal{P}_1(x)$. □

Příklad 3.5 Uvažujme $\mathbb{R}^2$ s obvyklým sčítáním dvojic reálných čísel po složkách a násobením dvojice reálným číslem tak, že se vynásobí každá složka. Pak $\mathbb{R}^2$ je vektorový prostor. Libovolná přímka, procházející počátkem je vektorovým podprostorem (podpořte důkazem), avšak přímky, které počátkem neprochází, vektorovým podprostorem v $\mathbb{R}^2$ být nemohou. Důvod je prostý – neobsahují nulový vektor. Podobně není vektorovým podprostorem v $\mathbb{R}^2$ žádná kružnice (i taková, která počátkem prochází), ani například množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zdůvodněte.

□

Věta 3.2 *Buď $(V, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor, neprázdná $W \subseteq V$ množina. Pak $(W, \oplus, \odot)$ je vektorovým podprostorem prostoru $(V, \oplus, \odot)$, právě když platí následující podmínky:*

(i) *Pro každé $u, v \in W$ je $u \oplus v \in W$.*

(ii) *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $u \in W$ je $\alpha \odot W$.*

Důkaz. Je-li $(W, \oplus, \odot)$ vektorový podprostor $(V, \oplus, \odot)$, především je vektorovým prostorem a jako takový musí splňovat (i) i (ii) přesně podle definice.

Naopak, nechť $(W, \oplus, \odot)$ splňuje obě podmínky (i) a (ii). Ukážeme nejdříve, že $(V, \oplus)$ je komutativní grupa. Podle (i) je operace $\oplus$ uzavřená na V. Dále, asociativní i komutativní zákony jsou na množině W splněny, protože jsou splněny i na větší množině V. Musíme pouze dokázat, že W obsahuje nulový vektor, tj. neutrální prvek ve struktuře $(W, \oplus)$ a že všechny vektory z W mají ve W i k sobě opačné prvky. Podle předpokladu, $W \neq \emptyset$ a tedy existuje $w \in W$. Pak ovšem, podle (ii), je $o = 0 \odot w \in W$. Podobně, je-li $v \in W$, podle (ii) také $-v = (-1) \odot v \in W$. Tedy $(W, \oplus)$ je komutativní grupa. Zbývající axiómy jsou na W splněny, protože platí ve větší množině. $\square$

Příklad 3.6 Množina všech řešení soustavy reálných lineárních homogenních rovnic o n reálných neznámých je vektorový podprostor prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Vskutku, když $\bar{y}$, $\bar{z}$ jsou dvě řešení soustavy

$$A\bar{x} = \mathbf{0},$$

platí také

$$A(\bar{y} + \bar{z}) = \mathbf{0} \quad \text{a} \quad A(\alpha\bar{y})$$

pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Podle Věty 3.2 je množina všech řešení dané soustavy vektorový podprostor. $\square$

Někdy je užitečná i modifikovaná varianta předchozí věty.

Věta 3.3 *Nechť $(V, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor, $W \subseteq V$ neprázdná množina. Pak $(W, \oplus, \odot)$ je vektorovým podprostorem prostoru $(V, \oplus, \odot)$, právě když pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) a každé $u, v \in W$ platí*

$$(\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot v) \in W. \tag{3.1}$$

Důkaz. Je-li $(W, \oplus, \odot)$ vektorový prostor, musí být operace $\oplus$ a $\odot$ uzavřené na W, takže (3.1) musí platit. Naopak, když (3.1) platí, volbou $\alpha = \beta = 1$ dostaneme podmínku (i) a volbou $\beta = 0$ podmínku (ii) z předchozí věty. $\square$

3.1 Báze a dimenze

Nechť V je vektorový prostor. Vektory $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ se nazývají **lineárně nezávislé**, jestliže pro každé reálné (resp. komplexní) α_1, α_2, ..., α_k platí

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = o \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Maximální lineárně nezávislý systém vektorů ve V se nazývá **báze**. Později budeme schopni dokázat, že pokud v daném vektorovém prostoru V existuje báze s n prvky, pak i všechny ostatní báze ve V mají n prvků. Takový vektorový prostor se nazývá **konečně rozměrný** nebo-li **konečně dimenzionální** a počet prvků jeho báze se nazývá **dimenze**. Chceme-li explicitně vyjádřit dimenzi tohoto prostoru, hovoříme o n-**rozměrném** nebo-li n-**dimenzionálním** prostoru a píšeme

$$\dim V = n.$$

Pokud nějaký vektorový prostor nemá konečnou bázi, říkáme, že je **nekonečně rozměrný** nebo-li **nekonečně dimenzionální**.

Příklad 3.7 Vektorový prostor $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ má například bázi tvořenou vektory $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, ale také i jinou bázi, tvořenou například vektory $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,2,4)$, $f_3 = (1,3,9)$. Platí $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

$\square$

Příklad 3.8 Vektorový prostor $(\mathcal{C}_{\langle 0,1\rangle}, +, \cdot)$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nemá žádnou konečnou bázi. Prostor $(\mathcal{C}_{\langle 0,1\rangle}, +, \cdot)$ je nekonečně rozměrný. $\square$

Až na výjimky budeme v tomto textu pracovat vždy s konečně rozměrnými vektorovými prostory.

Věta 3.4 *Buď $(V, +, \cdot)$ konečně rozměrný vektorový prostor. Pak libovolný vektor ve V lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci (libovolné) báze ve V.*

Důkaz. Nechť $\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}$ je báze ve V, $x \in V$ vektor. Z definice báze plyne, že systém $\{x, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je lineárně závislý a tedy existují konstanty γ, α_1, α_2, ..., α_n takové, že

$$\gamma x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = o,$$

přičemž

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak ovšem $\gamma \neq 0$, neboť systém $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je lineárně nezávislý. Odtud plyne

$$x = -\frac{\alpha_1}{\gamma}e_1 - \frac{\alpha_2}{\gamma}e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\gamma}e_n.$$

Nechť

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n$$

jsou dvě vyjádření vektoru x v bázi $\underline{e}$. Pak

$$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \dots + (x_n - y_n)e_n = o.$$

Z lineární nezávislosti systému vektorů $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ plyne

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \dots = x_n - y_n = 0.$$

$\square$

Pokud z vlastností báze vypustíme požadavek lineární nezávislosti vektorů, získáme další užitečný, poněkud obecnější pojem. Nechť $S \subseteq V$ a nechť každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit ve tvaru

$$v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_mu_m,$$

kde $u_1, u_2, \dots, u_m \in S$. Pak S nazýváme **systémem generátorů** prostoru V a píšeme

$$V = \langle S \rangle .$$

Je zřejmé, že každá báze je systémem generátorů, opak však obecně neplatí. Přidáme-li k libovolné bázi další vektor, schopnost generovat všechny vektory daného vektorového prostoru nezmizí, avšak lineární nezávislost ano. Takový systém už nebude bází, zůstane však systémem generátorů daného prostoru.

Poněkud obecněji, je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor a $S \subseteq V$, pak množina $\langle S \rangle$ všech lineárních kombinací vektorů z množiny S je podle Věty 3.2 vždy vektorovým prostorem a podprostorem ve V, a to i tehdy, když ve V existují vektory, které jako lineární kombinace vektorů z S vyjádřit nelze.

Příklad 3.9 Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ tvoří vektory $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 2, 4)$, $f_3 = (1, 3, 9)$, $f_4 = (1, 4, 16)$ systém generátorů, nikoli však bázi.

$\square$

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}$$

jeho báze. Pokud

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n,$$

můžeme také psát maticově

$$x = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{e} \cdot \bar{x}.$$

Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ se nazývají **souřadnice** nebo také **složky** vektoru x v bázi $\underline{e}$.

Příklad 3.10 Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ jsou dány vektory

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ve vektorovém prostoru $L = \langle\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5\}\rangle$ vybereme z vektorů $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{u}_4$, $\bar{u}_5$ lineárně nezávislý systém (tedy bázi v L). Kritériem lineární nezávislosti těchto vektorů je množina všech řešení rovnice

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 + x_5\bar{u}_5 = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Například lineární nezávislost všech pěti vektorů by vedla k jedinému řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. To ovšem není možné, protože v $\mathbb{R}^4$ mohou být nejvýše čtyři nezávislé vektory. V našem případě tedy vybereme nejvýše čtyři, možná však i méně vektorů z $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5\}$. Rovnici (3.2) můžeme přepsat jako soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & = & 0 \end{array} \tag{3.3}$$

a její rozšířenou matici převedeme na redukovaný schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & -9 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní už zbývá jen správně interpretovat výsledek. Nalezený redukovaný schodovitý tvar matice soustavy (3.3) znamená, že v jejím obecném řešení můžeme volit libovolně tři neznámé x_3, x_4, x_5 a dvě zbývající snadno dopočteme z rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 & + & \frac{3}{2}x_5 = 0 \\ & & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 & - & \frac{5}{2}x_5 = 0. \end{array}$$

Volíme-li např. $x_3 = -1$, $x_4 = x_5 = 0$, můžeme z (3.2) zpětně vypočítat, že

$$\bar{u}_3 = x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 = \frac{1}{2}\bar{u}_1 - \frac{1}{2}\bar{u}_2. \tag{3.4}$$

Podobně, jinou vhodnou volbou můžeme také vyjádřit $\bar{u}_4$ nebo $\bar{u}_5$, vždy jako lineární kombinaci vektorů $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$. Odtud již vyplývá, že vektory $\bar{u}_1$ a $\bar{u}_2$ stačí ke generování celého podprostoru L, v němž tvoří bázi. Platí $\dim L = 2$. Pochopitelně, kdybychom změnili pořadí vektorů, uvedený postup povede obecně k jiné bázi prostoru L; tato alternativní báze bude však mít opět dva vektory a dimenze L je samozřejmě na volbě báze nezávislá.

Z rovnice (3.4) můžeme usoudit, že čísla $\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$ jsou složky vektoru $\bar{u}_3$ v bázi

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Maticově můžeme tento fakt přehledně zapsat vztahem

$$\bar{u}_3 = \underline{u} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Způsob zápisu použitý ve vztahu (3.5) má výhodu, že respektuje vlastnosti maticového násobení a po dosazení sloupcových vektorů za bázické vektory přejde vztah (3.5) přímo v maticovou rovnost

$$\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 3.11 Jsou dány vektory

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tyto vektory jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi v $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (ověřte). Můžeme chtít například vyjádřit vektor

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

jako lineární kombinaci vektorů $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ a tedy najít složky vektoru $\bar{b}$ v této bázi. Musíme tedy řešit rovnici

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{b},$$

což po dosazení číselných hodnot dává

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Tedy musíme upravit rozšířenou matici této soustavy na redukovaný schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Pak složky vektoru $\bar{b}$ v bázi $\underline{a} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{pmatrix}$ jsou

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

□

Nechť jsou $\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}$ a $\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \end{pmatrix}$ dvě báze ve V. Pak lze prvky báze $\underline{f}$ vyjádřit pomocí $\underline{e}$, tedy

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & = & t_{11}e_1 & + & t_{21}e_2 & + & \dots & + & t_{n1}e_n \\ f_2 & = & t_{12}e_1 & + & t_{22}e_2 & + & \dots & + & t_{n2}e_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ f_m & = & t_{1m}e_1 & + & t_{2m}e_2 & + & \dots & + & t_{nm}e_n, \end{array}$$

což, psáno maticově je

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nm} \end{pmatrix} = \underline{e} \cdot T, \qquad (3.6)$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nm} \end{pmatrix}$$

je tzv. **matice přechodu** od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$. Podobně můžeme vyjádřit bázi $\underline{e}$ pomocí vektorů báze $\underline{f}$, tedy

$$\underline{e} = \underline{f} \cdot S. \qquad (3.7)$$

Pak ovšem
$$\underline{e} = \underline{e} \cdot TS, \quad \underline{f} = \underline{f} \cdot ST.$$
Z Věty 3.4 vyplývá, že
$$T \cdot S = I_n, \quad S \cdot T = I_m.$$
Na maticové násobení můžeme pohlížet tak, že násobením maticí zprava vytváříme různé lineární kombinace sloupců matice vlevo, nebo, zcela analogicky, že násobením maticí zleva vytváříme lineární kombinace řádků matice vpravo. Hodnost součinu matic tedy nemůže být větší, než hodnost matic, které násobíme, jak ostatně říká již dokázaná Věta 1.11. Protože $h(I_n) = n$, je $h(T) \geq n$, $h(S) \geq n$ a z počtu řádků matice T, resp. sloupců matice S naopak plyne, že $h(T) \leq n$, $h(S) \leq n$. Tedy $h(T) = h(S) = n$. Vyjdeme-li z druhé rovnosti a matice I_m, dostáváme zcela analogicky, že $h(S) = h(T) = m$. Celkově tedy $n = m$ a obě báze mají tedy stejný počet prvků. Zároveň odtud vyplývá, že matice přechodu je vždy čtvercová a regulární. Také odtud plyne, že
$$S = T^{-1}, \quad T = S^{-1}.$$

Nyní se můžeme podívat, jak se změnou báze transformují složky vektoru. Jsou-li $\underline{e}$, $\underline{f}$ dvě báze ve V, mezi nimiž je dán výše uvedený transformační vztah (3.6), resp. (3.7), platí pro vektor $x \in V$
$$x = \underline{e} \cdot \bar{x} = \underline{f} \cdot S \cdot \bar{x} = \underline{f} \cdot \bar{x}' = \underline{e} \cdot T \cdot \bar{x}', \tag{3.8}$$
kde čárkovaně jsou označeny souřadnice vektoru x v bázi $\underline{f}$. Z Věty 3.4 o jednoznačnosti vyjádření vektoru v bázi vyplývají transformační vztahy
$$\bar{x} = T \cdot \bar{x}', \quad \bar{x}' = S \cdot \bar{x}. \tag{3.9}$$

Můžeme si všimnout, že souřadnice se transformují pomocí jiné matice přechodu než k nim odpovídající báze – pro transformaci souřadnic je třeba použít inverzní matici přechodu. Protože literatura není vždy jednotná v označování matic přechodu, je lépe se vždy spoléhat na konkrétní (výše uvedené) transformační vztahy, než na slovní vyjádření, od které báze ke které daná matice přechodu vede. Z kontextu nemusí totiž být vždy stoprocentně jasné, zda se myslí skutečná transformace bází tak, jako uvádíme v tomto textu, nebo jen transformace odpovídajících souřadnic či složek vektorů.

Příklad 3.12 V $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ jsou dány dvě báze $\underline{a}$ a $\underline{b}$ tvořené vektory
$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
a
$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zároveň je dán vektor

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Naším úkolem je vyjádřit vektor $\bar{x}$ pomocí složek v obou bázích a najít obě matice přechodu mezi bázemi.

Pro vyjádření vektoru $\bar{x}$ vyjdeme ze vztahu

$$\bar{x} = \underline{a} \cdot \bar{x}_a = \underline{b} \cdot \bar{x}_b,$$

k němuž sestavíme přímo odpovídající rozšířené matice, které převedeme na redukovaný schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & -9 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Pak

$$\bar{x}_a = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \bar{x}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pro matice přechodu platí vztahy

$$\underline{a} \cdot T = \underline{b} \quad \text{a} \quad \underline{b} \cdot S = \underline{a}.$$

To jsou maticové rovnice, které můžeme řešit opět pomocí rozšířených matic a jejich transformací na redukovaný schodovitý tvar (tj. Gaussovou eliminací), tedy

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Pak platí

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mohli bychom ještě ověřit, že

$$\bar{x}_a = T \cdot \bar{x}_b \quad \text{a} \quad \bar{x}_b = S \cdot \bar{x}_a$$

a
$$T \cdot S = I_3, \quad \text{tj.} \quad S = T^{-1}$$
(proveďte).

Zvolený postup pochopitelně není optimální z hlediska úspornosti výpočtu. Máme-li již například souřadnice vektoru v jedné bázi a příslušnou matici přechodu, souřadnice v druhé bázi již nemusíme počítat pomocí řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminací, ale můžeme je vypočítat pomocí matice přechodu. Podle toho, které veličiny skutečně potřebujeme, můžeme výpočet vhodně kombinovat a přizpůsobit. □

Příklad 3.13 Uvažujme vektorový prostor všech polynomů nejvýše prvního stupně v proměnné t, tedy $(\mathcal{P}_1(t), +, \cdot)$, a polynomy $p_1 = t$, $p_2 = t - 3$, $q_1 = t - 1$ a $q_2 = t + 1$. Našim úkolem bude najít matice přechodu mezi bázemi $\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ a $\underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ v prostoru $(\mathcal{P}_1(t), +, \cdot)$ a najít složky vektoru (tj. polynomu prvního stupně) $w = 5t + 1$ v obou bázích.

Abychom mohli nalézt příslušné složky vektoru nebo matice přechodu, musíme nějak sestavit odpovídající transformační rovnice. Vzhledem k tomu že našimi výchozími objekty nejsou uspořádané n-tice čísel, ale polynomy, nemůžeme polynomy jednoduše zapsat do matic a použít Gaussovu eliminaci. Můžeme však v $(\mathcal{P}_1(t), +, \cdot)$ zvolit pomocnou bázi, vzhledem k níž vyjádříme zadané vektory velmi jednoduše pomocí složek, a pak použijeme osvědčené maticové postupy. Takovou bázi tvoří jednotlivé mocninné funkce, v našem případě 1 a t. Můžeme tedy psát
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Pak, označíme-li $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}$, máme
$$\underline{p} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \underline{q} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$
Zároveň také
$$w = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
Vektor w lze vyjádřit v obou bázích
$$w = \underline{p} \cdot \bar{w}_p = \underline{q} \cdot \bar{w}_q,$$
odkud
$$\underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{w}_p = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

a protože je vyjádření vektoru v bázi jednoznačné, máme

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{w}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

a zcela analogicky dostaneme

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{w}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Podobně, nechť T, S jsou matice přechodu mezi bázemi $\underline{p}$, $\underline{q}$, určené transformačními vztahy

$$\underline{q} = \underline{p} \cdot T \quad \text{a} \quad \underline{p} = \underline{q} \cdot S.$$

Dosazením z (3.10) a využitím jednoznačnosti vyjádření vektoru v bázi dostaneme maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Nyní jsme ve stejné situaci jako v Příkladě 3.12. Existuje více možností, jak a v jakém pořadí rovnice (3.11), (3.12) a (3.13) řešit. Proto uvedeme pouze výsledky:

$$w_p = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad w_q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

□

3.2 Průnik a součet vektorových prostorů

Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor, $L_1, L_2 \subseteq V$ dva podprostory V. Označme

$$L_1 + L_2 = \{x + y |\, x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Množinu $L_1 + L_2$ nazýváme **součtem vektorových prostorů**. Součet $L_1 + L_2$ se nazývá **přímý**, pokud $L_1 \cap L_2 = \{o\}$. V tom případě značíme přímý součet pomocí znaménka $\dot{+}$, tedy píšeme $L_1 \dot{+} L_2$.

Věta 3.5 *Nechť $(V, +, \cdot)$ je konečně rozměrný vektorový prostor, $L_1, L_2 \subseteq V$ jeho dva podprostory. Pak platí*

(i) *$L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$ jsou vektorové podprostory ve V,*

(ii) $\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$.

Důkaz. Část (i) je snadné dokázat. Jsou-li $u, v \in L_1 + L_2$ a α, β reálná nebo komplexní čísla (podle toho nad kterým číselným tělesem jsou uvažované vektorové prostory zkonstruovány), existují $u_1, v_1 \in L_1$ a $u_2, v_2 \in L_2$ tak, že $u = u_1 + u_2$ a $v = v_1 + v_2$. Potom $\alpha u + \beta v = (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2) \in L_1 + L_2$, neboť L_1, L_2 jsou vektorové podprostory a platí Věta 3.3. Podle této věty je pak také $L_1 + L_2$ vektorový podprostor prostoru V.

Podobně, jsou-li $u, v \in L_1 \cap L_2$, pak také $\alpha u + \beta v \in L_1$ a $\alpha u + \beta v \in L_2$ podle Věty 3.3. Pak ovšem $\alpha u + \beta v \in L_1 \cap L_2$, takže opět podle Věty 3.3 je $L_1 \cap L_2$ vektorový podprostor prostoru V.

Dokažme nyní (ii). Nechť $b_1, b_2, \ldots, b_k$ tvoří bázi v $L_1 \cap L_2$. Systém vektorů $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ lze doplnit vektory a_1, a_2, $\ldots$, a_m, resp. vektory c_1, c_2, $\ldots$, c_n na bázi prostoru L_1, resp. prostoru L_2. Pak L_1 má bázi a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_k a L_2 má bázi c_1, c_2, $\ldots$, c_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_k. Odtud plyne, že $\dim(L_1 \cap L_2) = k$, $\dim L_1 = k + m$ a $\dim L_2 = k + n$. Zbývá dokázat, že $\dim(L_1 + L_2) = k + m + n$. Je zřejmé, že vektory a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_k, c_1, c_2, $\ldots$, c_n generují prostor $L_1 + L_2$. Ukážeme, že jsou nezávislé. Nechť

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_n c_n = o. \tag{3.14}$$

Označme

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m.$$

Je zřejmě $u \in L_1$, avšak také z (3.14) vyplývá, že

$$u = -\beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \cdots - \beta_k b_k - \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \cdots - \gamma_n c_n, \tag{3.15}$$

odkud však plyne $u \in L_1 \cap L_2$. Tedy existují koeficienty δ_1, $\delta_2, \ldots$, δ_k takové, že

$$u = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k,$$

odkud

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m - \delta_1 b_1 - \delta_2 b_2 - \cdots - \delta_k b_k = u - u = o.$$

Protože a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_k tvoří bázi v L_1, musí být

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m = 0.$$

Tedy $u = o$ a z rovnice (3.15) dostáváme

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_n c_n = o.$$

Protože b_1, $b_2, \ldots$, b_k, c_1, c_2, $\ldots$, c_n tvoří bázi v L_2, je také

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0.$$

V (3.14) jsou všechny koeficienty nulové, což znamená, že jsou vektory a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_k, c_1, c_2, $\ldots$, c_n lineárně nezávislé. Pak platí

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = k + m + n + k = \dim L_1 + \dim L_2.$$

□

Příklad 3.14 Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ jsou dány vektory

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tyto vektory generují dva podprostory $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, dané vztahem

$$L_1 = \langle\{v_1, v_2\}\rangle, \quad L_2 = \langle\{v_3, v_4, v_5\}\rangle.$$

Naším úkolem je najít báze a dimenze prostorů L_1, L_2, $L_1 + L_2$ a $L_1 \cap L_2$. V případě prostorů L_1, L_2, $L_1 + L_2$ jsou známy jejich generátory, takže nalezení báze je analogické Příkladu 3.10. Platí

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tedy $\dim L_1 = 2$, báze je například $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{pmatrix}$. Dále

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_3 & \bar{v}_4 & \bar{v}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -6 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

takže $\dim L_2 = 3$ a bází je například $\begin{pmatrix} \bar{v}_3 & \bar{v}_4 & \bar{v}_5 \end{pmatrix}$. Nakonec

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & \bar{v}_4 & \bar{v}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že $\dim(L_1 + L_2) = 3$, přičemž jako bázi lze zvolit například $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{pmatrix}$. Z Věty 3.5 vyplývá, že

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 3 - 3 = 2.$$

K nalezení báze ovšem tento jednoduchý výpočet nestačí. Sestavme rovnici

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 = -\alpha_3 \bar{v}_3 - \alpha_4 \bar{v}_4 - \alpha_5 \bar{v}_5, \tag{3.16}$$

která na levé straně vyjadřuje obecný vektor z prostoru L_1 a na pravé straně obecný vektor z prostoru L_2. Tyto vektory si musí být rovny, mají-li představovat prvek, který patří do průniku těchto prostorů. Záporná znaménka na pravé straně nejsou podstatná, ale po převedení všech členů na jednu stranu rovnice se obecný zápis velmi zjednoduší, pokud znaménka budou formálně stejná.

