Na základě příkladů 19 až 22 lze tedy uzavřít: SLR

a) nemá žádné řešení, pokud $h(A) < h(A|b)$

b) má jediné řešení, pokud $h(A) = h(A|b) = n$ ↑ počet neznámých

c) má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A|b) < n$

Zabývejme se nyní ještě chvilečku tzv. homogenními SLR