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3 + \alpha_4 \bar{v}_4 + \alpha_5 \bar{v}_5 = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

Rovnice (3.17) je vlastně soustava čtyř homogenních lineárních rovnic, zapsaná ve vektorovém tvaru. Její rozšířenou matici můžeme sestavit ze sloupcových vektorů $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$, $\bar{v}_5$, a upravit na redukovaný schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.18}$$

Z redukovaného schodovitého tvaru vidíme, že obecné řešení rovnice (3.16) resp. (3.17) lze vyjádřit pomocí parametrů α_4, α_5. Pro nás je důležitý ovšem pouze parametr α_3, který potřebujeme k vyjádření obecného vektoru $\bar{x} \in L_1 \cap L_2$ užitím pravé strany rovnice (3.16). Z třetího řádku (3.18) máme rovnici

$$\alpha_3 - 2\alpha_4 + 3\alpha_5 = 0,$$

odkud

$$\alpha_3 = 2\alpha_4 - 3\alpha_5.$$

Pak obecný vektor z $L_1 \cap L_2$ má vyjádření

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -\alpha_3\bar{v}_3 - \alpha_4\bar{v}_4 - \alpha_5\bar{v}_5 = (-2\alpha_4 + 3\alpha_5)\bar{v}_3 - \alpha_4\bar{v}_4 - \alpha_5 v_5 = \\ &= -\alpha_4(\bar{v}_4 + 2\bar{v}_3) - \alpha_5(\bar{v}_5 - 3\bar{v}_3). \end{aligned}$$

Pak například vektory

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi v $L_1 \cap L_2$.

□

3.3 Lineární zobrazení

Nechť $(V, +, \cdot)$ a $(W, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory, $g : V \to W$ zobrazení. Řekneme, že je g **lineární**, jestliže platí:

(i) Pro libovolné $u, v \in V$ platí $g(u + v) = g(u) + g(v)$.

(ii) Pro libovolné $w \in V$ a číslo α (reálné, případně komplexní) platí $g(\alpha \cdot w) = \alpha \cdot g(w)$.

Předpokládejme, že $\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}$ je báze ve V a $\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \end{pmatrix}$ báze ve W. Zvolme libovolný vektor $x \in V$, pak platí

$$x = \underline{e} \cdot \bar{x} = \sum_i x_i e_i,$$

a z vlastností lineárního zobrazení plyne

$$g(x) = g(\sum_i x_i e_i) = \sum_i g(x_i e_i) = \sum_i x_i g(e_i),$$

odkud je vidět, že celé zobrazení $g : V \to W$ je plně určeno svými hodnotami na bázických vektorech. Ovšem pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots n\}$ je $g(e_i) \in W$, takže můžeme pokračovat a vyjádřit vektor $g(e_i)$ jako lineární kombinaci vektorů báze $\underline{f}$. Existují koeficienty g, g, $\dots$, g takové, že

$$g(e_i) = g_{1i} f_1 + g_{2i} f_2 + \dots + g_{mi} f_m = \sum_j g_{ji} f_j,$$

odkud

$$g(x) = \sum_i \sum_j x_i g_{ji} f_j.$$

Položme $G = (g_{ji})$, pak můžeme psát maticově

$$g(x) = \underline{f} \cdot G \cdot \bar{x}.$$

Matice G reprezentuje zobrazení g. Chceme-li složky vektoru $g(x)$ v bázi $\underline{f}$, stačí matici G vynásobit zprava sloupcem $\bar{x}$ složek vektoru x v bázi $\underline{e}$.

Příklad 3.15 Uvažujme vektorový prostor $(\mathcal{P}_2(x), +, \cdot)$ a zobrazení $d : \mathcal{P}_2(x) \to \mathcal{P}_2(x)$ dané vztahem $d(p) = p'$, kde p' je derivace polynomu p podle proměnné x. Z dobře známých vlastností derivace plyne, že d je lineární zobrazení. Nalezneme jeho maticovou reprezentaci v bázi tvořené vektory mocninných funkcí. Klademe tedy

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix},$$

pak pro libovolný polynom $p \in \mathcal{P}_2(x)$ platí

$$p = \underline{e} \cdot \bar{p} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p_1 + p_2 x + p_3 x^2.$$

Pak

$$d(p) = d(p_1 + p_2 x + p_3 x^2) = p_1 d(1) + p_2 d(x) + p_3 d(x^2) = \begin{pmatrix} d(1) & d(x) & d(x^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Máme

$$d(1) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$d(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odkud

$$d(p) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \underline{e} \cdot D \cdot \bar{p}.$$

Matice zobrazení d je v uvažované mocninné bázi

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vezmeme-li na zkoušku nějaký polynom z $\mathcal{P}_2(x)$, například $p = 3x^2 - 2x + 1$, jeho složky v bázi $\underline{e}$ jsou

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a

$$D \cdot \bar{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomuto sloupcovému vektoru skutečně v dané bázi odpovídá derivace polynomu p, která je $d(p) = p' = -2 + 6x$. Na derivování polynomů můžeme nahlížet jako na násobení vhodnou maticí, což může být užitečné zejména když zvolíme nějakou jinou, speciální bázi (složenou z určitých speciálních, např. ortogonálních polynomů). □

Nyní ukážeme, jak se změní maticová reprezentace zobrazení g, pokud změníme báze ve vektorových prostorech V a W. Nechť $\underline{e}'$ a $\underline{f}'$ jsou dvě další báze ve vektorových prostorech V a W a nechť

$$\underline{e}' = \underline{e} \cdot T, \quad \underline{f}' = \underline{f} \cdot S,$$

kde T, S jsou příslušné matice přechodu. Pak platí

$$\bar{x} = T \cdot \bar{x}' \quad \text{a} \quad \underline{f} = \underline{f}' \cdot S^{-1},$$

takže
$$g(x) = \underline{f}\,' \cdot S^{-1}GT \cdot \bar{x}'.$$
V nových bázích je tedy dané zobrazení reprezentováno maticí
$$G' = S^{-1}GT. \tag{3.19}$$

Příklad 3.16 Je dáno zobrazení $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ předpisem
$$l\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 \\ 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$
Naším úkolem je zjistit, zda je zadané zobrazení lineární a pokud ano, najít jeho maticovou reprezentaci ve standardní bázi v $\mathbb{R}^3$.

Platí
$$l\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$
matice zobrazení l je tedy
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Linearita je již triviálním důsledkem toho, že zobrazení l lze takto reprezentovat (pomocí součinu matic).

□

Příklad 3.17 Jak se změní matice zobrazení z Příkladu 3.16, pokud změníme v $\mathbb{R}^3$ původní, standardní bázi na novou bázi (pro vstupní i výstupní hodnoty), tvořenou vektory
$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$
Matice přechodu od standardní báze $\underline{e}$, jejíž sloupce tvoří jednotkovou matici, k bázi $\underline{f}$ je
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{přičemž} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Nová matice zobrazení l tedy, podle vztahu (3.19), je

$$L' = T^{-1}LT = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

□

3.4 Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Nechť $(V, +, \cdot)$ a $(W, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory, $g : V \to W$ lineární zobrazení. Množina $\ker g = \{x | \, x \in V, g(x) = o\}$ se nazývá **jádro** zobrazení g. Dále označme $\operatorname{Im} g = \{g(x) | \, x \in V\}$ **obor hodnot** zobrazení g.

Věta 3.6 *Nechť $(V, +, \cdot)$ a $(W, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory, $g : V \to W$ lineární zobrazení. Pak $\ker g$ je vektorový podprostor prostoru V.*

Důkaz. Nechť $u, v \in \ker g$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$). Pak

$$g(\alpha u + \beta v) = \alpha g(u) + \beta g(v) = \alpha o + \beta o = o,$$

a tedy $\alpha u + \beta v \in \ker g$. Podle Věty 3.3 je $\ker g$ vektorovým podprostorem V. □

Věta 3.7 *Nechť $(V, +, \cdot)$ a $(W, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory, $g : V \to W$ lineární zobrazení. Pak $\operatorname{Im} g$ je vektorový podprostor prostoru W.*

Důkaz. Nechť $u, v \in \operatorname{Im} g$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$). Pak existují vektory $x, y \in V$ takové, že $g(x) = u$ a $g(y) = v$. Potom však platí

$$g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y) = \alpha u + \beta v,$$

takže $\alpha u + \beta v \in \operatorname{Im} g$. Nyní můžeme opět využít Věty 3.3 k dokončení důkazu. □

Věta 3.8 *Nechť $(V, +, \cdot)$ a $(W, +, \cdot)$ jsou konečně rozměrné vektorové prostory, $g : V \to W$ lineární zobrazení. Pak $\dim(\ker g) + \dim(\operatorname{Im} g) = \dim V$.*

Důkaz. Zvolme bázi b_1, b_2,..., b_k v prostoru $\operatorname{Im} g$. Existují vektory a_1, a_2, ..., a_k takové, že $g(a_1) = b_1$, $g(a_2) = b_2$, ..., $g(a_k) = b_k$. Předpokládejme, že pro vhodné koeficienty α_1, α_2, ..., α_k, platí

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = o.$$

Pak ovšem

$$\begin{aligned}\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k &= \alpha_1 g(a_1) + \alpha_2 g(a_2) + \cdots + \alpha_k g(a_k) = \\ &= g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) = g(o) = o.\end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti vektorů b_1, b_2,..., b_k plyne

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

takže i vektory a_1, a_2, ..., a_k jsou lineárně nezávislé. Položme

$$H = \langle \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \rangle .$$

Pak H je vektorový podprostor V a platí $\dim H = k$. Ukážeme, že

$$\ker g \dotplus H = V.$$

Buď $x \in V$ libovolný vektor. Pak $g(x) \in \operatorname{Im} g$ a tedy existují koeficienty β_1, β_2, ..., β_k, že

$$g(x) = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k.$$

Položme

$$y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k$$

a

$$z = x - y.$$

Je zřejmé, že platí

$$x = y + z, \quad \text{a} \quad y \in H.$$

Pak

$$g(z) = g(x) - g(y) = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k - \beta_1 g(a_1) - \beta_2 g(a_2) - \cdots - \beta_k g(a_k) = o.$$

Je tedy vidět, že $z \in \ker g$, odkud plyne

$$x \in \ker g + H.$$

Předpokládejme, že $x \in \ker g \cap H$. Pak existují koeficienty δ_1, δ_2, ..., δ_k takové, že

$$x = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_k a_k,$$

protože $x \in H$, takže také

$$g(x) = \delta_1 g(a_1) + \delta_2 g(a_2) + \cdots + \delta_k g(a_k) = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k = o,$$

protože $x \in \ker g$. Ovšem vektory b_1, b_2,..., b_k jsou lineárně nezávislé a tedy

$$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_k = 0.$$

Potom však $x = o$. Tedy

$$\ker g \cap H = \{o\}$$

a tedy součet $\ker g + H = V$ je přímý. Podle Věty 3.5 pak platí

$$\dim(\ker g + H) + \dim(\ker g \cap H) = \dim(\ker g) + \dim H,$$

odkud

$$\dim V = \dim(\ker g) + \dim(\operatorname{Im} g).$$

□

Příklad 3.18 Jádrem lineárního zobrazení $d : \mathcal{P}_2(x) \to \mathcal{P}_2(x)$ z jsou polynomy konstantní, tedy $\ker d = \mathcal{P}_0(x)$. Oborem hodnot tohoto zobrazení jsou polynomy nejvýše prvního stupně, tedy $\operatorname{Im} d = \mathcal{P}_1(x)$. Platí $\dim(\ker d) = 1$, $\dim(\operatorname{Im} d) = 2$, $\dim \mathcal{P}_2(x) = 3$.

□

Příklad 3.19 Uvažujme zobrazení $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané vztahem

$$l(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Naším úkolem je najít báze v prostorech $\ker l$ a $\operatorname{Im} l$.

V prvním případě prostě řešíme rovnici $l(\bar{x}) = \mathbf{0}$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Označíme-li $x_3 = t$, pak obecné řešení má tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= t, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$, což zapsáno vektorově dává

$$\bar{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Báze v $\ker l$ je tedy tvořena jediným vektorem, například

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a platí $\dim(\ker l) = 1$.

Pro nalezení báze v $\operatorname{Im} l$ je vhodné si uvědomit, že prostor $\operatorname{Im} l$ je generován obrazy generátorů definičního oboru, tedy v našem případě $\mathbb{R}^3$. Je tedy

$$\operatorname{Im} l = \langle \{ l(\bar{e}_1), l(\bar{e}_2), l(\bar{e}_3) \} \rangle \,,$$

kde

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$l(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicky

$$l(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad l(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Z redukovaného schodovitého tvaru (3.20) plyne, že například vektory $l(\bar{e}_1)$ a $l(\bar{e}_2)$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} l$ (srov. Příklad 3.10).

□

3.5 Vektorové prostory se skalárním součinem

Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, resp. nad $\mathbb{C}$. **Skalárním součinem** nad $\mathbb{R}$, resp. nad $\mathbb{C}$ rozumíme zobrazení $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$, resp. $\sigma : V \times V \to \mathbb{C}$, které splňuje následující podmínky:

(i) $\sigma(u, u) > 0$ pro libovolné $u \in V$, $u \neq o$;

(ii) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$, resp. $\sigma(u, v) = \sigma^*(v, u)$ pro všechna $u, v \in V$;

(iii) $\sigma(u + v, w) = \sigma(u, w) + \sigma(v, w)$ pro všechna $u, v, w \in V$;

(iv) $\sigma(\alpha u, v) = \alpha \sigma(u, v)$ pro každé $u, v \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, resp. $\alpha \in \mathbb{C}$.

Pozornost si zaslouží zejména vytýkání konstanty z druhé složky skalárního součinu v případě, že se jedná o skalární součin ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$. Pak totiž platí

$$\sigma(u, \beta v) = \sigma(\beta v, u)^* = (\beta \cdot \sigma(v, u))^* = \beta^* \cdot \sigma(v, u)^* = \beta^* \cdot \sigma(u, v).$$

Dále, skalární součin jakéhokoliv vektoru s nulovým vektorem je nulový

$$\sigma(o, w) = \sigma(0 \cdot w, w) = 0 \cdot \sigma(w, w) = 0,$$

a tedy pro libovolný vektor u je

$$\sigma(u, u) = 0 \text{ právě když } u = o.$$

Příklad 3.20 Pro libovolné $u, v \in \mathbb{R}^3$ položme

$$\sigma(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Pak σ je tzv. standardní skalární součin na $\mathbb{R}^3$.

$\square$

Příklad 3.21 Ve vektorovém prostoru $(\mathcal{C}_{\langle 0, 2\pi \rangle}, +, \cdot)$ je skalárním součinem např. zobrazení

$$\sigma(u, v) = \int_0^{2\pi} u(x) v(x) dx.$$

$\square$

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor se skalárním součinem σ. Pak **normou** (neboli velikostí, délkou) vektoru $v \in V$ rozumíme nezáporné reálné číslo $\|v\| = \sqrt{\sigma(v, v)}$. Norma vektoru je vždy reálné nezáporné číslo nezávisle na tom, zda uvažujeme vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$. Nulovou hodnotu má norma pouze v jediném případě, a to pro nulový vektor. Poznamenejme, že normu lze zavést i v obecnějších matematických strukturách, než jsou vektorové prostory, a to i bez skalárního součinu (např. axiomaticky). To však přesahuje značně rámec tohoto textu. Vektor $v \in V$ se nazývá **jednotkový** (vzhledem k danému skalárnímu součinu či normě), je-li $\|v\| = 1$.

Pokud pro dva vektory $u, v \in V$ je $\sigma(u, v) = 0$, říkáme, že jsou vektory u, v navzájem **ortogonální** (neboli kolmé). Báze vektorového prostoru, jejíž všechny vektory jsou navzájem ortogonální, se nazývá **ortogonální báze**. Pokud jsou navíc všechny bázické vektory jednotkové, nazývá se taková báze **ortonormální**. Zpravidla bývá velmi výhodné takovou bázi ve vektorovém prostoru mít k dispozici a používat ji.

Příklad 3.22 Vektory

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

□

Nyní si ukážeme, jak můžeme libovolný vektorový prostor se skalárním součinem vybavit ortogonální a posléze ortonormální bází. Postup, který popíšeme, se nazývá **Gram-Schmidtův ortogonalizační proces**. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ se skalárním součinem σ, a nechť a_1, a_2, …, a_n jsou libovolné bázické vektory. Postupně klademe

$$b_1 = a_1;$$

$$b_2 = a_2 + \beta_{21} b_1,$$

přičemž požadujeme, aby $\sigma(b_2, b_1) = 0$. Určíme koeficient β_{21}. Chceme aby platilo

$$\sigma(b_2, b_1) = \sigma(a_2 + \beta_{21} b_1, b_1) = \sigma(a_2, b_1) + \beta_{21}\sigma(b_1, b_1) = 0,$$

odkud

$$\beta_{21} = -\frac{\sigma(a_2, b_1)}{\sigma(b_1, b_1)}.$$

Nyní provedeme tzv. indukční krok. Předpokládejme, že jsme již sestrojili navzájem ortogonální vektory b_1, b_2, …, b_{k-1}. Položíme

$$b_k = a_k + \beta_{k1} b_1 + \beta_{k2} b_2 + \cdots + \beta_{k\,k-1} b_{k-1}.$$

Požadavek, aby $\sigma(b_k, b_j) = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, k-1$ dává

$$\begin{aligned}\sigma(b_k, b_j) &= \sigma(a_k + \beta_{k1} b_1 + \beta_{k2} b_2 + \cdots + \beta_{k\,k-1} b_{k-1}, b_j) = \\ &= \sigma(a_k, b_j) + \beta_{k1}\sigma(b_1, b_j) + \beta_{k2}\sigma(b_2, b_j) + \cdots + \beta_{kj}\sigma(b_j, b_j) + \cdots + \beta_{k\,k-1}\sigma(b_{k-1}, b_j) = \\ &= \sigma(a_k, b_j) + \beta_{kj}\sigma(b_j, b_j) = 0,\end{aligned}$$

odkud

$$\beta_{kj} = -\frac{\sigma(a_k, b_j)}{\sigma(b_j, b_j)}, \quad \text{kde } j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Tak pokračujeme pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Výsledkem jsou vektory b_1, b_2, …, b_n, které jsou navzájem ortogonální. Nakonec položíme

$$h_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}, \quad \text{kde } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vektory h_1, h_2, …, h_n tvoří ortonormální bázi ve V.

Příklad 3.23 Uvažujme vektorový prostor $(\mathcal{P}_2(x), +, \cdot)$ všech polynomů stupně nejvýš 2 nad $\mathbb{R}$ v proměnné x se skalárním součinem $\sigma(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx$. Naším úkolem je najít v $\mathcal{P}_2(x)$ ortonormální bázi.

Mocninné funkce 1, x, x^2 tvoří bázi v $(\mathcal{P}_2(x), +, \cdot)$, která ovšem není ortogonální a tím méně ortonormální. Aplikujeme na ni Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. Klademe

$$b_1 = 1,$$

$$b_2 = x + \beta_{21} b_1,$$

kde

$$\beta_{21} = -\frac{\sigma(x, b_1)}{\sigma(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1}{[x]_0^1} = -\frac{1}{2},$$

tedy

$$b_2 = x - \frac{1}{2}.$$

Dále

$$b_3 = x^2 + \beta_{31} b_1 + \beta_{32} b_2,$$

kde

$$\beta_{31} = -\frac{\sigma(x^2, b_1)}{\sigma(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 1 dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}{[x]_0^1} = -\frac{1}{3},$$

a

$$\beta_{32} = -\frac{\sigma(x^2, b_2)}{\sigma(b_2, b_2)} = -\frac{\int_0^1 x^2(x - \frac{1}{2})dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} = -\frac{\int_0^1 (x^3 - \frac{1}{2}x^2)dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} =$$

$$= \frac{\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1}{\left[\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})^3\right]_0^1} = -\frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{12}} = -1.$$

Pak

$$b_3 = x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Vektory b_1, b_2, b_3 jsou navzájem ortogonální, avšak ještě nejsou všechny jednotkové. Proto klademe

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\sigma(b_1, b_1)}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{b_2}{\sqrt{\sigma(b_2, b_2)}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = 2\sqrt{3}\,x - \sqrt{3},$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{b_3}{\sqrt{\sigma(b_3, b_3)}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{180}}} = 6\sqrt{5}\,x^2 - 6\sqrt{5}\,x + \sqrt{5}.$$

Vektory e_1, e_2, e_3 tvoří ortonormální bázi vektorového prostoru $(\mathcal{P}_2(x), +, \cdot)$ vzhledem k zadanému skalárnímu součinu.

$\square$

Ukážeme nyní, jak lze reprezentovat skalární součin pomocí matic. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ se skalárním součinem σ, a nechť e_1, e_2, $\ldots$, e_n jsou vektory tvořící bázi ve V. Zvolme dva vektory $u, v \in V$. Jejich vyjádření v bázi $\underline{e}$ je

$$u = \underline{e} \cdot \bar{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots u_n e_n = \sum_i u_i e_i,$$

$$v = \underline{e} \cdot \bar{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots v_n e_n = \sum_j v_j e_j.$$

Pak

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \sigma(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j) = \sum_i \sum_j u_i v_j^* \sigma(e_i, e_j) = \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(e_1, e_1) & \sigma(e_1, e_2) & \ldots & \sigma(e_1, e_n) \\ \sigma(e_2, e_1) & \sigma(e_2, e_2) & \ldots & \sigma(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma(e_n, e_1) & \sigma(e_n, e_2) & \ldots & \sigma(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} = \\ &= \underline{u} \cdot G \cdot \bar{v}^*, \end{aligned} \tag{3.21}$$

kde

$$G = \begin{pmatrix} \sigma(e_1, e_1) & \sigma(e_1, e_2) & \ldots & \sigma(e_1, e_n) \\ \sigma(e_2, e_1) & \sigma(e_2, e_2) & \ldots & \sigma(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma(e_n, e_1) & \sigma(e_n, e_2) & \ldots & \sigma(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

je tzv. **Gramova matice** daného skalárního součinu v bázi $\underline{e}$.

Můžeme si všimnout, že Gramova matice spolu se zvolenou bází daný skalární součin plně definuje; je totiž určena skalárními součiny bázických vektorů. V případě, že je zvolená báze vzhledem k danému skalárnímu součinu ortonormální, je Gramova matice jednotková a platí zjednodušený vztah

$$\sigma(u, v) = \underline{u} \cdot \bar{v}^*.$$

Je-li Gramova matice dána, nezáleží již na tom, jakým a jak abstraktním předpisem je skalární součin zadán – v takovém případě lze totiž skalární součin spočítat jako pouhé maticové násobení s využitím Gramovy matice a složek vektorů v dané bázi. Tato reprezentace skalárního součinu má ovšem nevýhodu závislosti na zvolené bázi. Ukažme tedy ještě, jak se Gramova matice změní, změníme-li bázi daného vektorového prostoru. Uvažujme ve V ještě jinou bázi, řekněme

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \end{pmatrix} = \underline{e} \cdot T,$$

kde T je matice přechodu od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$. Nechť v této bázi mají vektory u, v vyjádření

$$u = \underline{f} \cdot \bar{u}', \quad v = \underline{f} \cdot \bar{v}'.$$

Souřadnice nebo-li složky vektorů se transformují podle vztahu (3.9), takže platí

$$\bar{u} = T \cdot \bar{u'}, \quad \bar{v} = T \cdot \bar{v'}.$$

Odtud také plyne

$$\underline{u} = \bar{u}^T = (T \cdot \bar{u'})^T = \bar{u'}^T \cdot T^T = \underline{u}' \cdot T^T.$$

Můžeme tedy dosadit do vztahu (3.21)

$$\sigma(u, v) = \underline{u} \cdot G \cdot \bar{v}^* = \underline{u}' \cdot T^T \cdot G \cdot T^* \cdot \bar{v'}^*.$$

Nová Gramova matice daného skalárního součinu, vyjádřeného vzhledem k bázi $\underline{f}$ tedy je

$$G' = T^T G T^*. \tag{3.22}$$

Důsledkem transformačního vztahu (3.22) mimo jiné je, že Gramova matice je vždy regulární. Lze totiž k danému skalárnímu součinu nalézt ortonormální bázi, jejíž Gramova matice je jednotková a tedy regulární. Jakákoli jiná Gramova matice je pak součinem vhodné matice přechodu a matice k ní transponované, které jsou obě regulární.

Příklad 3.24 Uvažujme vektorový prostor $(\mathcal{P}_2(x), +, \cdot)$ všech polynomů stupně nejvýš 2 nad $\mathbb{R}$ v proměnné x se skalárním součinem $\sigma(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx$. Máme nalézt Gramovu matici skalárního součinu σ vzhledem k bázi, tvořené mocninnými funkcemi x^2, x, 1 (v tomto pořadí).

Platí

$$\sigma(1, 1) = \int_0^1 1dx = 1,$$

$$\sigma(1, x) = \sigma(x, 1) = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\sigma(1, x^2) = \sigma(x, x) = \sigma(x^2, 1) = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\sigma(x, x^2) = \sigma(x^2, x) = \int_0^1 x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\sigma(x^2, x^2) = \int_0^1 x^4dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Pak

$$G = \begin{pmatrix} \sigma(x^2, x^2) & \sigma(x^2, x) & \sigma(x^2, 1) \\ \sigma(x, x^2) & \sigma(x, x) & \sigma(x, 1) \\ \sigma(1, x^2) & \sigma(1, x) & \sigma(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 3.25 Opět uvažujme vektorový prostor $(\mathcal{P}_2(x), +, \cdot)$ všech polynomů stupně nejvýš 2 nad $\mathbb{R}$ v proměnné x se skalárním součinem $\sigma(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx$. Naším úkolem je spočítat skalární součin dvou vektorů (polynomů) x^2+1 a $x-1$.

To můžeme udělat v zásadě dvojím způsobem. Nejprve přímo z definičního vztahu pro skalární součin

$$\sigma(x^2+1, x-1) = \int_0^1 (x^2+1)(x-1)dx = \int_0^1 (x^3 - x^2 + x - 1)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3-4-6}{12} = -\frac{7}{12}$$

a potom také užitím Gramovy matice. Nejdříve vyjádříme příslušné polynomy jako vektory v bázi pomocí jejich složek

$$x^2+1 = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x-1 = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a pak využijeme vztahu (3.21), tedy

$$\sigma(x^2+1, x-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{4}{3} = \frac{9-16}{12} = -\frac{7}{12}.$$

$\square$

Příklad 3.26 Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor se skalárním součinem σ, jehož Gramova matice v bázi $\underline{e}$ je

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}.$$

Naším úkolem bude najít Gramovu matici skalárního součinu σ v bázi $\underline{f}$, jestliže matice přechodu T od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$, tedy taková matice T, že

$$\underline{f} = \underline{e} \cdot T$$

je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle vztahu (3.22) je

$$G' = T^T \cdot G \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{15} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

□

3.5.1 Ortogonální průmět vektoru do podprostoru

Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor se skalárním součinem σ, $L = \langle\{h_1, h_2, \dots h_k\}\rangle$ podprostor prostoru V, generovaný lineárně nezávislými vektory h_1, h_2, $\dots$, h_k, $u \in V$ libovolný vektor. Abychom nalezli průmět vektoru u do L, musíme nalézt vektory $v, w \in V$ takové, že

(i) $u = v + w$,

(ii) $v \in L$,

(iii) $\sigma(w, x) = 0$ pro každé $x \in L$.

Z (ii) plyne, že musí existovat koeficienty α_1, α_2, $\dots$, α_k takové, že

$$v = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_k h_k = \sum_i \alpha_i h_i.$$

Z (iii) plyne pro $w = u - v$, že

$$\sigma(u - v, h_j) = 0 \quad \text{pro každé } j = 1, 2, \dots, k.$$

Pak

$$\sigma(u - \sum_i \alpha_i h_i, h_j) = 0,$$

odkud

$$\sigma(u, h_j) - \sum_i \alpha_i (h_i, h_j) = 0,$$

takže

$$\sum_i \alpha_i \sigma(h_i, h_j) = \sigma(u, h_j).$$

Maticově

$$\underline{\alpha} \cdot H = \underline{u}_h,$$

a po transponování

$$H^T \cdot \bar{\alpha} = \bar{u}_h. \tag{3.23}$$

Matice $H = (\sigma(h_i, h_j))$ je vlastně Gramovou maticí skalárního součinu σ na L, takže je matice H regulární, a stejně tak matice H^T. V případě reálného vektorového prostoru je navíc $H^T = H$, v případě vektorového prostoru nad komplexními čísly je $H^T = H^*$. V každém případě soustava (3.23) má jediné řešení $\bar{\alpha}$. Pak

$$v = \sum_i \alpha_i h_i, \quad w = u - \sum_i \alpha_i h_i. \tag{3.24}$$

Vektor v se nazývá **ortogonální průmět** vektoru u do podprostoru L. Jsou-li navíc vektory h_1, h_2, $\ldots$, h_k ortonormální, pak

$$\sigma(h_i, h_j) = \delta_{ij},$$

a tedy

$$\alpha_i = \sigma(u, h_i).$$

Potom

$$v = \sum_i \sigma(u, h_i) h_i. \tag{3.25}$$

Nyní předpokládejme, že jsou vektory h_1, h_2, $\ldots$, h_k vyjádřeny v nějaké bázi ve V pomocí složek, platí tedy

$$h_i = \underline{e} \cdot \bar{h}_i, \text{ kde } i = 1, 2, \ldots k.$$

Pak také

$$\sigma(u, h_i) = \underline{u} \cdot G \cdot \bar{h}_i^* = \underline{h}_i^* \cdot G^T \cdot \bar{u} = \underline{h}_i^* \cdot G^* \cdot \bar{u},$$

kde $G = G^{T*}$ je Gramova matice skalárního součinu σ v bázi $\underline{e}$. Odtud

$$v = \sum_i \underline{e} \cdot \bar{h}_i \cdot \underline{h}_i^* \cdot G^* \cdot \bar{u} = \underline{e}(\sum_i \bar{h}_i \cdot \underline{h}_i^* \cdot G^*)\bar{u} =$$

$$= \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \ldots & \bar{h}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{h}_1^* \\ \underline{h}_2^* \\ \vdots \\ \underline{h}_3^* \end{pmatrix} \cdot G^* \cdot \bar{u} = \underline{e} \cdot P \cdot \bar{u},$$

kde

$$P = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \ldots & \bar{h}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{h}_1^* \\ \underline{h}_2^* \\ \vdots \\ \underline{h}_3^* \end{pmatrix} \cdot G^* \tag{3.26}$$

je tzv. matice ortogonální projekce na L. V případě, že je báze $\underline{e}$ ortonormální (například, když $V = \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a $\underline{e}$ je tvořena sloupci jednotkové matice) je $G = I_n$ a můžeme psát

$$P = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \dots & \bar{h}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{h}_1^* \\ \underline{h}_2^* \\ \vdots \\ \underline{h}_3^* \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Poznamenejme, že k tomu, aby matici ortogonální projekce na podprostor L bylo možné vyjádřit právě popsaným způsobem, je skutečně nezbytné, aby zvolená báze h_1, h_2, $\dots$, h_k v L byla ortonormální vzhledem k zadanému skalárnímu součinu.

Příklad 3.27 Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ se standardním skalárním součinem $\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 = \underline{u} \cdot \bar{v}$ jsou dány vektory

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

které generují vektorový podprostor $L = \langle\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Naším úkolem je najít ortogonální průmět vektoru

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

do L a vzdálenost $\bar{x}$ od L.

Vyjádříme $\bar{x}$ ve tvaru

$$\bar{x} = \bar{y} + \bar{z},$$

kde $\bar{y} \in L$ a $\bar{z} \perp L$. Pak existují α_1, α_2, α_3, že

$$\bar{y} = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3$$

a také platí

$$\sigma(\bar{z}, \bar{v}_1) = \sigma(\bar{z}, \bar{v}_2) = \sigma(\bar{z}, \bar{v}_3) = 0.$$

Odtud již vyplývají rovnice

$$\sigma(\bar{x}, \bar{v}_i) = \alpha_1\sigma(\bar{v}_1, \bar{v}_i) + \alpha_2\sigma(\bar{v}_2, \bar{v}_i) + \alpha_3\sigma(\bar{v}_3, \bar{v}_i)$$

pro $i = 1, 2, 3$. Konkrétně dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 17\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & 10\alpha_3 & = & -1 \\ 3\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 4\alpha_3 & = & -1 \\ 10\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 21\alpha_3 & = & -3, \end{array}$$

jejíž rozšířená matice je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 3 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & 21 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

odkud

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = -\frac{10}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3}.$$

Tedy

$$\bar{y} = \frac{1}{3}\bar{v}_1 - \frac{10}{3}\bar{v}_2 + \frac{1}{3}\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy ortogonální průmět vektoru $\bar{x}$ do podprostoru L je vektor

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a vzdálenost d tohoto vektoru od L je rovna délce vektoru $\bar{z}$. Tedy

$$d = \|z\| = \sqrt{\sigma(\bar{z}, \bar{z})} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2} = 2.$$

□

Následující příklad ukazuje, jak je možné podobnou úlohu řešit alternativně pomocí ortonormální báze v prostoru, do nějž promítáme. Pokud nemáme vhodnou ortonormální bázi k dispozici, můžeme ji sestrojit například Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem.

Příklad 3.28 Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ se standardním skalárním součinem jsou dány vektory

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Úkolem je promítnout vektor

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ortogonálně do podprostoru $L = \left\langle \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\} \right\rangle$ a najít vzdálenost $\bar{u}$ od L.

Protože jsou vektory h_1, h_2 ortonormální, řešení je neobyčejně jednoduché. Položíme

$$\bar{u} = \bar{v} + \bar{w},$$

kde $\bar{v} \in L$ a $\bar{w} \perp L$. Podle (3.25) platí

$$\bar{v} = \sigma(\bar{u}, \bar{h}_1)\bar{h}_1 + \sigma(\bar{u}, \bar{h}_2)\bar{h}_2 = (2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{2}{3})\bar{h}_1 + (2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})\bar{h}_2 =$$

$$= -\frac{1}{3}\bar{h}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{18} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{49}{18} \end{pmatrix}$$

a

$$\bar{w} = \bar{u} - \bar{v} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{5}{18} \end{pmatrix}.$$

Vzdálenost vektoru $\bar{u}$ od L je

$$d = \|w\| = \sqrt{\left(\frac{5}{18}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{18}\right)^2} = \sqrt{\frac{450}{324}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \doteq 1,1785\ldots$$

$\square$

Příklad 3.29 Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ se standardním skalárním součinem je naším úkolem najít matici ortogonální projekce na podprostor, zadaný v Příkladě 3.28.

Využijeme vztahu (3.26), resp. speciálního vztahu (3.27). Bázi v $\underline{e}$ v $\mathbb{R}^3$ volíme standardní „nula-jedničkovou”, tj. takovou, jejíž vektory jsou tvořeny sloupci matice I_3. Pak je každý vektor, zapsaný sloupcově, roven svým vlastním složkám v této bázi. Platí

$$P = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{h}_1^* \\ \underline{h}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} & -\frac{2}{9} & \frac{17}{18} \end{pmatrix}$$

Na zkoušku můžeme spočítat $P \cdot \bar{u}$, měli bychom dostat vektor v z předchozího příkladu. Vskutku,

$$P \cdot \bar{u} = \begin{pmatrix} \frac{17}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} & -\frac{2}{9} & \frac{17}{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{18} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{49}{18} \end{pmatrix}.$$

Podobně vyjde $P \cdot \bar{w} = \mathbf{0}$, $P \cdot \bar{h}_1 = \bar{h}_1$, $P \cdot \bar{h}_2 = \bar{h}_2$ (ověřte a zdůvodněte, proč tomu tak je). $\square$

3.5.2 Ortogonální doplněk vektorového podprostoru

Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor se skalárním součinem σ, $L \subseteq V$ jeho podprostor. Označme $L^\perp = \{x | \, x \in V, \sigma(x, y) = 0 \text{ pro každé } y \in L\}$. Množina $L^\perp$ se nazývá **ortogonální doplněk** podprostoru L ve V.

Věta 3.9 *Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor se skalárním součinem σ, $L \subseteq V$ podprostor prostoru V. Pak také $L^\perp$ je vektorový podprostor V.*

Důkaz. Zvolme $u, v \in L^\perp$ a koeficienty α, β a označme $w = \alpha u + \beta v$. Nechť $y \in L$. Pak

$$\sigma(w, y) = \sigma(\alpha u + \beta v, y) = \alpha\sigma(u, y) + \beta\sigma(v, y) = 0 + 0 = 0,$$

takže také

$$w \in L^\perp.$$

Podle Věty 3.3 je $L^\perp$ vektorový podprostor V. □

Věta 3.10 *Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor se skalárním součinem σ, $L \subseteq V$ podprostor prostoru V. Pak platí*

(i) $V = L \dot{+} L^\perp$

(ii) $\dim V = \dim L + \dim L^\perp$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $L \cap L^\perp = \{o\}$. Je-li $x \in L \cap L^\perp$, pak $\sigma(x, x) = 0$, odkud $x = o$. Tedy $L \cap L^\perp = \{o\}$. Je-li nyní $u \in V$, podle (3.24) a předchozích výpočtů je možné rozložit vektor u tak, že

$$u = v + w,$$

kde

$$v \in L, \quad w \in L^\perp.$$

Tedy

$$V = L + L^\perp,$$

přičemž tento součet je přímý. Tím je dokázáno (i). Tvrzení (ii) je pak jen speciálním případem (ii) ve Větě 3.5. □

Příklad 3.30 Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ se standardním skalárním součinem je dán podprostor L jako množina všech řešení homogenní soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0. \end{array} \tag{3.28}$$

Zadaný vektor

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

máme rozložit na dvě složky v, w tak, že

$$u = v + w,$$

kde $v \in L$ a $w \perp L$.

Pochopitelně je možné nejdříve vyřešit soustavu (3.28) a najít tak generátory nebo bázi prostoru L. Potom bychom mohli pokračovat analogicky jako v Příkladě 3.27 nebo Příkladě 3.28. Avšak tento postup není nejlepší možný. Můžeme využít zvláštní shody okolností, že totiž zvolený skalární součin je standardní a jeho způsob výpočtu se shoduje se způsobem zápisu soustav lineárních rovnic. Soustavu (3.28) totiž můžeme číst také jako

$$\sigma(\bar{x}, \bar{w}_1) = 0, \quad \sigma(\bar{x}, \bar{w}_2) = 0, \quad \sigma(\bar{x}, \bar{w}_3) = 0, \quad \sigma(\bar{x}, \bar{w}_4) = 0,$$

kde vektory $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$, $\bar{w}_4$ získáme z koeficientů matice soustavy (3.28), čtených po řádcích:

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Položme si otázku, jaký je vztah vektorů $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$, $\bar{w}_4$ a prostorů L, $L^\perp$. Je zřejmé, že $w_i \in L^\perp$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Označíme-li tedy $W = \langle\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4\}\rangle$, vidíme, že $W \subseteq L^\perp$. Označíme-li matici soustavy (3.28) jako A, je $A^T = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 & \bar{w}_4 \end{pmatrix}$. Z vlastností soustav lineárních rovnic víme, že $\dim L + h(A) = n$ a z Věty 3.10 plyne také $\dim L + \dim L^\perp = n$. Tedy $\dim W = h(A) = \dim L^\perp$ a tedy $W = L^\perp$. Tedy vektory $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$, $\bar{w}_4$ jsou generátory $L^\perp$. S využitím vektorů $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$, $\bar{w}_4$ můžeme prostě role prostorů L a $L^\perp$ zaměnit a počítat dále analogicky jako v Příkladě 3.27, aniž bychom museli soustavu (3.28) řešit.

Podobně jako v Příkladě 3.27 máme

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{w}_1 + \alpha_2 \bar{w}_2 + \alpha_3 \bar{w}_3 + \alpha_4 \bar{w}_4$$

a také platí

$$\sigma(\bar{v}, \bar{w}_1) = \sigma(\bar{v}, \bar{w}_2) = \sigma(\bar{v}, \bar{w}_3) = \sigma(\bar{v}, \bar{w}_4) = 0.$$

Odtud a ze vztahu $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$ již vyplývají rovnice

$$\sigma(\bar{u}, \bar{w}_i) = \alpha_1\sigma(\bar{w}_1, \bar{w}_i) + \alpha_2\sigma(\bar{w}_2, \bar{w}_i) + \alpha_3\sigma(\bar{w}_3, \bar{w}_i) + \alpha_3\sigma(\bar{w}_4, \bar{w}_i)$$

pro $i = 1, 2, 3, 4$. Po dosazení konkrétních hodnot máme

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & + & 6\alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 5\alpha_2 & - & \alpha_3 & + & 5\alpha_4 & = & 2 \\ 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & + & 3\alpha_3 & + & 4\alpha_4 & = & -2 \\ 6\alpha_1 & + & 5\alpha_2 & + & 4\alpha_3 & + & 15\alpha_4 & = & 0 \end{array}$$

Matice této soustavy je

$$\left(\begin{array}{rrrrcr} 3 & 1 & 2 & 6 & | & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 5 & | & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & -2 \\ 6 & 5 & 4 & 15 & | & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrcr} 1 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, lze totiž libovolně volit jeden koeficient, například (a nejvýhodněji) α_4. Tento výsledek dostáváme proto, že vektory $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$, $\bar{w}_4$ nejsou lineárně nezávislé (a tedy netvoří bázi v $L^\perp$, pouze tvoří množinu generátorů prostoru $L^\perp$). Nejjednodušší je volit $\alpha_4 = 0$, vektor $\bar{w}_4$ tím vůbec nepoužijeme. Pak odtud plyne

$$\alpha_1 = \frac{4}{5}, \quad , \alpha_2 = 0, \quad , \alpha_3 = -\frac{6}{5}, \quad \alpha_4 = 0$$

a tedy

$$\bar{w} = \frac{4}{5}\bar{w}_1 - \frac{6}{5}\bar{w}_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \bar{u} - \bar{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$\square$

3.5.3 Prvek nejlepší aproximace

Položme si otázku, jak můžeme nejlépe aproximovat nejlépe vektor $u \in V$ vektorem $x \in L$, aby odchylka (měřená skalárním součinem) $\|u - x\|$ byla co nejmenší. Označme

$$x = \sum_i x_i h_i.$$

Pak

$$\|u-x\|^2 = \sigma(u-x,u-x) = \sigma(u,u)+\sigma(x,x)-2\sigma(u,x) = \\ = \|u\|^2 + \sum_i\sum_j x_i x_j \sigma(h_i,h_j) - 2\sigma(u,\sum_i x_i h_i).$$

Můžeme předpokládat, že báze h_1, h_2, …, h_k prostoru L je ortonormální. Pak

$$\sigma(h_i,h_j)=\delta_{ij},$$

takže

$$\begin{aligned}\|u-x\|^2 &= \|u\|^2 + \sum_i {x_i}^2 - 2\sum_i x_i\sigma(u,h_i) = \|u\|^2 + \sum_i {x_i}^2 - 2\sum_i \alpha_i x_i = \\ &= \|u\|^2 + \sum_i {x_i}^2 - 2\sum_i \alpha_i x_i + \sum_i {\alpha_i}^2 - \sum_i {\alpha_i}^2 = \|u\|^2 + \sum_i (x_i^2 - 2x_i\alpha_i + \alpha_i^2) - \\ &- \sum_i {\alpha_i}^2 = \|u\|^2 - \sum_i {\alpha_i}^2 + \sum_i (x_i-\alpha_i)^2.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Z (3.29) vyplývá, že $\|u-x\|$ se minimalizuje pro $x_i=\alpha_i=\sigma(u,h_i)$. Nejlepší aproximace nastává pro

$$x=\sum_i \sigma(u,h_i)h_i,$$

což je právě ortogonální průmět vektoru u do L.

Příklad 3.31 V prostoru $(\mathcal{C}_{\langle 0,1\rangle},+,\cdot)$ se skalárním součinem $\sigma(u,v)=\int_0^1 u(x)v(x)dx$ aproximujme co nejlépe funkci e^x polynomem druhého stupně.

Promítneme ortogonálně funkci e^x do podprostoru $\mathcal{P}_2(x)\subseteq\mathcal{C}_{\langle 0,1\rangle}$. Ortonormální báze v $\mathcal{P}_2(x)$ je tvořena například vektory $h_1=1$, $h_2=2\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}$, $h_3=6\sqrt{5}\,x^2-6\sqrt{5}\,x+\sqrt{5}$, jak se můžeme přesvědčit v Příkladě 3.23. Podle vztahu (3.25) platí pro ortogonální průmět $f(x)$

$$f(x)=\sigma(e^x,h_1)h_1+\sigma(e^x,h_2)h_2+\sigma(e^x,h_3)h_3. \tag{3.30}$$

Přitom

$$\sigma(e^x,h_1)=\int_0^1 e^x dx = e-1,$$

$$\sigma(e^x,h_2)=\int_0^1 e^x(2\sqrt{3}\,x-\sqrt{3})dx = -\sqrt{3}\,e+3\sqrt{3},$$

$$\sigma(e^x,h_3)=\int_0^1 e^x(6\sqrt{5}\,x^2-6\sqrt{5}\,x+\sqrt{5})dx = 7\sqrt{5}\,e-19\sqrt{5}.$$

□

Dosazením do (3.30) dostaneme

$$f(x)=(210e-570)x^2+(-216e+588)x+39e-105 \doteq \\ \doteq 0,8392\,x^2+0,8511\,x+1,0130.$$

3.6 Klíčové myšlenky kapitoly

- Vektory z nějaké množiny jsou lineárně nezávislé, právě když je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.
- Maximální lineárně nezávislý systém vektorů v daném vektorovém prostoru se nazývá báze.
- Počet prvků báze (je-li konečný) se nazývá dimenze daného vektorového prostoru.
- Každý vektor lze vyjádřit jednoznačně jako lineární kombinaci vektorů báze.
- Báze můžeme vzájemně transformovat pomocí matic přechodu.
- Pomocí matic přechodu se transformují i složky vektorů v různých bázích, ale jinak (opačným směrem) než báze samotné.
- Matice přechodu jsou vždy regulární.
- Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory je určeno maticí, která závisí na volbě bází v obou prostorech.
- Při změně báze v některém z prostorů se i matice lineárního zobrazení transformuje pomocí matice přechodu.
- Skalární součin dvou vektorů je reprezentován tzv. Gramovou maticí. Ta je pro ortonormální bázi jednotková.
- Při změně báze se Gramova matice transformuje (jistým způsobem) pomocí matice přechodu.
- K nalezení ortonormální báze slouží Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. Získané ortogonální vektory je třeba ještě normovat.
- Je-li báze vektorového podprostoru ortonormální, ortogonální průmět vektoru do tohoto podprostoru se spočítá zvlášť jednoduchým způsobem.
- Ortogonální průmět daného vektoru aproximuje tento vektor nejlépe ze všech vektorů podprostoru, do něhož je daný vektor promítán.

3.7 Cvičení N

1. Které z následujících vektorů $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\bar{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ jsou lineárními kombinacemi vektorů $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$\Big[$ Výsledek: $\bar{b}$, $\bar{c}$ $\Big]$. □

2. Které z následujících vektorů $\underline{a} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ jsou lineárními kombinacemi vektorů $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

$\Big[$ Výsledek: žádný ze zadaných vektorů $\Big]$. □

3. Které z následujících vektorů $a(t) = t^2 + t + 2$, $b(t) = 2t^2 + 2t + 3$, $c(t) = -t^2 + t - 4$, $d(t) = -2t^2 + 3t + 1$ jsou lineárními kombinacemi vektorů $p_1(t) = t^2 + 2t + 1$, $p_2(t) = t^2 + 3$, $p_3(t) = t - 1$?

$\Big[$ Výsledek: $a(t)$, $c(t)$ $\Big]$. □

4. Které z následujících množin vektorů generují $\mathbb{R}^4$?

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$\Big[$ Výsledek: A, D $\Big]$. □

5. Které z následujících množin vektorů jsou lineárně závislé?

$$A = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \},$$

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \},$$

$$C = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \},$$

$$D = \{ \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \},$$

$\Big[$ Výsledek: A, D $\Big]$. □

6. Jsou dány vektory

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vyberte z těchto vektorů bázi vektorového podprostoru $W = \langle\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}\rangle$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a určete $\dim W$.

$\Big[$ Výsledek: Například $\bar{v}_1$ a $\bar{v}_2$ tvoří bázi ve W, přičemž $\dim W = 2$. $\Big]$. □

7. Jsou dány polynomy $p_1(t) = t^3 + t^2 - 2t + 1$, $p_2(t) = t^2 + 1$, $p_3(t) = t^3 - 2t$, $p_4(t) = 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3$. Mezi těmito polynomy vyberte bázi prostoru $P = \langle\{p_1, p_2, p_3, p_4\}\rangle$.

$\Big[$ Výsledek: Například p_1 a p_2 tvoří bázi v P, přičemž $\dim P = 2$. $\Big]$. □

8. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^6$ jsou dány vektory:
$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Označme $L_1 = \langle\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}\rangle$, $L_2 = \langle\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}\rangle$. Stanovte $\dim L_1$, $\dim L_2$, $\dim L_1 + L_2$, $\dim L_1 \cap L_2$ a ve všech vyjmenovaných prostorech najděte báze.

$\Big[$ Výsledek: $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 3$, $\dim L_1 + L_2 = 3$, $\dim L_1 \cap L_2 = 2$. Platí (pouze v tomto konkrétním příkladě), že $L_1 + L_2 = L_2$, kde bázi tvoří například $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$, a $L_1 \cap L_2 = L_1$, kde báze je tvořena například vektory $\underline{a}_1$ a $\underline{a}_2$. $\Big]$. □

9. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Označme $L_1 = \langle\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}\rangle$, $L_2 = \langle\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}\rangle$. Najděte bázi v prostoru $L_1 \cap L_2$ a určete jeho dimenzi.

$\Big[$ Výsledek: Bázickými vektory v $L_1 \cap L_2$ jsou například vektory $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim L_1 \cap L_2 = 2.$ $\Big]$. □

10. Ve vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^3$ jsou dány dvě báze

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad \underline{f} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Nalezněte obě matice přechodu a složky vektoru $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ v obou bázích. Přitom tyto složky počítejte nejprve přímo, potom také s využitím matic přechodu a již vypočítaných složek ve druhé bázi. Výsledky porovnejte.

$\Big[$ Výsledek: $\underline{f} = \underline{e} \cdot T$, $T = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{e} = \underline{s} \cdot S$, $S = T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $\bar{v} = \underline{e} \cdot \bar{v}' = \underline{f} \cdot \bar{v}''$, $\bar{v}' = T \cdot \bar{v}''$, $\bar{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{v}'' = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 28 \end{pmatrix}$. $\Big]$. □

11. Zopakujte předchozí cvičení pro $V = \mathcal{P}_2(t)$, $\underline{e} = (t^2 + 1, t - 2, t + 3)$, $\underline{f} = (2t^2 + t, t^2 + 3, t)$, $v = 8t^2 - 4t + 6$.

$\Big[$ Výsledek: $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, $S = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\bar{v}' = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{v}'' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$. $\Big]$. □

12. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení, pro které platí

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Určete $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$ a matici zobrazení f (vzhledem ke standardní kanonické bázi v $\mathbb{R}^2$).

$\Big[$ Výsledek: $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a + b \\ -5a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\Big]$. □

13. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je definováno vztahem $f(x, y) = (x, x + y, y)$. Určete $\ker f$.

$\left[\text{ Výsledek: } \ker f = \{(0,0)\}\ \right].$ $\square$

14. Nechť $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ je definováno vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Najděte báze prostorů $\ker f$ a $\operatorname{Im} f$.

[Výsledek: Bázi v $\ker f$ tvoří například vektory

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{bázi v } \operatorname{Im} f \text{ například vektory } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

]. $\square$

15. Nechť $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je definováno vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ z-w \end{pmatrix}.$$

Určete $\dim \ker f$.

$\left[\text{ Výsledek: } \dim \ker f = 1\ \right].$ $\square$

16. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je definováno vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}.$$

V $\mathbb{R}^3$ je dána standardní kanonická báze $\underline{e}$ a báze $\underline{e}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, v $\mathbb{R}^2$ je dána standardní kanonická báze $\underline{f}$ a jiná báze $\underline{f}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Nalezněte matice zobrazení f pro všechny čtyři kombinace volby báze v $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

$\Big[$ Výsledek: Pro $\underline{e}$, $\underline{f}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; pro $\underline{e}'$, $\underline{f}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; pro $\underline{e}$, $\underline{f}'$: $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; pro $\underline{e}'$, $\underline{f}'$: $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $\Big]$. $\square$

17. Použijte Gram-Schmidtův proces k nalezení ortonormální báze v podprostoru $V \subseteq \mathbb{R}^3$ generovaného vektory $(1, -1, 0)$, $(2, 0, 1)$.

$\Big[$ Výsledek: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ $\Big]$. $\square$

18. Použijte Gram-Schmidtův proces k nalezení ortonormální báze v podprostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $(1, -1, 0, 1)$, $(2, 0, 0, -1)$, $(0, 0, 1, 0)$.

$\Big[$ Výsledek: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, 0, -\frac{4}{\sqrt{42}})$, $(0, 0, 1, 0)$ $\Big]$. $\square$

19. Vyjádřete vektor $\underline{u} = (5, 2, -2, 2) \in \mathbb{R}^4$ jako součet dvou vektorů $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$, kde $\underline{v}$ je lineární kombinací vektorů $(2, 1, 1, -1)$ a $(1, 1, 3, 0)$ a $\underline{w}$ je k těmto vektorům kolmý. Použijte standardní skalární součin.

$\Big[$ Výsledek: $\underline{v} = (3, 1, -1, -2)$, $\underline{w} = (2, 1, -1, 4)$ $\Big]$. $\square$

20. Najděte ortogonální průmět vektoru $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ do podprostoru $L \subseteq \mathbb{R}^4$, generovaného vektory

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$\Big[$ Výsledek: V tomto případě je $\bar{v} \in L$, takže průmět vektoru $\bar{v}$ je roven vektoru $\bar{v}$. $\Big]$. $\square$

21. Podprostor $L \subseteq \mathbb{R}^3$ je generován vektorem $\underline{a} = (1, -2, 1)$. V podprostoru $L^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ všech vektorů z $\mathbb{R}^3$ kolmých na L najděte ortonormální bázi.

$\Big[$ Výsledek: Ortonormální bázi v $L^\perp$ tvoří např. vektory $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. $\Big]$. $\square$

22. Podprostor $L \subseteq \mathbb{R}^4$ je generován vektory $\underline{a} = (1, 1, 1, 1)$ a $\underline{b} = (2, 1, -1, 1)$. V podprostoru $L^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$ všech vektorů z $\mathbb{R}^4$ kolmých na L najděte (ne nutně ortonormální nebo ortogonální) bázi.

$\Big[$ Výsledek: Báze v $L^{\perp}$ je tvořena například vektory $(0, -1, 0, 1)$ a $(2, -3, 1, 0)$. $\Big]$. $\square$

3.8 Cvičení M

V následujících cvičeních použijte Matlab ke zjištění, zda je daný vektor $\vec{v}$ lineární kombinací množiny vektorů S. Pokud ano, najděte příslušné koeficienty této lineární kombinace a vektor v pomocí vektorů z S vyjádřete.

1. $\underline{v} = (0,1,1,1)$, $S = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,1,1,1)\}$.

2. $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

3. $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. $v = t^2 + 2t + 4$, $S = \{t-1, t+1, t^2+t+1\}$.

V následujících cvičeních použijte Matlab ke zjištění, zda vektory z množiny S tvoří bázi ve vektorovém prostoru V.

5. $S = \{(1,2,1),(2,1,1),(2,2,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

6. $S = \{2t-2, t^2-3t+1, 2t^2-8t+4\}$, $V = \mathcal{P}_2(t)$.

7. $S = \{(1,1,0,0),(2,1,1,-1),(0,0,1,1),(1,2,1,2)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

8. $S = \{(1,2,1,0),(2,1,3,1),(2,-2,4,2)\}$, $V = \langle S \rangle$.

9. $S = \{(1,2,1,0),(2,1,3,1),(2,2,1,2)\}$, $V = \langle S \rangle$.

10. $S = \{(0,1,-1),(1,1,1)\}$, $V = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}, b+c = 2a\}$.

V následujících cvičeních pomocí Matlabu určete složky vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ v bázi $\underline{e}$ vektorového prostoru V.

11. $\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $\bar{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\bar{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

12. $\underline{e} = ((1,0,1,1),(1,2,1,3),(0,2,1,1),(0,1,0,0))$, $a = (4,12,8,14)$, $b = (\frac{1}{2},0,0,0)$, $c = (1,1,1,\frac{7}{3})$.

13. $\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & \frac{10}{3} \\ \frac{7}{6} & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

V následujících cvičeních použijte Matlab k výpočtu matice přechodu T od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$ a matice přechodu S od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$ vektorového prostoru V. Ověřte, že $TS = ST = I_n$, kde $n = \dim V$.

14. $\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \underline{f} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$

15. $\underline{e} = ((1,2,3,0),(0,1,2,3),(3,0,1,2),(2,3,0,1))$,
$\underline{f} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

16. $\underline{e} = (t-1, t+1, t^2+t, t^3-t)$, $\underline{f} = (t^2, 1-t, 2-t^2, t^3+t^2)$.

17. Ve vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^3$ jsou dány tři báze

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \underline{f} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\underline{g} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pomocí Matlabu sestrojte matici přechodu T od $\underline{e}$ k $\underline{f}$, matici přechodu S od $\underline{f}$ ke $\underline{g}$ a matici přechodu U od $\underline{g}$ k $\underline{e}$. Zjistěte, jaké vztahy platí mezi maticemi T, S, U.

V následujících úlohách najděte pomocí Matlabu bázi v prostorech $\ker f$ a $\operatorname{Im} f$ lineárního zobrazení $f(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$. Určete $\dim \ker f$ a $\dim \operatorname{Im} f$.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ -4 & -4 & 7 & -2 & -19 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$

V následujících úlohách je dáno lineární zobrazení $f : V \to W$, báze $\underline{e}$ prostoru V a báze $\underline{f}$ prostoru W. Najděte matici A zobrazení f, která reprezentuje zobrazení f vzhledem k těmto bázím.

21. $V=\mathbb{R}^3, W=\mathbb{R}^2, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2x-y \\ x+y-3z \end{pmatrix}, \underline{e}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$
$\underline{f}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$

22. $V=\mathbb{R}^3,\ W=\mathbb{R}^4,\ f(\bar{x})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\bar{x},\ \underline{e}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right),$
$\underline{f}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$

V následujících úlohách použijte proceduru **gschmidt** systému Matlab k získání ortonormálního systému vektorů ze zadaného systému vektorů S.

23. $S=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

24. $S=\{(1,0,1,1),(1,2,1,3),(0,2,1,1),(0,1,0,0)\}.$

25. Nechť $W\subseteq\mathbb{R}^4$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$ s bází $\underline{e}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$

Najděte ortogonální projekci $\bar{w}$ vektoru $\bar{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do W a vzdálenost $\bar{v}$ od W. Návod: Vzdálenost v od W je definována jako $\|\bar{v}-\bar{w}\|$, tedy jako velikost vektoru $\bar{u}$ kolmého k W a takového, že $\bar{v}=\bar{u}+\bar{w}$. Můžete použít procedury Matlabu **dot** a **norm**.

3.9 Kontrolní otázky

1. Uveďte přesnou definici vektorového prostoru.

2. Mohou mít dvě báze téhož vektorového prostoru různý počet prvků? Jak je to se systémy generátorů daného vektorového prostoru?

3. Pro dva vektorové podprostory $L_1, L_2 \subseteq V$ platí $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 3$, $\dim L_1 + L_2 = 3$. Co můžete říci o vztahu L_1 a L_2? Určete $\dim L_1 \cap L_2$.

4. Je v kontextu předchozí otázky množina $L_1 \cup L_2$ vektorový podprostor V? Jak je to v obecném případě?

5. Uveďte přesnou definici lineárního zobrazení.

6. Rozhodněte, zda zobrazení, které přiřadí reálnému číslu jeho absolutní hodnotu, je lineární.

7. Rozhodněte, zda každé zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jehož grafem je přímka, je lineární.

8. Jaké je jádro prostého lineárního zobrazení?

9. Nechť $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, jehož oborem hodnot je celý prostor $\mathbb{R}^3$. Určete $\dim \ker f$.

10. Dokažte, že ortogonální projekce vektoru na podprostor je lineární zobrazení, aniž byste vyjadřovali ortogonální projekci pomocí souřadnic.

4 Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Vracíme se opět k maticím. Víme již, že lineární zobrazení je určeno vhodnou maticí. V této kapitole studujeme důležité charakteristiky lineárního zobrazení a matice, zvané vlastní čísla a vlastní vektory. Tyto charakteristiky umožní popsat chování matic jednodušším způsobem.

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Hledáme vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x},$$

kde λ je vhodné (reálné nebo komplexní) číslo. Pak postupně dostáváme

$$A\bar{x} - \lambda\bar{x} = \mathbf{0},$$

$$A\bar{x} - \lambda I_n\bar{x} = \mathbf{0},$$

$$(\lambda I_n - A)\bar{x} = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Rovnice (4.1) se nazývá **charakteristická rovnice** příslušná matici A. Jde v podstatě o homogenní soustavu lineárních rovnic vzhledem k neznámým $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zapsanou maticově. Tato soustava má netriviální řešení, právě když je matice soustavy (4.1) singulární, což je právě tehdy, když je determinant této matice nulový; tedy

$$\det(\lambda I_n - A) = 0. \tag{4.2}$$

Výraz na levé straně rovnice (4.2) se nazývá **charakteristický polynom** matice A a jeho kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se nazývají **charakteristické hodnoty** (také **vlastní hodnoty**, po případě **vlastní čísla**) matice A. Řešení $\bar{x}$ soustavy

$$(\lambda_i I_n - A)\bar{x} = \mathbf{0}$$

se nazývá **charakteristický**, nebo také **vlastní vektor** matice A. Množina všech vlastních vektorů matice A se nazývá **charakteristický** nebo také **vlastní podprostor** matice A.

Příklad 4.1 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Za předpokladu, že charakteristický polynom má celočíselné kořeny, můžeme, například s použitím Hornerova schématu, provést rozklad na kořenové činitele

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Odtud již vyplývá, že $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Nejprve zvolíme $\lambda = \lambda_1 = 1$ a řešíme rovnice

$$(1I_3 - A)\bar{x} = \mathbf{0},$$

odkud
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$
Pomocí Gaussovy eliminace, aplikované na rozšířenou matici soustavy (4.3) dostaneme
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$
odkud vyplývá
$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ & x_2 & - \frac{1}{2}x_3 & = & 0. \end{array}$$
Řešením soustavy (4.3) je tedy vektor
$$\begin{pmatrix} -\frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} \\ r \end{pmatrix}$$
pro libovolné (reálné nebo komplexní) číslo r. Tedy pro $r = 2$ je
$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
vlastní vektor matice A příslušný vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$. Zcela analogicky, dosazením $\lambda = \lambda_2 = 2$, popřípadě $\lambda = \lambda_3 = 3$ dostaneme vlastní vektory
$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Můžeme se přesvědčit, že
$$A \cdot \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{v}_1,$$
$$A \cdot \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 2\bar{v}_2$$
a
$$A \cdot \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = 3\bar{v}_3.$$
□

Buďte A, B čtvercové matice řádu n. Řekneme, že A, B jsou podobné, existuje-li čtvercová regulární matice P řádu n taková, že

$$B = P^{-1}AP.$$

Věta 4.1 *Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty.*

Důkaz. Nechť jsou matice A, B podobné. Pak existuje regulární matice P taková, že $B = P^{-1}AP$. Spočítáme charakteristický polynom matic A, B. Platí

$$\begin{aligned} p_\lambda(B) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) = \det(\lambda P^{-1}I_nP - P^{-1}AP) = \\ &= \det[P^{-1}(\lambda I_nP - AP)] = \det[P^{-1}(\lambda I_n - A)P] = \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(\lambda I_n - A) \cdot \det P = \det P^{-1} \cdot \det P \cdot \det(\lambda I_n - A) = \\ &= \det(P^{-1} \cdot P) \cdot \det(\lambda I_n - A) = \det(I_n) \cdot \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - A) = p_\lambda(A). \end{aligned}$$

Obě matice mají stejný charakteristický polynom, tedy stejné jsou i jeho kořeny, charakteristické hodnoty. □

Poznamenejme, že opak Věty 4.1 obecně neplatí. Mohou existovat matice se stejnými vlastními hodnotami i vektory, aniž by byly navzájem podobné.

Věta 4.2 *Vlastní vektory reálné symetrické matice a komplexní samoadjungované matice, které přísluší navzájem různým vlastním hodnotám, jsou navzájem ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.*

Důkaz. Nechť $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{C}^n$ jsou vlastní vektory samoadjungované matice $A = A^{T*}$, příslušné vlastním hodnotám $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak platí $A\bar{x} = \lambda_1\bar{x}$, $A\bar{y} = \lambda_2\bar{y}$, odkud také $\underline{x}A^T = \lambda_1\underline{x}$. Potom

$$\underline{x}A^T\bar{y}^* = \lambda_1\underline{x} \cdot \bar{y}^*$$

a také

$$\underline{x}A^T\bar{y}^* = \underline{x} \cdot (A^*\bar{y}^*) = \underline{x} \cdot (A\bar{y})^* = \underline{x} \cdot (\lambda_2\bar{y})^* = \lambda_2\underline{x} \cdot \bar{y}^*,$$

odkud plyne

$$\lambda_1\underline{x} \cdot \bar{y}^* = \underline{x}A^T\bar{y}^* = \lambda_2\underline{x} \cdot \bar{y}^*.$$

Tedy

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \underline{x} \cdot \bar{y}^* = 0$$

a protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, plyne odtud pro standardní skalární součin vektorů $\bar{x}$, $\bar{y}$

$$\sum_i x_i y_i^* = \underline{x} \cdot \bar{y}^* = 0.$$

Vektory $\bar{x}$, $\bar{y}$ jsou tedy ortogonální. Protože je reálná symetrická matice zvláštním případem komplexní samoadjungované matice, tvrzení platí i pro reálnou symetrickou matici. □

Věta 4.3 *Komplexní samoadjungovaná i reálná symetrická matice mají, včetně násobností, právě n reálných vlastních hodnot.*

Důkaz. Nechť je A samoadjungovaná matice. Pak $A^{T*} = A$. Buď $\bar{x} \neq \mathbf{0}$ vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x},$$

což dává

$$(A\bar{x})^{T*} = \lambda * \underline{x}^*,$$

odkud

$$\underline{x}^* A^{T*} = \lambda^* \underline{x}^*,$$

a nakonec

$$\underline{x}^* A = \lambda^* \underline{x}^*.$$

Pak ovšem

$$\lambda^* \cdot \underline{x}^* \cdot \bar{x} = \underline{x}^* A\bar{x} = \lambda \cdot \underline{x}^* \cdot \bar{x},$$

a vzhledem k tomu, že $\bar{x} \neq 0$, je $\underline{x}^*\bar{x} = \sum_i x_i x_i^*$ kladné číslo, a tedy $\lambda^* = \lambda$. Proto $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\square$

Příklad 4.2 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice A najdeme výpočtem

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2)(\lambda-3) - 4(\lambda+2) = (\lambda+2)(\lambda(\lambda-3)-4) =$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-4).$$

Pokud tedy má být

$$\det(\lambda I_3 - A) = 0,$$

musí být $\lambda = \lambda_1 = -2$, $\lambda = \lambda_2 = -1$, nebo $\lambda = \lambda_3 = 4$. Postupně tedy řešíme

$$(\lambda_i I_3 - A) \cdot \bar{x} = \mathbf{0} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3.$$

Pro $\lambda = \lambda_1 = -2$ máme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Této rozšířené matici a jejímu redukovanému schodovitému tvaru odpovídá řešení

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde r je libovolně volené číslo. Můžeme například volit $r = 1$ a dostaneme

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podobně, pro $\lambda = \lambda_2 = -1$ máme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustavě, kterou představuje tato rozšířená matice, vyhovuje například vektor

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec, pro $\lambda = \lambda_3 = 4$ dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

a

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vektory $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ jsou vlastními vektory matice A, příslušné vlastním hodnotám $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 4$. Můžeme si všimnout, že tyto vektory jsou navzájem ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Položme

$$\bar{h}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_3 = \frac{\bar{v}_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pak $\underline{h} = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \end{pmatrix}$ je ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$ (případně v $\mathbb{C}^3$) tvořená vlastními vektory matice A. $\square$

Věta 4.4 *Buď A čtvercová samoadjungovaná matice, případně symetrická reálná matice řádu n. Pak v $\mathbb{C}^n$, případně v $\mathbb{R}^n$, existuje ortonormální báze, tvořená vlastními vektory matice A.*

Důkaz. Větu dokážeme pro obecnější případ komplexního n-rozměrného prostoru $\mathbb{C}^n$, varianta důkazu s reálnými čísly je analogická. Také je zřejmé, že stačí ukázat existenci báze z vlastních vektorů. Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou ortogonální podle Věty 4.2, v rámci jednoho vlastního podprostoru lze použít například Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ od sebe různé, podle Věty 4.3 však reálné vlastní hodnoty matice A; $L_1, L_2, \ldots, L_r \subseteq \mathbb{C}^n$ k nim příslušné vlastní podprostory. Označme $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_r$, ukážeme, že $L = \mathbb{C}^n$. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme naopak, že $L \subsetneq \mathbb{C}^n$. Pak existují v $\mathbb{C}^n$ vektory ortonormální k L, které tvoří ortogonální doplněk $U = L^\perp$ podprostoru L v $\mathbb{C}^n$. Potom platí

$$\mathbb{C}^n = L_1 + L_2 + \cdots + L_r + U = L + U. \tag{4.4}$$

Buď $\bar{z} \in U$ vektor. Ukážeme, že pak $A\bar{z} \in U$. Protože $A\bar{z} \in \mathbb{C}^n$, podle (4.4) existují vektory $\bar{y}_1 \in L_1$, $\bar{y}_2 \in L_2$, $\ldots$, $\bar{y}_r \in L_r$, $\bar{u} \in U$, tak, že platí

$$A\bar{z} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_r + \bar{u}. \tag{4.5}$$

Pak

$$\begin{aligned} \underline{y}_i^* A\bar{z} &= \underline{y}_i^* \cdot (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_r + \bar{u}) = \underline{y}_i^* \bar{y}_1 + \underline{y}_i^* \bar{y}_2 + \cdots + \underline{y}_i^* \bar{y}_i + \cdots + \underline{y}_i^* \bar{y}_r + \underline{y}_i^* \bar{u} = \\ &= \underline{y}_i^* \bar{y}_i, \end{aligned} \tag{4.6}$$

protože pro $i \neq j$ je $\underline{y}_i^* \bar{y}_j = 0$ standardní skalární součin vektorů y_i, y_j, které jsou podle Věty 4.2 ortogonální. Podobně také $\underline{y}_i \bar{u} = 0$, neboť prostor U je ortogonálním doplňkem prostoru L a platí $\bar{y}_i \in L$, $\bar{u} \in U$. Ale také platí

$$\underline{y}_i^* A\bar{z} = (A\bar{y}_i)^{T*} \bar{z} = (\lambda_i \bar{y}_i)^{T*} = \lambda_i^* \underline{y}_i^* \bar{z} = \lambda_i^* \cdot 0 = 0. \tag{4.7}$$

Kombinací (4.6) a (4.7) dostaneme, že $\|\bar{y}_i\|^2 = \underline{y}_i^* \bar{y}_i = 0$ a tedy $\bar{y}_i = \mathbf{0}$. Ze vztahu (4.5) pak vyplývá, že $A\bar{z} = \bar{u} \in U$.

Nyní ukážeme, že rovnice

$$A\bar{z} = \lambda\bar{z} \tag{4.8}$$

má řešení v U, což povede ke sporu s tím, že L je prostor všech vlastních vektorů matice A. Zvolme v U ortonormální bázi $\underline{h} = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \ldots & \bar{h}_k \end{pmatrix}$ a shodně označme matici

$$H = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \ldots & \bar{h}_k \end{pmatrix}$$

tvořenou ze sloupcových vektorů této báze. Pro vektor $\bar{u} \in U$ můžeme psát

$$\bar{u} = \underline{h} \cdot \tilde{u} = H \cdot \tilde{u},$$

což je vyjádření vektoru $\bar{u}$ v bázi $\underline{h}$ prostoru U. Protože je báze $\underline{h}$ ortonormální, je nutně

$$H^{T*}H = I_k.$$

Uvažujme rovnici

$$H^{T*}AH\tilde{z} = \lambda\tilde{z}. \tag{4.9}$$

Matice $Q = H^{T*}AH$ je samoadjungovaná (přesvědčte se o tom !), takže existuje reálná vlastní hodnota $\lambda \in \mathbb{R}$ a sloupcový vektor $\tilde{z} \in \mathbb{C}^k$, které rovnici (4.9) splňují. Položíme

$$\bar{z} = H \cdot \tilde{z}. \tag{4.10}$$

Odtud mimo jiné plyne, že $\bar{z} \in U$ jakožto lineární kombinace vektorů $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_k \in U$. Nyní rozšíříme matici H o dalších $n-k$ sloupců, navzájem ortonormálních vektorů z L_1, L_2, ..., L_r tak, aby vzniklá matice H' byla čtvercová n-rozměrná matice. Vzhledem k ortonormálnosti vektorů, které tvoří sloupce matice H platí

$$H'^{T*} \cdot H' = I_n,$$

a jak jsme ukázali v poznámce za Větou 1.15, také platí

$$H' \cdot H'^{T*} = I_n.$$

Tedy matice H', H'^{T*} jsou vzájemně inverzní. Nyní vyjádříme vektor $\bar{z}$ pomocí matice H'. Vezměme vektor $\tilde{z}$ a rozšiřme ho o dodatečných $n-k$ složek, které jsou rovny nule tak, aby vznikl n-rozměrný vektor $\hat{z}$. Platí tedy

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{z}_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a pak

$$\bar{z} = H' \cdot \hat{z}. \tag{4.11}$$

Z (4.10) a (4.11) plyne $H'\hat{z} = H\tilde{z}$, takže dosazením do (4.9) dostáváme

$$H^{T*}AH'\hat{z} = \lambda\tilde{z}. \tag{4.12}$$

Matice H'^{T*} má oproti H^{T*} navíc $n-k$ řádků. Tyto řádky jsou tvaru $\underline{h}_j^*$, kde $j \in \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$, přičemž $\bar{h}_j \in L_{i_j}$, kde $i_j \in \{1, 2, \ldots r\}$ je vhodné číslo. Přitom

$$\underline{h}_j^* A = (A\bar{h}_j)^{T*} = (\lambda_{i_j}\bar{h}_j)^{T*} = \lambda_{i_j}\underline{h}_j^*,$$

a tedy

$$\underline{h}_j^* A\bar{z} = \lambda_{i_j}\underline{h}_j^*\bar{z} = 0,$$

neboť $\bar{h}_j$, $\bar{z}$ patří do navzájem ortogonálních prostorů, po řadě L, U. Pak ovšem (4.12) lze rozšířit na

$$H'^{T*}AH'\hat{z} = \lambda\hat{z}. \tag{4.13}$$

Když vynásobíme (4.13) z leva maticí H', dostaneme

$$AH'\hat{z} = \lambda H'\hat{z},$$

odkud, s pomocí (4.11), plyne

$$A\bar{z} = \lambda\bar{z}.$$

Tedy $\bar{z}$ je vlastní vektor matice A, příslušející hodnotě λ, který nepatří do žádného z vlastních podprostorů L_1, L_2,... L_r, což je spor. □

Během důkazu jsme se setkali s maticí H', k níž inverzní matici bylo možné získat velmi snadno, pouhým transponováním a náhradou všech prvků matice komplexně sdruženými čísly. Taková matice se nazývá **unitární**. Pokud pracujeme s reálnými maticemi, operace komplexního sdružení nemá na matici vliv. V takovém případě říkáme, že je daná matice maticí **ortogonální**.

Věta 4.5 *Nechť A je samoadjungovaná matice, případně reálná symetrická matice řádu n. Pak existuje unitární, případně ortogonální matice H taková, že $D = H^{-1}AH$ je diagonální matice, která v diagonále obsahuje vlastní čísla matice A.*

Důkaz. Podle Věty 4.4 existuje v $\mathbb{C}^n$, případně $\mathbb{R}^n$, báze z vlastních vektorů. Vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou v případě samoadjungované komplexní matice nebo reálné symetrické matice automaticky ortogonální podle Věty 4.2, v rámci jednoho daného vlastního podprostoru najdeme navzájem ortogonální generátory Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Nalezené vektory podělíme jejich normou, čímž dostaneme tedy celkem n navzájem ortogonálních a jednotkových vlastních vektorů, tj. ortonormální bázi, řekněme $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, ..., $\bar{h}_n$. Těmto vektorům odpovídají vlastní hodnoty (z nichž některé mohou být stejné) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sloupcově zapsané vektory seřadíme do matice

$$H = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \ldots & \bar{h}_n \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$A \cdot H = \begin{pmatrix} A\bar{h}_1 & A\bar{h}_2 & \ldots & A\bar{h}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\bar{h}_1 & \lambda_2\bar{h}_2 & \ldots & \lambda_n\bar{h}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \ldots & \bar{h}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 4.3 Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Její normované a ortogonální vlastní vektory, příslušné vlastním číslům $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 4$ jsou po řadě

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

neboť tak jsme je určili v Příkladě 4.2. Pak

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

a také

$$H^{-1} = H^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Můžeme ověřit, že

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

4.1 Klíčové myšlenky kapitoly

- Vlastní hodnoty matice získáme řešením tzv. charakteristické rovnice.
- Vlastní vektory matice získáme řešením jisté homogenní soustavy lineárních rovnic.
- Symetrická nebo samoadjungovaná matice má všechny vlastní hodnoty reálné.
- Z vlastních vektorů symetrické nebo samoadjungované matice řádu n lze vytvořit bázi v $\mathbb{R}^n$.
- Pokud lze z vlastních vektorů čtvercové matice vytvořit bázi, lze tuto matici převést podobnostní transformací na diagonální tvar.
- Vlastní vektory symetrické nebo samoadjungované matice příslušné různým vlastním hodnotám jsou navzájem ortogonální.
- Symetrickou nebo samoadjungovanou matici lze převést podobnostní transformací na diagonální tvar pomocí ortogonální matice.

4.2 Cvičení N

1. K dané matici najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\Big[$ Výsledek: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Big]$. □

2. K dané matici najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2,\ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Big]$. □

3. K dané matici najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Big[$ Výsledek: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4,\ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Big]$. □

4. K dané matici najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\left[\text{Výsledek: } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = -2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$

$\left. v_4 = \begin{pmatrix} 29 \\ 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right].$ □

5. K dané matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ najděte matici P takovou, že $D = P^{-1}AP$ je diagonální matice.

$\left[\text{Výsledek: } P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right].$ □

6. K dané matici $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ najděte matici P takovou, že $D = P^{-1}AP$ je diagonální matice.

$\left[\text{Výsledek: } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right].$ □

7. K dané matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ najděte ortogonální matici Q takovou, že $D = Q^{-1}AQ$ je diagonální matice.

$\left[\text{Výsledek: } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right].$ □

8. K dané matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ najděte ortogonální matici Q takovou, že $D = Q^{-1}AQ$ je diagonální matice.

$\left[\text{Výsledek: } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right].$ □

9. K dané matici $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ najděte ortogonální matici Q takovou, že $D = Q^{-1}AQ$ je diagonální matice.

$\Bigg[$ Výsledek: $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ $\Bigg]$. □

10. Najděte báze v podprostorech vlastních vektorů, příslušných vlastním hodnotám matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\Bigg[$ Výsledek: $\lambda_1 = 0$, $\underline{e}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$; $\lambda_2 = 2$, $\underline{e}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Báze v podprostoru vlastních vektorů není určena jednoznačně, tedy i jiné řešení může být správné. $\Bigg]$.
□

4.3 Cvičení M

Příkaz **eig** v Matlabu vytvoří vlastní hodnoty a množinu ortonormálních vlastních vektorů symetrické matice A. Tento příkaz použijte ve tvaru

$$[V, D] = \mathbf{eig}(A).$$

Matice V bude obsahovat ortonormální vlastní vektory matice A a D bude diagonální matice, v jejíž diagonále budou odpovídající vlastní hodnoty.

V příkladech 1 až 3 použijte **eig** k nalezení vlastních hodnot matice A a ortogonální matice Q takové, že $Q^T AQ$ je diagonální matice.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příkaz **eig** může být aplikován na jakoukoli čtvercovou matici A, ale matice V vlastních vektorů nemusí být ortogonální. V následujících cvičeních 4 až 7 rozhodněte, jestli V je ortogonální. Pokud není, rozhodněte, zda může být pro konkrétní zadanou matici A matice V nahrazena ortogonální maticí.

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4 Kontrolní otázky

1. Definujte pojem vlastní hodnoty a vlastního vektoru.

2. O čtvercové matici A víte pouze, že je singulární. Uveďte aspoň jednu její vlastní hodnotu.

3. Uveďte příklad matice, která má reálné vlastní hodnoty, ale není symetrická.

4. Uveďte příklad regulární matice řádu 3, která má pouze jedinou vlastní hodnotu, které však přísluší tři nezávislé vlastní vektory.

5. Ukažte, že každá ortogonální matice má determinant, jehož absolutní hodnota je 1.

6. Uveďte příklad ortogonální matice řádu 3, jejíž determinant je -1.

5 Kvadratické formy

V této kapitole aplikujeme naše získané poznatky o maticích na studium kvadratických forem. Kvadratické formy jsou důležitým nástrojem popisu chování některých fyzikálních veličin a slouží také k vyjádření jistých dvourozměrných ploch ve třírozměrném prostoru.

Kvadratická forma řádu n je zobrazení $\mathcal{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ přiřadí číslo $\mathcal{K}(x)$ podle předpisu

$$\mathcal{K}(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n.$$

Tento definiční vztah je možné psát maticově

$$\mathcal{K}(x) = \underline{x}A\bar{x},$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

je reálná symetrická matice.

Příklad 5.1 Je dána kvadratická forma $\mathcal{K}(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Naším úkolem je určit, jakou plochu tvoří množina bodů v $\mathbb{R}^3$, které vyhovují rovnici $\mathcal{K}(x) = 4$.

Maticově vyjádříme kvadratickou formu vztahem

$$\mathcal{K}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Změnou báze můžeme převést matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

na diagonální tvar. Tento tvar bude forma $\mathcal{K}(x)$ mít v ortonormální bázi, tvořené vlastními vektory matice A. Diagonální tvar matice A ovšem můžeme zjistit i bez toho, abychom počítali konkrétní vlastní vektory. Stačí znát vlastní čísla. Řešíme rovnici

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Po úpravě máme

$$4\lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0,$$

odkud plyne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$. V nových souřadnicích bude mít forma $\mathcal{K}(x)$ tvar

$$\mathcal{K}(x) = \underline{x}'D\bar{x}', \tag{5.1}$$

kde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Můžeme si položit přirozenou otázku, na čem závisí pořadí vlastních hodnot v diagonální matici D. Odpověď je taková, že pořadí určí to, v jakém pořadí jsou řazeny příslušné vlastní vektory do transformační matice H, která danou matici A na diagonální tvar převádí vztahem $D = H^{-1}AH$. Tedy daná matice A má více diagonálních tvarů, které se liší pořadím svých (diagonálních) prvků. Ale vraťme se k naší kvadratické formě. Z maticového vyjádření (5.1) získáme roznásobením

$$\mathcal{K}(x) = x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 - \frac{1}{2}x_3'^2.$$

Nyní se zaměříme na to, jaký typ plochy v $\mathbb{R}^3$ vytvoří množina všech řešení rovnice

$$\mathcal{K}(x) = 4,$$

tedy

$$x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 - \frac{1}{2}x_3'^2 = 4.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{x_1'^2}{4} - \frac{x_2'^2}{8} - \frac{x_3'^2}{8} = 1,$$

odkud

$$\frac{x_1'^2}{2^2} - \frac{x_2'^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{x_3'^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1. \tag{5.2}$$

Vztah (5.2) je tzv. kanonický tvar kvadratické plochy a ze střední školy bychom měli již znát příslušnou klasifikaci. Pokud si stále nejsme jisti, převedeme jednu ze souřadnic na druhou stranu, kde ji považujeme za konstantní. Tím vlastně provedeme řez dané kvadratické plochy rovinou rovnoběžnou s jednou ze tří souřadnicových rovin. Problém se převádí na klasifikaci křivek, které vzniknou příslušným řezem, a s tím bychom si už měli poradit, pokud si nepamatujeme příslušné kanonické tvary kvadratických ploch. Převedeme-li například souřadnici x_1' vpravo, dostaneme po úpravě

$$\frac{x_2'^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{x_3'^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{x_1'^2}{4} - 1$$

Odtud je již vidět, že na řezu dostáváme kružnice, pokud je $|x_1'| > 1$. Pro $|x_1'| \leq 1$ nemá rovnice řešení, plocha tedy bude dvoudílná, rotačně symetrická, osou rotace bude souřadnicová osa x_1'. Provedeme-li podobnou úpravu se souřadnicí x_2', dostaneme

$$\frac{x_1'^2}{2^2} - \frac{x_3'^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1 + \frac{x_2'^2}{8}$$

a na řezu tedy vzniká hyperbola. Analogicky, hyperbolu dostaneme i ve třetím řezu s pevnou souřadnicí x_3'. Plocha je tedy dvoudílný rotační hyperboloid.

□

Na kvadratické formě z Příkladu 5.1 si můžeme všimnout, že dosazením různých hodnot vektoru x může být hodnota $\mathcal{K}(x)$ kladná, nulová nebo záporná. Také si můžeme všimnout toho, že výsledná hodnota závisí, kromě zvolené hodnoty x, také na formě samotné; v podstatě na vlastních číslech její matice. Tomuto jevu se souhrnně říká **definitnost** kvadratických forem. Tento pojem dále upřesníme, jedná se o důležitou charakteristiku kvadratických forem a protože jsou tyto formy reprezentovány zpravidla reálnými symetrickými maticemi, i o charakteristiku těchto matic.

Buď $\mathcal{K}(x) = \underline{x}A\bar{x}$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že je $\mathcal{K}(x)$

(i) **pozitivně definitní**, jestliže $\mathcal{K}(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq o$,

(ii) **pozitivně semidefinitní**, jestliže $\mathcal{K}(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, přičemž existuje $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq o$, že $\mathcal{K}(x) = 0$.

(iii) **negativně definitní**, jestliže $\mathcal{K}(x) < 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq o$,

(iv) **negativně semidefinitní**, jestliže $\mathcal{K}(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, přičemž existuje $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq o$, že $\mathcal{K}(x) = 0$.

(v) **indefinitní** jinak, tj. ve všech ostatních případech.

Buď A matice řádu n. Nechť B je matice, vzniklá z matice A odstraněním $n-k$ řádků a stejného počtu sloupců, $1 \leq k \leq n$. Pak $\det B$ se nazývá **minor** matice A řádu k. Minor $\det B$ se nazývá **hlavní**, jsou-li diagonální prvky matice B zároveň diagonálními prvky matice A. Hlavní minor se nazývá **rohový**, je-li matice B tvořena prvními k řádky a prvními k sloupci matice A.

Věta 5.1 *Kvadratická forma $\mathcal{K}(x) = \underline{x}A\bar{x}$ na $\mathbb{R}^n$ je*

(i) *pozitivně definitní, právě když jsou všechny rohové hlavní minory matice A kladné, což nastává právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A kladná;*

(ii) *pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechny hlavní (nikoli pouze rohové) minory matice A nezáporné, což nastává právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná;*

(iii) *negativně definitní, právě když jsou všechny rohové hlavní minory matice A nenulové, střídavých znamének, přičemž $a_{11} < 0$, což nastává právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A záporná;*

(iv) *negativně semidefinitní, právě když jsou hlavní (nikoli pouze rohové) minory lichého řádu nekladné a sudého řádu nezáporné, což nastává právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla matice A nekladná.*

Důkaz. Důkaz vyplývá přímo z možnosti vyjádřit kvadratickou formu $\mathcal{K}(x)$ v diagonálním tvaru

$$\mathcal{K}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 5.2 Je dána kvadratická forma

$$\mathcal{K}(x) = 6x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + x_3^2.$$

Její matice je

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$a_{11} = 6 > 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21 > 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det A = 30 - 5 - 9 = 16 > 0.$$

Rohové hlavní minory matice A jsou tedy kladné, z čehož plyne, že forma $\mathcal{K}(x)$ je pozitivně definitní.

□

5.1 Klíčové myšlenky kapitoly

- Kvadratickou formu $\mathcal{K}(\vec{x})$ lze vyjádřit pomocí bilineárního zobrazení se symetrickou maticí, jehož první i druhý argument je stejný vektor $\vec{x}$.
- Ve vhodných souřadnicích má matice kvadratické formy diagonální tvar.
- Definitnost kvadratické formy je určena jejími vlastními hodnotami.
- Aniž bychom museli převádět kvadratickou formu na diagonální tvar a zjišťovat její vlastní hodnoty, můžeme definitnost kvadratické formy zjistit podle znamének jejích hlavních minorů.

5.2 Cvičení NM

Kde je to možné a vhodné, použijte ke kontrole výpočtu MATLAB nebo jiný matematický software.

1. Najděte matici kvadratické formy $\mathcal{K}(x) = -3x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2$.

$\left[\text{ Výsledek: } A = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix} \right]$. □

2. Najděte matici kvadratické formy $\mathcal{K}(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_1x_3 + 7x_2x_3$.

$\left[\text{ Výsledek: } A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix} \right]$. □

3. Najděte matici kvadratické formy $\mathcal{K}(x) = 3x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2$.

$\left[\text{ Výsledek: } A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \right]$. □

4. Rozhodněte o definitnosti kvadratické formy s maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{ Výsledek: pozitivně definitní } \right]$. □

5. Rozhodněte o definitnosti kvadratické formy s maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{ Výsledek: indefinitní } \right]$. □

6. Rozhodněte o definitnosti kvadratické formy s maticí $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{ Výsledek: negativně definitní } \right]$. □

7. Rozhodněte o definitnosti kvadratické formy $\mathcal{K}(x) = -6x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 5x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3$.

$\left[\text{ Výsledek: negativně definitní } \right]$. □

8. Rozhodněte o definitnosti kvadratické formy $\mathcal{K}(x) = 5x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3$.

$\Big[$ Výsledek: pozitivně semidefinitní $\Big]$. □

9. Kvadratickou formu $\mathcal{K}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ převeďte (ortogonální transformací souřadnic) na diagonální tvar a určete její definitnost.

$\Big[$ Výsledek: $K(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2$, pozitivně semidefinitní $\Big]$. □

10. Kvadratickou formu $\mathcal{K}(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ převeďte (ortogonální transformací souřadnic) na diagonální tvar a určete její definitnost.

$\Big[$ Výsledek: $K(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + 4x_3'^2$, pozitivně definitní $\Big]$. □

11. Určete typ kvadratické plochy v $\mathbb{R}^3$ dané rovnicí

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 1.$$

$\Big[$ Výsledek: elipsoid $\Big]$. □

12*. Určete typ kvadratické plochy v $\mathbb{R}^3$ dané rovnicí

$$2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz - 8yz + 8x = 15.$$

Návod: Použijte nejprve lineární transformaci souřadnic (vhodnou substituci), pomocí níž eliminujete lineární člen $8x$.

$\Big[$ Výsledek: jednodílný hyperboloid $\Big]$. □

5.3 Kontrolní otázky

1. Uveďte přesnou definici kvadratické formy.

2. Kvadratická forma $\mathcal{K}$ má matici s vlastními hodnotami $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 1$. Určete její definitnost.

3. Je možné, aby matice kvadratické formy měla vlastní číslo $\lambda = -i$? Odpověď zdůvodněte.

4. Rozhodněte, zda zobrazení, které přiřadí vektoru $\vec{x}$ hodnotu skalárního součinu $\sigma(\vec{x}, \vec{x})$, je kvadratická forma. Pokud ano, jakou má definitnost? Záleží odpověď na předchozí otázku na tom, jakou má daný skalární součin Gramovu matici?

6 Tenzory na reálném vektorovém prostoru

Zobecněním lineárních vztahů mezi veličinami jsou vztahy multilineární. Nástrojem vhodným k popisu takových vztahů jsou tenzory. Se speciálními případy tenzorů jsme se již setkali v předchozích kapitolách.

Tenzor je reálná funkce několika vektorových argumentů, která má určité speciální vlastnosti. Příkladem tenzoru je například skalární součin, který dvojici vektorů přiřadí reálné číslo. Jiným příkladem tenzoru je determinant čtvercové matice, který opět několika vektorům, které tvoří sloupce dané matice, přiřadí reálné číslo.

V této kapitole budeme označovat $V = \mathbb{R}^m$. Zobrazení $\varphi : V^k \to \mathbb{R}$ se nazývá ***k*-lineární** nebo také ***k*-tenzor** na V, jestliže je lineární v každém ze svých k vektorových argumentů při libovolných, avšak pevných hodnotách zbývajících $k-1$ argumentů. Speciálně, 1-tenzor se nazývá **lineární formou** na V. Podobně, 2-tenzor se nazývá **bilineární formou** na V. Množinu všech k-tenzorů na vektorovém prostoru V budeme značit T^kV. Můžeme si všimnout, že tato množina má strukturu reálného vektorového prostoru. Skutečně, pro libovolné dva tenzory $\varphi, \psi \in T^kV$ a číslo $c \in \mathbb{R}$ položme

$$(\varphi + \psi)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_k) + \psi(v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

a

$$(c \cdot \varphi)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = c \cdot \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

Snadno se prověří, že $(T^kV, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Pokusme se zjistit, jak bude tenzor reprezentován v případě, že jeho vektorové argumenty vyjádříme v bázi. Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ jsou vektory, $\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_m \end{pmatrix}$ báze ve V. Každý vektor v_i lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, tedy

$$v_i = \underline{e}\bar{v} = v_i^j e_j,$$

kde jsme úmyslně vynechali sumační symbol $\sum_i$, neboť používáme v tenzorovém počtu běžnou tzv. Einsteinovu sumační symboliku. V této symbolice nebudeme vypisovat symbol sumy a budeme automaticky předpokládat, že opakování indexu znamená součet přes všechny jeho hodnoty. Je zřejmé, že sčítací index může být v průběhu výpočtu libovolně přejmenován, zatímco u volných indexů se musíme držet původního označení.
Z linearity v každé složce dostaneme

$$\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \varphi(v_1^{j_1} e_{j_1}, v_2^{j_2} e_{j_2}, \ldots, v_k^{j_k} e_{j_k}) = v_1^{j_1} v_2^{j_2} \ldots v_k^{j_k} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k})$$

a označíme-li

$$\varphi_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k}),$$

můžeme psát

$$\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_k) = v_1^{j_1} v_2^{j_2} \ldots v_k^{j_k} \varphi_{j_1 j_2 \ldots j_k}.$$

O k-rozměrném poli čísel $\varphi_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ pak říkáme, že reprezentuje tenzor φ v bázi $\underline{e}$. Vskutku, tato čísla nezávisí na volbě vektorů v_1, v_2,..., v_k a naopak závisí pouze na zvoleném tenzoru φ a zvolené bázi $\underline{e}$.

Příklad 6.1 Tenzor $\varphi \in T^2\mathbb{R}^3$ je dán maticí

$$(\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

která jej reprezentuje v standardní bázi na $\mathbb{R}^3$. Určíme hodnotu $\varphi(u, v)$ kde vektory u, v jsou dány složkami

$$(u^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (v^j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

opět ve standardní bázi. Platí

$$\varphi(u, v) = u^i v^j \varphi_{ij},$$

takže sčítací index pro složky vektoru u bude řádkový index matice (φ_{ij}), sčítací index pro složky vektoru v bude tedy druhý z indexů, tedy j. Pak

$$\varphi(u, v) = \underline{u} \cdot (\varphi_{ij}) \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3.$$

$\square$

6.1 Duální prostor

Jak již bylo řečeno, lineární formy, nebo-li 1-tenzory tvoří jednoduchý, ale významný příklad k-tenzorů a proto stojí za zvlášť pečlivé prozkoumání. Nechť vektor $v \in V$ má vyjádření v bázi $\underline{e}$ dané vztahem

$$v = v^i e_i. \tag{6.1}$$

Zvolme index i pevně a uvažujme o zobrazení $e^i : V \to \mathbb{R}$, daném vztahem

$$e^i(v) = v_i.$$

Snadno se ověří, že zobrazení e^i je lineární forma (proveďte jako cvičení) a také, že platí

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j. \end{cases}$$

Je-li $\omega : V \to \mathbb{R}$ libovolná lineární forma, můžeme, na základě její linearity, psát

$$\omega(v) = \omega(v^i e_i) = v^i \omega(e_i) = \omega(e_i) e^i(v) = \omega_i e^i(v), \tag{6.2}$$

přičemž jsme označili $\omega_i = \omega(e_i)$. Odtud plyne

$$\omega = \omega_i e^i. \tag{6.3}$$

Vidíme tedy, že jsme vyjádřili formu ω jako lineární kombinaci forem e^1, e^2,..., e^m s koeficienty $\omega_i = \omega(e_i)$. Snadno se prověří, že jsou formy e^1, e^2,..., e^m lineárně nezávislé. Vskutku, nechť

$$\alpha_i e^i = 0. \tag{6.4}$$

Pak

$$0 = \big(\alpha_i e^i\big)(e_j) = \alpha_i e^i(e_j) = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_j.$$

Koeficienty v lineární kombinaci (6.4) jsou nutně nulové, což znamená, že formy e^1, e^2,..., e^m jsou lineárně nezávislé. Označme $T^1V = V^*$; z předchozích úvah máme

$$\dim V^* = m.$$

Prostor V^* lineárních forem na V má tedy dimenzi m. Nazývá se **duální vektorový prostor** k V.

Příklad 6.2 Nechť $V = \mathbb{R}^3$. Standardní báze ve V je tedy tvořena vektory

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Libovolný vektor $v \in V$ se vyjádří jako lineární kombinace báze ve tvaru

$$v = \underline{e} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \cdot \bar{v} = I_3 \bar{v} = \bar{v}$$

a je tedy roven sloupcovému vektoru svých vlastních složek. Lineární forma, jakožto každé lineární zobrazení musí být reprezentovatelná jistou maticí, jak jsme zjistili v Kapitole 3, odstavci 3.3. Aby výsledkem aplikace formy na vektor bylo jedno reálné číslo, musí být tato matice jednořádková. Lineární formy jsou tedy reprezentovány řádkovými vektory, mezi nimiž zvláštním případem jsou formy

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

které tvoří tzv. duální bázi v prostoru lineárních forem V^*. Přitom aplikace formy na vektor spočívá v maticovém násobení. Můžeme si všimnout, že skutečně platí

$$e^i(e_j) = e^i \cdot e_j = \delta^i_j,$$

kde tečka v prostředním výrazu *zde* znamená maticové násobení.

□

Pokud si dále všimneme, jak se lineární forma aplikuje na vektor a jakou roli v tom hrají složky, vidíme, že platí

$$\omega(v) = \omega_i v^i, \tag{6.5}$$

což velmi neodbytně připomíná standardní skalární součin dvou reálných m-rozměrných vektorů. Abychom však mohli vztah (6.5) považovat za skalární součin, musíme pracovat s oběma vektory ze stejného vektorového prostoru, tedy buď se „základními" vektory z V, nebo s „odvozenými" formami z V^*. Potřebujeme tedy kanonické, bijektivní a lineární zobrazení $h : V^* \to V$, které z lineární formy z V^* vyrobí vhodným způsobem vektor z V (popřípadě zobrazení, které vede přesně obráceně a je k h inverzní). Platí

$$h(\omega) = h(\omega_i e^i) = \omega_i h(e^i) = \omega_i h^j(e^i) e_j, \tag{6.6}$$

což je zatím pouze obecné vyjádření lineárního zobrazení $h : V^* \to V$ v příslušných bázích. Konkrétní kanonické zobrazení h dostaneme tím, jak předepíšeme chování h na bázických vektorech z V^*. Abychom dosáhli požadovaného cíle a mohli díky zobrazení h pracovat s lineárními formami, jako by to byly prvky „základního" prostoru V, předepíšeme h tím nejjednodušším možným způsobem, totiž

$$h(e^i) = e_i.$$

Pak

$$e_i = h(e^i) = h^j(e^i) e_j,$$

odkud

$$h^j(e^i) = \delta^{ij}.$$

Vztah (6.6) pak má tvar

$$h(\omega) = \omega_i \delta^{ij} e_j \tag{6.7}$$

a zároveň platí

$$h(\omega) = \omega^j e_j.$$

Protože je vyjádření vektoru v bázi jednoznačné, máme

$$\omega^j = \omega_i \delta^{ij}. \tag{6.8}$$

Ve vztazích (6.7) a (6.8) je pochopitelně $\omega_i = \omega^i$, funkce Kroneckerova delta δ^{ij} je pouze a čistě formální – slouží pouze k „ zvednutí" indexu. Zobrazení $h : V^* \to V$ funguje prostě a jednoduše tak, že vezme složky lineární formy, vyjádřené jako lineární kombinace báze tvořené formami e^1, e^2,..., e^m a použije je jako koeficienty lineární kombinace bázických vektorů e_1, e_2,..., e_m v „ základním" prostoru V. Tím určité formě

$$\omega = \omega_1 e^1 + \omega_2 e^2 + \cdots + \omega_m e^m \in V^*$$

odpovídá vektor

$$h(\omega) = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \cdots + \omega_m e_m \in V.$$

Příklad 6.3 V kontextu Příkladu 6.2 spočívá zobrazení h v operaci transponování lineární formy, reprezentované řádkovým vektorem, na vektor sloupcový. Například,

$$h\Big(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

□

Situace se poněkud změní, jestliže přejdeme ve V k jiné bázi, tvořené vektory e'_1, e'_2,…, e'_m. Mezi oběma bázemi existují transformační vztahy, vyjádřené maticí přechodu. V této kapitole používané Einsteinově sumační symbolice mají tyto transformační vztahy tvar

$$e'_i = t^j_i e_j. \tag{6.9}$$

Vektor $v \in V$ vyjádříme v „čárkované” bázi pomocí vztahu

$$v = v'^i e'_i = v'^i t^j_i e_j,$$

což srovnáním s (6.1) dá

$$v^j = v'^i t^j_i. \tag{6.10}$$

Pomocí stejného vztahu se transformují i složky ω^i vektoru $h(\omega) \in V$; i tento vektor bychom mohli vyjádřit pomocí „čárkovaných” složek ω'^i v „čárkované” bázi e'_i. Mezi složkami tedy platí transformační vztah

$$\omega^j = \omega'^i t^j_i. \tag{6.11}$$

Nyní do (6.5) vložme „navíc” Kroneckerovo delta a postupně dosaďme z (6.8), (6.10) a (6.11).

$$\omega(v) = \omega_i v^i = \omega_i \delta^{ij} v^j = \omega^j v^j = \omega'^i t^j_i t^j_k v'^k \tag{6.12}$$

Zaměřme se na rovnost posledních dvou výrazů v (6.12), a zapomeňme na chvíli na prostor lineárních forem a na cestu, po níž jsme k těmto výrazům dospěli. Člen

$$\omega^j v^j$$

představuje z hlediska prostoru V standardní skalární součin dvou vektorů, jejichž složky v ortonormální bázi jsou ω^i a v^i. Jemu je roven výraz

$$\omega'^i t^j_i t^j_k v'^k,$$

který představuje tentýž skalární součin dvou stejných vektorů, jejichž složky ω'^i a v'^i jsou nyní vyjádřeny vzhledem k jiné, ne nutně ortonormální bázi ve V. Povšimněme si ještě výrazu

$$g_{ik} = t_i^j t_k^j.$$

Matice

$$G = (g_{ik})$$

je Gramovou maticí standardního skalárního součinu ve V vzhledem k „čárkované" bázi tvořené vektory e'_1, $e'_2, \ldots$, e'_m. Poznamenejme, že teoretičtí fyzikové tomuto skalárnímu součinu, který je podle definice symetrickým 2-tenzorem, říkají **metrický tenzor**. Z toho, co již víme o skalárním součinu můžeme vyvodit, že číslo g_{ij} (pro pevné indexy i, j) je rovno skalárnímu součinu vektorů e'_i a e'_j. V ve speciálním případě ortonormální báze je pak matice G jednotková a platí $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Vztah (6.12) můžeme pomocí metrického tenzoru přepsat na

$$\omega(v) = \omega'^i g_{ij} v'^j. \tag{6.13}$$

Příklad 6.4 Budeme pokračovat v Příkladě 6.2 a 6.3. Nechť

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mezi bázemi $\underline{e}$ a $\underline{e}'$ ve V je vztah

$$\underline{e}' = \underline{e} \cdot T,$$

a protože sloupce báze $\underline{e}$ tvoří jednotkovou matici, matice přechodu je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

matice k ní inverzní je

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Duální báze k bázi $\underline{e}'$ je tvořena řádky matice S, tedy

$$e'^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad e'^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad e'^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Přitom platí

$$\bar{e}' = S \cdot \bar{e},$$

a tedy S je i maticí přechodu od duální báze $\bar{e} = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}$ k duální bázi $\bar{e}' = \begin{pmatrix} e'^1 \\ e'^2 \\ e'^3 \end{pmatrix}$.
Pro složky vektoru $v \in V$ platí

$$\bar{v} = T \cdot \bar{v}',$$

takže, je-li ω lineární forma reprezentovaná řádkovým vektorem $\underline{\omega}$ vzhledem k bázi $\underline{e}$, je

$$\omega(v) = \underline{\omega} \cdot \bar{v} = \underline{\omega} \cdot T \cdot \bar{v}',$$

takže

$$\underline{\omega}' = \underline{\omega} \cdot T$$

je řádkový vektor, který reprezentuje formu ω vzhledem k bázi $\underline{e}'$. Konkrétně, je-li například

$$\omega = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

je také

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a

$$\underline{\omega}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\omega(v) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \bar{v}.$$

Můžeme si také všimnout, že $\underline{\omega}'$ jsou složky formy ω v duální bázi $\bar{e}$ prostoru V^*. Platí totiž

$$\omega = \underline{\omega} \cdot \bar{e} = \underline{\omega} \cdot T \cdot S \cdot \bar{e} = \underline{\omega}' \cdot \bar{e}',$$

a pro konkrétní výše uvedenou formu ω pak

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e'^1 \\ e'^2 \\ e'^3 \end{pmatrix} = e'^1 + 4\, e'^2 + e'^3.$$

Standardní skalární součin, který má ve standardní bázi $\underline{e}$ prostoru V jednotkovou Gramovu matici a tedy vyjádření

$$\sigma(u, v) = u^i v^i = \underline{u} \cdot \bar{v},$$

má vyjádření v „čárkované” bázi

$$\sigma(u, v) = \underline{u}' \cdot T^T \cdot T \cdot \bar{v}'$$

a tedy jeho Gramova matice v této bázi je

$$G = T^T T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jak jsme již ukázali v Příkladě 6.3, je

$$h(\omega) = (\underline{\omega})^T = \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tento sloupcový vektor můžeme vyjádřit v „čárkované" bázi

$$h(\omega) = \underline{e}' \cdot \bar{h}'(\omega),$$

kde

$$\bar{h}'(\omega) = T^{-1} \cdot \bar{h}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pak můžeme vyjádřit aplikaci formy ω na vektor v pomocí skalárního součinu (nebo-li metrického tenzoru)v prostoru V vzhledem k „čárkované" bázi. Výsledek musí být tentýž, jako jsme spočítali výše. A vskutku,

$$\omega(v) = \sigma(h(\omega), v) = (\bar{h}'(\omega))^T G \bar{v}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bar{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \bar{v}'.$$

Ještě bychom mohli spočítat hodnotu formy ω na nějakém konkrétním vektoru, například

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Jeho složky v bázi $\underline{e}$ jsou shodné se samotným vektorem v, tedy $\bar{v} = v$, složky v „čárkované" bázi $\underline{e}'$ dostaneme

$$\bar{v}' = T^{-1}\bar{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

V obou bázích pak shodně dostáváme, že

$$\omega(v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = 25.$$

□

Myšlenka počítat skalární součin (nebo-li hodnotu metrického tenzoru) na dvou vektorech, aniž bychom potřebovali Gramovu matici (nebo-li soubor koeficientů g_{ij}) je poměrně svůdná a lákavá (pro některé matematiky a teoretické fyziky) a vedla ke vzniku následujících pojmů. Kdybychom označili

$$v''^i = g_{ij} v'^j, \tag{6.14}$$

můžeme čísla v''^i považovat za složky vektoru $v \in V$ v jisté bázi $e''_1, e''_2, \ldots, e''_m$ (obecně odlišné) od „čárkované" báze, kterou označíme za **kovariantní bázi** ve V a číslům v_i budeme říkat **kovariantní složky** vektoru $v \in V$. Čárkované bázi budeme říkat **kontravariantní báze** ve V. Číslům v'^i budeme říkat **kontravariantní** složky vektoru $v \in V$. Protože maticí přechodu od kovariantní báze ke kontravariantní bázi (báze se transformují opačně, tj. inverzní maticí, než složky) je Gramova matice $G = (g_{ij})$, v případě, že je jedna z obou bází ortonormální, obě báze splývají. Tak je tomu například v případě standardní báze (zde „nečárkované") s vektory $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Ta je současně kontravariantní i kovariantní. Vztah (6.13) můžeme přepsat do tvaru

$$\omega(v) = \omega'^i v''^i.$$

Příklad 6.5 Budeme pokračovat v našem Příkladu 6.4. Složky vektoru $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ v kovariantní bázi $\underline{e}''$ jsou

$$\bar{v}'' = G \cdot \bar{v}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a pak

$$\omega(v) = (\bar{h}'(\omega))^T \cdot \bar{v}'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 25.$$

Samotné vektory kovariantní báze ve V pak dostaneme pomocí vztahu

$$\underline{e}'' = \underline{e}' \cdot G^{-1} = \underline{e}' \cdot T^{-1} \cdot (T^{-1})^T = \underline{e} \cdot (T^{-1})^T = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

odkud

$$e''_1 = \bar{e}''_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad e''_2 = \bar{e}''_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad e''_3 = \bar{e}''_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Zde jsme využili faktu, že ve standardní bázi $\underline{e}$ jsou vektory rovny sloupcovým vektorům svých vlastních složek.

□

Matice přechodu od „nečárkované” báze e_1, e_2,..., e_m k čárkované bázi je, jak jsme již řekli a vyjádřili v (6.9), $T = (t_i^j)$, přičemž platí

$$e'_i = t_i^j e_j.$$

Pomocí inverzní matice $S = (s_i^j)$ můžeme zapsat zpětnou transformaci ve tvaru

$$e_i = s_i^j e'_j. \tag{6.15}$$

Podle (6.2) platí

$$\omega(v) = \omega_i e^i(v) = \omega(e_i)e^i(v),$$

takže s využitím (6.15) máme

$$\omega(v) = \omega(s_i^j e'_j)e^i(v) = \omega(e'_j)s_i^j e^i(v).$$

Vektor $v \in V$ vystupuje na obou stranách rovnice jako argument a můžeme jej vypustit (neboť zobrazení si jsou rovna, právě když nabývají na stejných vstupních hodnotách stejných hodnot). Pak

$$\omega = \omega(e'_j)s_i^j e^i = \omega'_i s_j^i e^j = \omega'_i e'^i,$$

kde jsme označili $\omega'_i = \omega(e'_j)$ složky v nové bázi ve V^*, dané transformačním vztahem

$$e'^i = s_j^i e^j. \tag{6.16}$$

Složky lineárních forem se transformují podle

$$\omega_i = \omega'_j s_i^j. \tag{6.17}$$

Nyní jsme v analogické situaci jako před vztahem (6.9), kdy jsme změnili bázi ve V. Aplikaci formy $\omega \in V^*$ na vektor $v \in V$ můžeme chápat jako skalární součin ve V^*, který je v původní, „nečárkované” bázi e^1, e^2, ..., e^m standardní, tj. má jednotkovou Gramovu matici. Vztah (6.5) můžeme upravit na

$$\omega(v) = \omega_i v^i = \omega_i v_i. \tag{6.18}$$

Zde v_i jsou „nečárkované” složky lineární formy, která je vzorem vektoru $v \in V$ v kanonickém zobrazení $h : V^* \to V$ a v tomto kanonickém zobrazení je $v_i = v^i$. Z (6.17) vyplývá, že také

$$v_i = v'_j s_i^j.$$

Dosazením do (6.18) dostaneme

$$\omega(v) = \omega'_i s_k^i s_k^j v'_j,$$

a po označení

$$g^{ij} = s^i_k s^j_k$$

máme nakonec

$$\omega(v) = \omega'_i g^{ij} v'_j, \tag{6.19}$$

což je vztah analogický a duální s (6.13).

Povšimněme si vztahu mezi v'_i, tj. „čárkovanou” složkou lineární formy, která je vzorem vektoru $v \in V$, tj. formy $h^{-1}(v) \in V^*$, a složkou v''^i vektoru v v kovariantní „čárkované” bázi ve V. Platí

$$v''^i = g_{ij} v'^j = t^k_i t^k_j v'^j = t^k_i v^k = t^k_i v_k = t^k_i v'_j s^j_k = t^k_i s^j_k v'_j = \delta^j_i v'_j = v'_i.$$

Pojmy kontravariantní a kovariantní báze či složek můžeme analogicky definovat i v duálním prostoru V^*. Nyní vidíme, že máme-li v jednom z prostorů V, V^* vyjádřen prvek ve složkách báze jednoho typu, pomocí kanonického zobrazení $h : V^* \to V$ můžeme reprezentovat tento prvek i ve druhém z obou prostorů stejnou m-ticí čísel, považujeme-li tuto m-tici za složky v bázi druhého typu.

Příklad 6.6 Pokračujme dále v Příkladu 6.4 a Příkladu 6.5. Duální bázi $\overline{e}\prime = S \cdot \overline{e}$ z Příkladu 6.4 prohlásíme za kontravariantní ve V^*. Pak kovariantní bázi ve V^* dostaneme podle vztahu

$$\overline{e}'' = (G^*)^{-1}\overline{e}' = (S \cdot S^T)^{-1} \cdot \overline{e}' = (S^{-1})^T \cdot S^{-1} \cdot \overline{e}' = T^T \cdot T \cdot \overline{e}' = G \cdot \overline{e}' = T^T \cdot \overline{e},$$

kde jsme symbolem G^* označili Gramovu matici skalárního součinu ve V vzhledem k kontravariantní bázi $\overline{e}'$ ve V^*. Protože báze $\overline{e}$ je tvořena řádky jednotkové matice, jsou vektory kovariantní báze $\overline{e}''$ ve V^* tvořeny řádky matice T^T, tedy

$$\underline{e}''^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}''^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}''^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vrátíme-li se k Příkladu 6.5, můžeme snadno ověřit, že tato báze splňuje s kovariantní bází $\underline{e}''$ ve V vztahy duality, tj. že

$$\underline{e}''^i(\overline{e}''_j) = \underline{e}''^i \cdot \overline{e}''_j = \delta^i_j.$$

Forma ω, se složkami ve standardní bázi $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ve V^* má v kovariantní bázi ve V^* složky dané vztahem

$$\underline{\omega}'' = \underline{\omega} \cdot (T^T)^{-1} = \underline{\omega} \cdot (T^{-1})^T = \underline{\omega} \cdot S^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vrátíme-li se k výsledkům předchozích příkladů, můžeme nyní zkontrolovat, že pro vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ platí

$$\omega(v) = \underline{\omega}\bar{v} = \underline{\omega}'\bar{v}' = \underline{\omega}''\bar{v}'' = \underline{\omega}''G\bar{v}' = \underline{\omega}'G^{-1}\bar{v}'' = 25.$$

(Proveďte jako cvičení.)

□

Získané poznatky shrneme v následující větě.

Věta 6.1 *Následující objekty jsou dány:*

Ve vektorovém prostoru je dána tzv. standardní báze $e_1, e_2, \ldots, e_m$*, která je která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu* $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ *a (obecně jiná) tzv. kontravariantní báze* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$*. Mezi těmito bázemi nechť existuje transformační vztah*

$$e'_i = t^j_i e_j, \tag{6.20}$$

kde $T = (t^j_i)$ *je matice přechodu od standardní báze ke kontravariantní bázi, vzhledem k níž má skalární součin* σ *Gramovu matici* $G = (g_{ij}) = (t^k_i t^k_j) = \big(\sigma(e'_i, e'_j)\big)$*. Kromě toho uvažujeme ve* V *ještě tzv. kovariantní bázi* $e''_1, e''_2, \ldots, e''_m$*.*

V duálním prostoru lineárních forem je dána tzv. duální standardní báze $e^1, e^2, \ldots, e^m$ *která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu* $\sigma^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ *a (obecně jiná) tzv. duální kontravariantní báze* $e'^1, e'^2, \ldots, e'^m$*. Mezi těmito bázemi nechť existuje transformační vztah*

$$e'^i = s^i_j e^j, \tag{6.21}$$

kde $S = (s^i_j)$ *je matice přechodu od duální standardní báze k duální kontravariantní bázi, vzhledem k níž má skalární součin* σ^* *Gramovu matici* $G^* = (g^{ij}) = (s^i_k s^j_k) = \big(\sigma(e'^i, e'^j)\big)$*. Kromě toho uvažujeme ve* V^* *ještě tzv. duální kovariantní bázi* $e''^1, e''^2, \ldots, e''_m$*.*

Obě standardní báze i obě kontravariantní báze jsou vázány vztahy duality

$$e^j(e_i) = \delta^j_i, \quad e'^j(e'_i) = \delta^j_i. \tag{6.22}$$

Vektor $v \in V$ *má vyjádření ve třech uvažovaných bázích na* V

$$v = v^i e_i = v'^i e'_i = v''^i e''_i, \tag{6.23}$$

přičemž po kovariantních složkách požadujeme, aby

$$v''^i = g_{ij} v'^j. \tag{6.24}$$

Lineární forma $\omega \in V^*$ má vyjádření ve třech uvažovaných bázích na V^*

$$\omega = \omega_i e^i = \omega'_i e'^i = \omega''_i e''^i, \tag{6.25}$$

přičemž po duálních kovariantních složkách požadujeme, aby

$$\omega''_i = g^{ij}\, \omega'_j. \tag{6.26}$$

Mezi prostory V^* a V je definováno kanonické zobrazení $h : V^* \to V$, jehož matice je při použití standardních bází v obou prostorech jednotková.

<u>*Pak platí zejména:*</u>

(i) *Matice T a S jsou navzájem inverzní, tedy*

$$t_i^k s_k^j = \delta_i^j, \quad s_i^k t_k^j = \delta_i^j.$$

(ii) *Matice G a G^* jsou navzájem inverzní, tedy*

$$g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i.$$

(iii) *Pro vektory kovariantní báze ve V platí*

$$e''_i = g^{ij}\, e'_j = s_j^i\, e_j.$$

(iv) *Pro vektory tzv. duální kovariantní báze ve V^* platí*

$$e''^i = g_{ij}\, e'^j = t_i^j e^j.$$

(v) *Obě kovariantní báze splňují vztahy duality*

$$e''^j(e''_i) = \delta_i^j.$$

(vi) *Obraz $h(\omega)$ formy $\omega \in V^*$ má vyjádření*

$$h(\omega) = \omega_i e_i = \omega''_i e'_i = \omega'_i e''_i \in V.$$

Zejména platí

$$h(e^i) = e_i, \quad h(e'^i) = e''_i, \quad h(e''^i) = e'_i.$$

(vii) *Obraz $h^{-1}(v) \in V^*$ vektoru $v \in V$ má vyjádření*

$$h^{-1}(v) = v^i e^i = v''^i e'^i = v'^i e''^i \in V^*.$$

Zejména platí

$$h^{-1}(e_i) = e^i, \quad h^{-1}(e'_i) = e''^i, \quad h^{-1}(e''_i) = e'^i.$$

(viii) *Pro aplikaci formy $\omega \in V^*$ na vektor $v \in V$ platí*

$$\omega(v) = \sigma(h(\omega), v) = \sigma^*(\omega, h^{-1}(v)) = \omega_i v^i = \omega'_i v'^i = \omega''_i v''^i.$$

Kromě toho platí také:

(ix) *Pro transformaci složek vektoru $v \in V$ platí*

$$v^i = v'^j t^i_j = v''^j s^j_i, \quad v'^i = v^i s^i_j = g^{ij} v''^j.$$

(x) *Pro transformaci složek lineární formy $\omega \in V^*$ platí*

$$\omega_i = \omega'_j s^j_i = \omega''_j t^i_j, \quad \omega'_i = \omega_j t^i_j = g_{ij} \omega''_j.$$

(xi) *Pro aplikaci formy $\omega \in V^*$ na vektor $v \in V$ platí*

$$\omega(v) = \omega''_i g_{ij} v'^j = \omega'_i g^{ij} v''^j.$$

Důkaz. Všechna uvedená tvrzení nějakým způsobem vyplývají z úvah, které jsme prováděli již před formulováním této věty. Bude ale užitečné důkaz provést znovu, účelněji, jasněji a jednodušeji, což je možné především proto, že se už nemusíme zabývat vlastní výstavbou teorie.

Dokažme (i). Aplikací (6.21) na (6.20) dostaneme, s využitím (6.22)

$$\delta^j_i = e'^j(e'_i) = (s^j_k e^k)(t^l_i e_l) = s^j_k t^l_i e^k(e_l) = s^j_k t^l_i \delta^k_l = t^k_i s^j_k,$$

což znamená, že $TS = I_m$. Druhá rovnost je již splněna automaticky, jak jsme ukázali v důkazu Věty 1.15 v Kapitole 1.

Podobně, s využitím (i) dostaneme také

$$g_{ik} g^{kj} = t^l_i t^l_k s^k_r s^j_r = t^l_i \delta^l_r s^j_r = t^l_i s^j_l = \delta^j_i,$$

takže $GG^* = I_m$. Druhá rovnost platí ze stejného důvodu, jako v případě (i). Tedy také (ii) je dokázáno.

Dokážeme (iii). Nechť $v \in V$. Podle (6.22) a (6.24) platí

$$v = v'^i e'_i = v''^i e''_i = g_{ij} v'^j e''_i = v'^i g_{ji} e''_j = v'^i g_{ij} e''_j,$$

kde jsme také využili symetrie Gramovy matice $G = (g_{ij})$. Necháme-li vektor v probíhat postupně všechny vektory k kontravariantní báze, dostaneme

$$e'_i = g_{ij} e''_j,$$

odkud s pomocí (ii) dostáváme vynásobením obou stran rovnice inverzní maticí $G = (g^{ij})$

$$e''_i = \delta^i_j e''_j = g^{ik} g_{kj} e''_j = g^{ij} e'_j,$$

což jsme chtěli dokázat. Dále, dosazením z (6.20) dostaneme

$$e''_i = g^{ij} t^k_j e_k = s^i_l s^j_l t^k_j e_k = s^i_l \delta^k_l e_k = s^i_j e_j.$$

Kromě toho, tvrzení (iii) plyne i z faktu, že složky a báze se transformují vzájemně inverzními maticemi (který jsme odvodili v Kapitole 3) a vztahu (6.24).

Tvrzení (iv) je duální k (iii) a vzhledem k symetrii a záměnnosti prostorů V a V^* je není třeba dokazovat, nicméně důkaz by se vedl velmi podobně důkazu (iii). Lze doporučit, aby si čtenář provedl důkaz sám jako cvičení.

Dokážeme (v). Z (iii) a (iv) plyne

$$e''^j(e''_i) = (g_{jk} e'^k)(g^{il} e'_l) = g_{jk} g^{il} e'^k(e'_l) = g_{jk} g^{il} \delta^k_l = g_{jk} g^{ik} = g_{jk} g^{kj} = \delta^j_i.$$

Využili jsme přitom symetrie matice $G^* = (g^{ij})$ a vztahu (6.22).

Dokážeme (vi) a (x). Vztah $h(\omega) = \omega_i e_i$ plyne ze samotné definice zobrazení h, jehož konstrukci a vlastnosti jsme probírali ještě před formulací dokazované věty. Zbývající vztahy musíme odvodit z transformačních rovnic při změně báze. Forma $\omega \in V^*$ má podle (6.25) vyjádření

$$\omega = \omega_i e^i = \omega'_i e'^i.$$

Do tohoto vztahu můžeme dosadit z (6.21), takže dostaneme

$$\omega = \omega'_j s^j_i e^i. \tag{6.27}$$

Máme tedy dvojí vyjádření formy ω ve stejné bázi, odkud plyne rovnost odpovídajících složek. Tedy

$$\omega_i = \omega'_j s^j_i.$$

Tím jsme mimoděk dokázali (x), ovšem plyne odtud, z (iii), symetrie matice G^* a ze vztahu (6.26) postupně také

$$h(\omega) = \omega'_j s^j_i e_i = \omega'_j e''_j = \omega'_j g^{ji} e'_i = g^{ij} \omega'_j e'_i = \omega''_i e'_i,$$

což jsme chtěli dokázat pro (vi). Volíme-li postupně formu ω jako e^i, e'^i a e''^i, dostaneme příslušné speciální vztahy v (vi). Zbývající vztahy v (x) vyplývají z již dokázaných, nebo ve větě formulovaných tvrzení a vzájemných vztahů mezi maticemi T, S, G a G^*.

Dokážeme (vii) a (ix). Pro vektor $v \in V$ platí podle (6.23)

$$v = v^i e_i = v'^i e'_i,$$

a dosazením z (6.20) dostaneme

$$v = v'^j t^i_j e_i. \tag{6.28}$$

Vyjádření vektoru v bázi je ovšem jednoznačné, takže

$$v^i = v'^j t^i_j.$$

Tím jsme dokázali první vztah z (ix). Ovšem spolu s kombinací (iv) a (6.24) odtud získáme

$$h^{-1}(v) = v^i e^i = v'^j t^i_j e^i = v'^j e''^j = v'^j g_{ji} e'^i = g_{ij} v'^j e'^i = v''^i e'^i,$$

což je vztah v (vii), který jsme chtěli dokázat. Postupnou volbou vektoru v jako e_i, e'_i a e''_i dostaneme odtud i zbývající speciální vztahy v (vii). Zbývající vztahy v (ix) opět vyplývají z již dokázaných, nebo ve větě formulovaných tvrzení a vzájemných vztahů mezi maticemi T, S, G a G^*.

Dokážeme (viii) a (xi). Vztah $\omega(v) = \sigma(h(\omega), v) = \sigma^*(\omega, h^{-1}(v)) = \omega_i v^i$ vyplývá přímo ze zvoleného označení, definice skalárního součinu a definice kanonického zobrazení h. Ovšem dosazením z (ix) a (x) dostaneme

$$\omega(v) = \omega'_k s^k_i v'^j t^i_j = \omega'_k v'^j \delta^k_j = \omega'_j v'^j.$$

a s využitím (6.24) a (6.26) získáme

$$\omega(v) = \omega'_k v'^j \delta^k_j = \omega'_k v'^j g_{ji} g^{ik} = g^{ik} \omega'_k g_{ij} v'^j = \omega''_i v''^i.$$

Tento vztah dokazuje (viii) i (xi).

□

Z výše uvedeného vyplývá, že není podstatný rozdíl mezi lineárními formami a vektory. Vektory lze považovat za „formy” na prostoru forem, tedy prvky prostoru V^{**} který je kanonicky identifikovatelný s V, tj. $V = V^{**}$. Aplikace formy na vektor či vektoru na formu je prakticky totéž a navíc lze tuto aplikaci reprezentovat plně ve V nebo ve V^*, když objekt z druhého, duálního prostoru reprezentujeme pomocí kanonického zobrazení h, resp. h^{-1}. Obraz našeho objektu dostaneme snadno výměnou kontravariantní báze daného prostoru, obvykle používané pro jeho původní objekty, za bázi kovariantní. V této kovariantní bázi je pak obraz objektu z duálního prostoru určen stejnými souřadnicemi, jako má tento objekt ve svém vlastním prostoru a kontravariantní bázi. Můžeme si tedy pamatovat:

- *Přenášíme-li objekt z původního prostoru do duálního, nemusíme měnit souřadnice, ale dáme jim jiný význam – záměnou báze kontravariantní za bázi kovariantní v duálním prostoru (případně naopak, tj. báze kovariantní za bázi kontravariantní v duálním prostoru).*

- *Aplikujeme-li dva objekty na sebe (tj. formu na vektor), můžeme použít jejich souřadnice v jejich „domovských" prostorech, v tom případě použijeme souřadnice stejného typu (kontravariantní s kontravariantními, kovariantní s kovariantními). Nebo jeden z objektů přeneseme do prostoru (pro něj) duálního; pak použijeme souřadnice různých typů (kontravariantní s kovariantními – v daném prostoru, v němž s prvním objektem a obrazem druhého objektu pracujeme). Pak výsledek aplikace je dán součtem součinů odpovídajících si složek a počítá se analogicky, jako skalární součin s jednotkovou Gramovou maticí.*

Řekli jsme již, že bázi, v níž ve V vyjadřujeme vektory, obvykle označujeme jako *kontravariantní*, kdežto formy (které jsou podobně ve V^* obvykle vyjádřeny v kontravariantní bázi), se reprezentují ve V stejnými složkami, ovšem ve speciální, nové bázi prostoru V, kterou nazýváme *kovariantní*.

Začneme-li tedy složkami v'^i vektoru $v \in V$ v prostoru V, tyto složky mají ve V^* význam lineární formy, vyjádřené ovšem v kovariantní bázi prostoru V^* a přeneseny zpět do V, mají význam formy na prostoru forem V^*, tj. prvku z $V^{**} = V$, ovšem v kontravariantní bázi tohoto prostoru. Proto se někdy (zejména ve fyzice) říká, že vektor je *„kontravariantní 1-tenzor"*, nebo-li *„kontravariantní lineární forma"*.
Podobně, začneme-li se složkami ω'_i formy ω v prostoru V^*, tyto složky reprezentují vektor ve V (který je jejím kanonickým obrazem), ovšem v kovariantní bázi prostoru V. Proto se také někdy říká (opět například v teoretické fyzice), že lineární forma, nebo-li 1-tenzor, je vlastně *„kovariantní vektor"*.

Někdy se také v literatuře označují jako kovariantní ty tenzorové veličiny, jejichž složky bývají značeny pouze dolními indexy, naopak kontravariantní jsou ty tenzorové veličiny, které mají složky značeny horními indexy. Naše označení s tímto přístupem v podstatě souhlasí. Je třeba si ovšem uvědomit, že „domovským" prostorem kovariantních 1-tenzorů je prostor lineárních forem V^* a ve V pracujeme pouze s jejich kanonickými obrazy (kvůli čemuž právě zavádíme druhou, tzv. kovariantní bázi ve V).

6.2 Tenzorový součin

Tato část bude pojednávat o tom, jak z jednodušších tenzorů, jako jsou například lineární formy, můžeme vytvořit tenzory složitější. Nechť V_1, V_2 jsou vektorové prostory, $\omega \in T^k V_1$ a $\eta \in T^l V_2$ tenzory. Definujeme nový $k + l$-tenzor vztahem

$$(\omega \otimes \eta)(v_1, v_2, \ldots v_{k+l}) = \omega(v_1, v_2 \ldots, v_k) \cdot \eta(v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+l}) \tag{6.29}$$

pro libovolné $v_1, v_2, \dots v_k \in V_1$ a $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots v_{k+l} \in V_2$. Zobrazení $\omega \otimes \eta : V_1^k \times V_2^l \to \mathbb{R}$ je lineární v každé ze svých složek, tedy je to $k+l$-tenzor, který se nazývá *tenzorovým součinem* tenzorů ω a η. Množinu všech takových tenzorů označujeme $T^k V_1 \otimes T^l V_2$ a nazýváme *tenzorovým součinem* prostorů $T^k V_1$ a $T^l V_2$.

Věta 6.2 *Nechť $c \in \mathbb{R}$; $\omega, \omega_1, \omega_2 \in T^k V_1$; $\eta, \eta_1, \eta_2 \in T^l V_2$ a $\rho \in T^m V_3$. Pak platí*

(i) $(\omega_1 + \omega_2) \otimes \eta = \omega_1 \otimes \eta + \omega_2 \otimes \eta,$

(ii) $\omega \otimes (\eta_1 + \eta_2) = \omega \otimes \eta_1 + \omega \otimes \eta_2,$

(iii) $(c \cdot \omega) \otimes \eta = \omega \otimes (c \cdot \eta) = c \cdot (\omega \otimes \eta),$

(iv) $(\omega \otimes \eta) \otimes \rho = \omega \otimes (\eta \otimes \rho).$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definice tenzorového součinu (6.29) a vlastností násobení reálných čísel. Po dosazení příslušných argumentů do všech tenzorů, které v těchto vztazích vystupují, vzniknou reálná čísla, pro něž platí asociativní i distributivní zákony. □

V důsledku asociativity tenzorového součinu vyjádřené vztahem (iv) píšeme $\omega \otimes \eta \otimes \rho$ namísto $(\omega \otimes \eta) \otimes \rho$ nebo $\omega \otimes (\eta \otimes \rho)$.

Poznamenejme však, že tenzorový součin není komutativní, obecně totiž neplatí rovnost mezi tenzory $\omega \otimes \eta$ a $\eta \otimes \omega$. Definiční obor tenzoru $\omega \otimes \eta$ je $V_1^k \times V_2^l$, zatímco definiční obor tenzoru $\eta \otimes \omega$ je $V_2^l \times V_1^k$, což jsou různé množiny. Avšak i když $V_1 = V_2$ a oba kartézské součiny lze považovat za stejné (přesněji kanonicky izomorfní), rovnost obecně neplatí. Ačkoliv je násobení reálných čísel komutativní, dostávají tenzory $\omega \in T^k V_1$ a $\eta \in T^l V_2$ v každém z obou součinů jiné argumenty, takže součiny mohou nabývat i různých hodnot na multivektorovém argumentu $v_1, v_2, \dots v_{k+l}$.

Věta 6.3 *Buď $e_1, e_2, \dots e_m \in V$ báze ve vektorovém prostoru V, $e^1, e^2, \dots e^m \in V^*$ duální báze ve V^*. Pak tenzorové součiny*

$$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}, \quad \textit{kde} \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\},$$

tvoří (tzv. kanonickou) bázi prostoru $T^k V$, přičemž $\dim T^k V = m^k$.

Důkaz. Nechť $\omega \in T^k V$ a nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Pak každý z vektorů v_1, $v_2, \dots$, v_k lze vyjádřit jako lineární kombinaci báze a tedy platí

$$v_i = v_i^j e_j.$$

Zároveň však máme

$$e^j(v_i) = e^(v_i^l e_l) = v_i^l e^j(e_l) = v_i^l \delta_l^j = v_i^j,$$

takže

$$v_i = e^j(v_i) \cdot e_j.$$

Potom

$$\begin{aligned}\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k) &= \omega\big(e_1^j(v_1)e_{j_1}, e_2^j(v_2)e_{j_2}, \ldots, e_k^j(v_k)e_{j_k}\big) = \\ &= e_1^j(v_1) \cdot e_2^j(v_2) \cdot \cdots \cdot e_k^j(v_k) \cdot \omega(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k}) = \\ &= \omega(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k}) \cdot e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}(v_1, v_2, \ldots, v_k).\end{aligned}$$

Když na obou stranách rovnice vynecháme multivektorové argumenty, dostaneme vyjádření tenzoru ω jako lineární kombinace k-tenzorů $e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}$, tedy

$$\omega = \omega(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k}) \cdot e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}.$$

K dokončení důkazu nám zbývá ukázat, že k-tenzory $e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}$ jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme tedy, že existují čísla $C_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, že

$$C_{j_1 j_2 \ldots j_k}\, e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_k} = 0. \tag{6.30}$$

Pak platí

$$\begin{aligned}0 =&\big(C_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cdot e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}\big)(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) = C_{j_1 j_2 \ldots j_k}\, e^{j_1}(e_{i_1})\, e^{j_2}(e_{i_2}) \, \ldots \, e^{j_k}(e_{i_k}) = \\ &= C_{j_1 j_2 \ldots j_k}\, \delta^{j_1}_{i_1}\, \delta^{j_2}_{i_2} \, \ldots \, \delta^{j_k}_{i_k} = C_{i_1 i_2 \ldots i_k}\end{aligned}$$

pro libovolné $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tedy všechny koeficienty v lineární kombinaci (6.30) jsou nutně nulové, což znamená, že k-tenzory $e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_k}$ jsou lineárně nezávislé. Protože indexy $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ lze vybrat právě m^k způsoby, existuje m^k takových tenzorů a tedy $\dim T^k V = m^k$.

□

Příklad 6.7 Skalární součin $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ s Gramovou maticí G vzhledem k bázi $\underline{e}$ vyjádříme v bázi tenzorového součinu prostorů $V^* \otimes V^*$. Pro libovolné vektory $u, v \in V$ platí

$$\sigma(u, v) = g_{ij} u^i v^j = g_{ij} \cdot e^i(u) \cdot e^j(v) = (g_{ij}\, e^i \otimes e^j)(u, v),$$

odkud

$$\sigma = g_{ij}\, e^i \otimes e^j.$$

Konkrétněji, je-li například $V = \mathbb{R}^3$ a

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix},$$

máme

$$\sigma = \frac{1}{5}\, e^1 \otimes e^1 + \frac{1}{4}\, (e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + \frac{1}{3}(e^1 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^1) + \\ + \frac{1}{2}\, (e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^2) + e^3 \otimes e^3.$$

Zobrazení $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ zřejmě je symetrický kovariantní 2-tenzor.

□

Příklad 6.8 Vyjádříme aplikaci app : $V^* \times V \to \mathbb{R}$ lineární formy na vektor pomocí báze tenzorového součinu prostorů $V \otimes V^*$. Pro libovolné $\omega \in V^*$ a $v \in V$ platí

$$\mathrm{app}(\omega, v) = \omega(v) = (\omega_i e^i)(v) = \omega_i e^i(v).$$

Avšak také platí

$$\omega(e_j) = \omega_k e^k(e_j) = \omega_k \delta^k_j = \omega_j,$$

odkud

$$\mathrm{app}(\omega, v) = \omega(e_i) e^i(v) = (e_i \otimes e^i)(\omega, v).$$

Tedy

$$\mathrm{app} = e_i \otimes e^i.$$

Přitom jsme považovali vektor za lineární formu na V^*, tedy prvek prostoru V^{**}, který ztotožňujeme s V. Konkrétně, pro $V = \mathbb{R}^4$ máme

$$\mathrm{app} = e_1 \otimes e^1 + e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3 + e_4 \otimes e^4.$$

Přitom zobrazení app : $V^* \times V \to \mathbb{R}$ je v první složce kontravariantní a ve druhé složce kovariantní smíšený 2-tenzor.

□

Důsledkem Věty 6.3 je, že $T^k V = V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$, kde násobíme k stejných kopií prostoru lineárních forem V^*. Podobně také $T^k V^* = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$, kde vpravo od rovnítka je tenzorový součin k stejných kopií dvojnásobného duálu V^{**} prostoru V, který jsme ovšem v předchozí kapitole ztotožnili s V. Prvky prostoru $T^k V$ se někdy nazývají *kovariantními k-tenzory* (a lineární formy na V jsou jejich speciálním případem). Naopak, prvky prostoru $T^k V^*$ nazývají se *kontravariantními k-tenzory* (a za jejich speciální případ lze považovat vektory z V).

Dále je užitečné si uvědomit, že na místě vektorových prostorů V_1, V_2 z definice tenzorového součinu mohou být jakékoli vektorové prostory, zejména však „základní" vektorový prostor V a nebo prostor lineárních forem na V. Můžeme tedy položit například $V_1 = V$ a $V_2 = V^*$. Prvky prostoru $T^kV \otimes T^lV^*$ jsou tedy tenzory, které v prvních k argumentech akceptují vektory z V, a jsou *v těchto k argumentech kovariantní*, naopak v dalších l argumentech akceptují lineární formy a jsou *v těchto l argumentech kontravariantní.* Těmto tenzorům se pro $k \neq 0 \neq l$ říká *smíšené tenzory.* Obecněji mohou smíšené tenzory vzniknout jako prvky tenzorového součinu více kopií $T^1V = V^*$ a $T^1V^* = V$, přičemž oba navzájem duální typy multiplikantů musí být zastoupeny. Zároveň je zřejmé, že báze v různých prostorech smíšených tenzorů lze získat pomocí tenzorových součinů bázických vektorů e^i z V^* a e_j z V. Tedy například v prostoru $T^1V \otimes T^2V^* \otimes T^1V = V^* \otimes V \otimes V \otimes V^*$ je báze tvořena smíšenými 4-tenzory

$$e^i \otimes e_j \otimes e_p \otimes e^q, \quad \text{kde} \quad i, j, p, q \in \{1, 2, \dots m\}.$$

Pak také

$$\dim(T^1V \otimes T^2V^* \otimes T^1V) = m^4.$$

Důkaz těchto tvrzení by byl velmi podobný důkazu Věty (6.3) a čtenář si jej může provést sám jako cvičení.

6.3 Antisymetrické tenzory a vnější součin

Tenzor $\omega \in T^kV$ se nazývá *antisymetrický*, jestliže změní znaménko při výměně jeho dvou vektorových argumentů, tedy, když

$$\begin{aligned} &\omega(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) = \\ &= -\omega(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Snadno se ověří, že součet dvou antisymetrických k-tenzorů je opět antisymetrický k tenzor, podobně, jako se antisymetrie k-tenzoru zachovává při jeho vynásobení reálným číslem. Tedy množina všech antisymetrických k-tenzorů na V, kterou značíme Λ^kV, je vektorovým podprostorem prostoru T^kV. Pochopitelně nás zajímá dimenze prostoru Λ^kV, tu však určíme později, až k tomu budeme mít prostředky.

Označme

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_k} = \begin{cases} 1, & \text{je-li } (i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ sudá permutace množiny } \{1, 2, \dots, k\}, \\ -1, & \text{je-li } (i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ lichá permutace množiny } \{1, 2, \dots, k\}, \\ 0, & \text{není-li } (i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ permutace množiny } \{1, 2, \dots, k\}. \end{cases}$$

tzv. Levi-Civitův symbol v indexech i_1, i_2,..., i_k. Pro libovolný k-tenzor $\omega \in T^kV$ a vektory $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ klademe

$$(\operatorname{Alt} \omega)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \frac{1}{k!}\, \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_k}\, \omega(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}). \tag{6.31}$$

Příklad 6.9 Je zřejmé (přímo z definice determinantu), že zobrazení, které m-tici m-rozměrných vektorů přiřadí determinant matice, jejíž sloupce (nebo řádky) jsou tvořeny těmito vektory, je antisymetrický m-tenzor na $\mathbb{R}^m$.

□

Věta 6.4 *Nechť $\omega \in T^k V$ je libovolný k-tenzor na V. Pak platí*

(i) $\mathrm{Alt}\,\omega$ *je antisymetrický k-tenzor.*

(ii) *Je-li ω antisymetrický k-tenzor, pak* $\mathrm{Alt}\,\omega = \omega$.

(iii) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\,\omega) = \mathrm{Alt}\,\omega$.

Důkaz. Tvrzení (i) je zřejmé, je přímým důsledkem definice operace Alt a vlastností výše definovaného Levi-Civitova symbolu. Dokažme (ii). Je-li tenzor $\omega \in T^k V$ antisymetrický, platí

$$\omega(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}) = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_k}\,\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

Když odtud dosadíme do (6.31), dostaneme

$$(\mathrm{Alt}\,\omega)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \frac{1}{k\,!}\,\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_k}\,\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

kde vpravo od rovnítka máme, po vynásobení a vyrušení obou Levi-Civitových symbolů, právě $k\,!$ stejných sčítanců. Tedy vskutku,

$$(\mathrm{Alt}\,\omega)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \omega(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

Tvrzení (iii) vyplývá přímo z (i) a (ii).

□

V důsledku předchozí věty se operace Alt nazývá *antisymetrizace tenzoru.* S jejím použitím můžeme definovat nový typ tenzorového součinu, jehož výsledkem je vždy antisymetrický tenzor. Pro libovolné $\omega \in T^k V$, $\eta \in T^l V$ klademe

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k\,!\,l\,!}\,\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta). \tag{6.32}$$

a tento antisymetrický $k+l$-tenzor nazýváme *vnějším součinem* tenzorů ω a η. Ačkoliv je vnější součin definován pro libovolné tenzory, zpravidla jej aplikujeme na tenzory již antisymetrické. Základní vlastnosti vnějšího součinu shrnuje následující věta.

Věta 6.5 *Nechť $c \in \mathbb{R}$; $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k V$; $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l V$ a $\rho \in \Lambda^m V$. Pak platí*

(i) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$,

(ii) $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$,

(iii) $(c \cdot \omega) \wedge \eta = \omega \wedge (c \cdot \eta) = c \cdot (\omega \wedge \eta)$,

(iv) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\, \eta \wedge \omega$,

(v) $(\omega \wedge \eta) \wedge \rho = \omega \wedge (\eta \wedge \rho)$.

Důkaz. Důkaz (i) až (iv) je sice poněkud technický, avšak není obtížný a čtenář si jej může provést jako cvičení. Dokážeme pouze obtížnější tvrzení (v). Podle definičního vztahu (6.32) a Věty 6.4 platí

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \rho = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\, m!} \operatorname{Alt}(\omega \wedge \eta) \otimes \rho) = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\, m!} \cdot \frac{(k+l)}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \rho) =$$
$$= \frac{(k+l+m)!}{k!\, l!\, m!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \rho).$$

Podobně se ukáže, že také

$$\omega \wedge (\eta \wedge \rho) = \frac{(k+l+m)!}{k!\, l!\, m!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \rho).$$

□

V důsledku asociativity vnějšího součinu vyjádřené vztahem (v) píšeme $\omega \wedge \eta \wedge \rho$ namísto $(\omega \wedge \eta) \wedge \rho$ nebo $\omega \wedge (\eta \wedge \rho)$.

Nyní se budeme zabývat určením dimenze prostoru $\Lambda^k V$ a konstrukcí jeho báze.

Věta 6.6 *Buď $e_1, e_2, \dots e_m \in V$ báze ve vektorovém prostoru V, $e^1, e^2, \dots e^m \in V^*$ duální báze ve V^*. Pak vnější součiny*

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad kde \quad 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le k,$$

tvoří (tzv. kanonickou) bázi prostoru $\Lambda^k V$, přičemž $\dim \Lambda^k V = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$.

Důkaz. Nechť $\omega \in \Lambda^k V$. Podle Věty 6.3 můžeme vyjádřit tenzor ω ve tvaru

$$\omega = \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k}.$$

Avšak podle Věty 6.4 je

$$\omega = \operatorname{Alt}\omega = \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \operatorname{Alt}(e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k}) = k! \cdot \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \cdot e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \\ = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots i_k \le m} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \cdot e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k}.$$

Tedy antisymetrické k-tenzory $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$, kde $1 \le i_1 < i_2 < \dots i_k \le m$ generují $\Lambda^k V$. Lineární nezávislost těchto tenzorů se prověří na bázických vektorech prostoru V stejně jako v důkazu Věty 6.3. Čtenář může tuto část důkazu provést sám jako cvičení. Dále je zřejmé, že indexy $i_1, i_2, \dots, i_k$ lze vybrat z množiny $\{1, 2, \dots, m\}$, je-li jejich pořadí jednoznačně určeno, právě tolika způsoby, kolik má množina $\{1, 2, \dots, m\}$ k-prvkových podmnožin, tj. tolik, kolik udává kombinační číslo $\binom{m}{k}$.

□

Příklad 6.10 Vyjádříme determinant pomocí kanonické báze v $\Lambda^m V$, kde $V = \mathbb{R}^m$. Pro libovolné vektory $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ platí

$$\begin{aligned} \det(v_1, v_2, \dots, v_m) &= \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_m} \cdot v^1_{i_1} \cdot v^2_{i_2} \cdot \dots \cdot v^m_{i_m} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} \cdot e^1(v_{i_1}) \cdot e^2(v_{i_2}) \cdot \dots \cdot e^m(v_{i_m}) = \\ &= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}(e^1 \otimes e^2 \otimes \dots \otimes e^m)(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}) = \\ &= m\,! \cdot \operatorname{Alt}(e^1 \otimes e^2 \otimes \dots \otimes e^m)(v_1, v_2, \dots, v_m) = \\ &= (e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^m)(v_1, v_2, \dots, v_m). \end{aligned}$$

Celkově tedy platí pro zobrazení $\det : V^m \to \mathbb{R}$ vyjádření

$$\det = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^m,$$

kde $e^1, e^2, \dots, e^m$ jsou prvky báze v prostoru V^* lineárních forem ve $V = \mathbb{R}^m$, která je duální ke standardní bázi $e_1, e_2, \dots, e_m$ ve $V = \mathbb{R}^m$.

□

6.4 Klíčové myšlenky kapitoly

- Tenzor či k-tenzor je multilineární zobrazení, které z několika (přesněji $k \in \mathbb{N}$) vektorů vytvoří reálné číslo.
- Speciálním případem tenzoru je tedy lineární forma.
- Tenzory jsou zároveň i vektory, protože množiny tenzorů daného typu mají přirozenou strukturu reálného vektorového prostoru. Lze je sčítat a násobit reálným číslem.
- Je tedy možné definovat tenzory, jejichž vstupními hodnotami budou opět nějaké (obecně jiné) tenzory, například lineární formy.
- V zásadě tedy pracujeme s tenzory, které vytváří reálné číslo z vektorů základního vektorového prostoru – těmto tenzorům říkáme *kovariantní*, a tenzory, které pracují s lineárními formami – těm říkáme *kontravariantní* tenzory. Kromě toho, existují i tenzory *smíšené*.
- Formy jsou duální k vektorům. V souřadnicích nelze přesně odlišit, zda aplikujeme lineární formu na vektor či obráceně, vektor na formu. Vektor lze tedy považovat za kontravariantní 1-tenzor.
- Mezi vektory a lineárními formami existuje kanonický vztah, určený záměnou bází v příslušných prostorech, zatímco hodnoty souřadnic zůstanou zachovány.
- Přenášíme-li tedy objekt (vektor či formu) z původního prostoru do duálního, nemusíme měnit souřadnice, ale dáme jim jiný význam – záměnou báze kontravariantní za bázi kovariantní v duálním prostoru (případně naopak, tj. báze kovariantní za bázi kontravariantní v duálním prostoru).
- Aplikujeme-li dva objekty na sebe (tj. formu na vektor), můžeme použít jejich souřadnice v jejich „domovských” prostorech, v tom případě použijeme souřadnice stejného typu (kontravariantní s kontravariantními, kovariantní s kovariantními). Nebo jeden z objektů přeneseme do prostoru (pro něj) duálního; pak použijeme souřadnice různých typů (kontravariantní s kovariantními – v daném prostoru, v němž s prvním objektem a obrazem druhého objektu pracujeme). Pak výsledek aplikace je dán součtem součinů odpovídajících si složek a počítá se analogicky, jako skalární součin s jednotkovou Gramovou maticí.
- Pomocí operace tenzorového součinu lze složitější tenzory konstruovat z jednodušších, například lineárních forem. Z vhodných tenzorových součinů lineárních forem lze vytvořit bázi v daném prostoru k-tenzorů.
- Speciálním případem tenzorů jsou antisymetrické tenzory, které mohou být opět kovariantní, kontravariantní nebo smíšené.
- Tenzor lze antisymetrizovat pomocí operátoru Alt.

- Vnější součin tenzorů zachovává (narozdíl od tenzorového součinu) antisymetrii.
- Pomocí vhodných vnějších součinů lineárních forem lze opět vytvořit bázi v prostoru antisymetrických k-tenzorů.

6.5 Cvičení NM

Kde je to vhodné, použijte k řešení MATLAB nebo jiný matematický software.

1. Na vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^3$ je dána lineární forma $\omega : V \to \mathbb{R}$ pomocí matice $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, která tuto formu reprezentuje v bázi ve V, tvořené vektory

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v tom smyslu, že $\omega(v) = \underline{\omega} \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v}$ jsou složky vektoru v v této bázi. Najděte matici $\underline{\omega}'$ formy ω, která reprezentuje formu ω stejným způsobem ve změněné bázi $\underline{e}'$ ve V s vektory

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Big[$ Výsledek: $\underline{\omega}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\Big]$. $\square$

2. Na vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^3$ je dán (kovariantní) 2-tenzor $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ pomocí matice

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

která jej reprezentuje ve standardní bázi $\underline{e}$ ve V. Najděte matici F', která tentýž tenzor reprezentuje ve změněné bázi ve V, tvořené vektory

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Bigg[$ Výsledek: $F' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Bigg]$. $\square$

3. Ve $V = \mathbb{R}^3$ je dána standardní báze

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a jiná báze

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

K oběma bázím najděte tzv. duální báze ve V^*.

[Výsledek: $e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$e'^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e'^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e'^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Big].$$

□

4. Pokračujte v předchozím cvičení a najděte matice G a G' standardního skalárního součinu na $V = \mathbb{R}^3$ v obou bázích $\underline{e}$ a $\underline{e}'$ na V.

[Výsledek: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$]. □

5. Pokračujte v předchozím příkladě. Bázi $\underline{e}'$ ve V považujte za kontravariantní. Najděte kovariantní bázi $\underline{e}''$ ve V a k ní najděte také bázi duální.

[Výsledek:

$$e''_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e''_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e''_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$e''^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e''^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e''^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Big].$$

□

6. Pokračujte v předchozím příkladě. Vyjádřete vektor

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

a formu

$$\omega = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

pomocí složek ve všech třech uvažovaných bázích na V, resp. V^*. Také pomocí těchto vyjádření spočtěte hodnotu $\omega(v)$.

$\Big[$ Výsledek:

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}'' = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega}' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega}'' = \begin{pmatrix} -13 & 11 & -5 \end{pmatrix}, \quad \omega(v) = 21 \Big].$$

□

7. Je dán smíšený 3-tenzor $\eta = 2\,e^1 \otimes e_2 \otimes e^2 + 3\,e^2 \otimes e_1 \otimes e^1 - e^1 \otimes e_1 \otimes e^2$ na $V = \mathbb{R}^2$. Určete $\eta(u, \omega, v)$, kde $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\omega = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Big[$ Výsledek: $\eta(u, \omega, v) = 10 \Big]$. □

8. Je dán 2-tenzor $\varphi = e^1 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^2 - 2\,e^2 \otimes e^3 + 3\,e^3 \otimes e^1 + e^3 \otimes e^3$ na $\mathbb{R}^3$. Určete matici F zobrazení φ vzhledem ke standardní bázi ve $V = \mathbb{R}^3$.

$\Big[$ Výsledek: $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big]$. □

9. Je dán 2-tenzor $\eta = e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^1$ a 1-tenzor $\omega = e^1 + e^2 + e^3$. Pomocí báze prostoru $\Lambda^3 V$, kde $V = \mathbb{R}^3$ vyjádřete tenzor $\eta \wedge \omega$.

$\Big[$ Výsledek: $\eta \wedge \omega = 3\,e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \Big]$. □

10. Vyjádřete 2-tenzor $\eta = e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^1$ z předchozího příkladu v bázi prostoru $T^2 V = V^* \otimes V^*$, kde $V = \mathbb{R}^3$ a určete jeho matici A vzhledem ke kanonické bázi tohoto prostoru.

$\Big[$ Výsledek: $\eta = \frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^1 - e^1 \otimes e^3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Big].$$

□

6.6 Kontrolní otázky

1. Uveďte přesnou definici k-tenzoru.

2. Uveďte příklad symetrického 2-tenzoru.

3. Uveďte příklad antisymetrického 3-tenzoru.

4. Popište a zdůvodněte, jaký tenzor vznikne aplikací operátoru Alt na tenzor určený skalárním součinem dvou vektorů.

5. Určete dimenze prostorů $T^2\mathbb{R}^3$, $T^3\mathbb{R}^2$, $\Lambda^2\mathbb{R}^3$, $\Lambda^3\mathbb{R}^3$.

7 Řešení a odpovědi na kontrolní otázky

1 Matice a soustavy lineárních rovnic

1. Viz. např. Příklad 1.12.

2. Např. I_2.

3. Jakákoliv reálná matice, např. I_2.

4. Ne.

5. Jsou si rovny.

6. Obě matice jsou regulární, tedy $h(A) = n = h(A^{-1})$.

2 Determinanty

1. Nechť A je matice řádu n. **Determinantem** matice $A = (a_{ij})$ nazýváme číslo

$$\det A = |A| = \sum (-1)^{\pi(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n},$$

kde se sčítá přes všechny permutace $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ množiny $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Determinant při výměně dvou řádků musí změnit znaménko, avšak jsou-li tyto řádky stejné, jeho hodnota se zároveň nezmění. To je možné jen tehdy, je-li roven nule.

3. Obvykle se uvádí, že výpočet determinantu Laplaceovým rozvojem může být efektivní pro matice řádu nejvýše 4 (pokud se nejedná o matice speciálního tvaru). Pro vyšší řád v efektivnosti vítězí Gaussova eliminace.

4. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

3 Vektorové prostory

1. Buď $(V, \oplus)$ komutativní grupa a nechť ke každému $\gamma \in \mathbb{R}$ a $w \in V$ existuje prvek $\gamma \odot w \in V$ tak, že pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$ platí

(i) $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$,

(ii) $(\alpha + \beta)\odot = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$,

(iii) $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \cdot \beta) \odot u$,

(iv) $1 \odot u = u$.

Pak se uspořádaná trojice $(V, \oplus, \odot)$ nazývá **vektorový prostor nad tělesem reálných čísel** $\mathbb{R}$.

2. Ne. Ano.

3. $L_2 = L_1 + L_2$, odkud $L_1 \subseteq L_2$. Tedy $L_1 \cap L_2 = L_1$ a $\dim L_1 \cap L_2 = 2$.

4. Ano, obecně ne.

5. Nechť $(V, +, \cdot)$ a $(W, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory, $g : V \to W$ zobrazení. Řekneme, že je g **lineární**, jestliže platí:

(i) Pro libovolné $u, v \in V$ platí $g(u + v) = g(u) + g(v)$.

(ii) Pro libovolné $w \in V$ a číslo α (reálné, případně komplexní) platí $g(\alpha \cdot w) = \alpha \cdot g(w)$.

6. Není, např. $|-1 \cdot 1| \neq (-1) \cdot |1|$.

7. Není, pokud daná přímka neprochází počátkem.

8. Obsahuje pouze nulový vektor.

9. $\dim \ker f = 2$.

10. Nechť $L \subseteq V$ je podprostor, do nějž se promítá ortogonální projekcí $\pi : V \to L$ vektor $\vec{v}$. Pak $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, kde $\vec{u} \in L$, $\vec{w} \perp L$, přičemž tento rozklad je jednoznačný. Můžeme tedy psát $\pi(\vec{v}) = \vec{u}$. Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\alpha\vec{v} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{w}$, přičemž $\alpha\vec{u} \in L$, $\alpha\vec{w} \perp L$. Tedy $\alpha\vec{u}$ je projekce vektoru $\alpha\vec{v}$, tj. $\pi(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{u} = \alpha\pi(\vec{u})$. Analogicky se prověří, že $\pi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \pi(\vec{v}_1) + \pi(\vec{v}_2)$.

4 Problém vlastních hodnot

1. Nechť A je čtvercová matice řádu n nad $\mathbb{C}$, $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$ n-rozměrný sloupcový vektor, $\lambda \in \mathbb{C}$, splňující rovnici $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Pak λ se nazývá **vlastní hodnotou** a $\bar{x}$ **vlastním vektorem** (příslušným vlastní hodnotě λ) matice A.

2. $\lambda = 0$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. I_3.

5. Je-li Q ortogonální, pak $Q^{-1}=Q^T$ a tedy $QQ^T = I$. Pak $\det(Q)\cdot\det(Q^T) = 1$, a protože $\det Q = \det Q^T$, je $|\det Q| = 1$.

6. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5 Kvadratické formy

1. Kvadratická forma řádu n je zobrazení $\mathcal{K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ přiřadí číslo $\mathcal{K}(x)$ podle předpisu

$$\mathcal{K}(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n.$$

2. Indefinitní.

3. Ne, kvadratická forma má symetrickou matici, jejíž vlastní hodnoty jsou vždy reálné.

4. Ano. Forma bude pozitivně definitní. Na konkrétní Gramově matici nezáleží, ta jen vyjadřuje formu (skalární součin) v různých souřadnicích.

6 Tenzory na reálném vektorovém prostoru

1. Zobrazení $\varphi : V^k \to \mathbb{R}$ se nazývá také ***k*-tenzor** na V, jestliže je lineární v každém ze svých k vektorových argumentů při libovolných, avšak pevných hodnotách zbývajících $k-1$ argumentů.

2. Libovolný skalární součin.

3. Zobrazení, které trojici třírozměrných sloupcových reálných vektorů přiřadí determinant matice, sestavené z těchto sloupců.

4. Vznikne nulový 2-tenzor.

5. 9, 8, 3, 1.

Literatura

[1] Demlová M., Nagy J., *Algebra*, SNTL, Praha 1982, pp. 187, ISBN 04-008-82.

[2] Fuchs P., Kolářová E., *Matematický seminář*, interní studijní text FEKT VUT, Brno, 2004, pp. 103.

[3] Gantmacher F. R., *The Theory of Matrices*, Chelsea Publ. Comp., New York 1960, pp. 548, ISBN 5-02-013722-7.

[4] Havel V., Holenda J., *Lineární algebra*, SNTL-ALFA, Praha 1984, pp. 337, ISBN 04-011-84.

[5] Kolman B., *Introductory Linear Algebra*, Macmillan Publ. Comp., New York 1993, pp.619, ISBN 0-02-366032-5.

[6] Kolman B., *Elementary Linear Algebra*, Macmillan Publ. Comp., New York 1986, pp. 389, ISBN 0-02-366080-5.

[7] Krupka D., Musilová J., *Lineární a multilineární algebra*, skriptum UJEP v Brně, SNTL, Praha 1989, pp. 281, ISBN 17-248-89.

[8] Schmidtmayer J., *Maticový počet a jeho použití v technice*, SNTL, Praha 1974, pp. 360, ISBN 04-007-74.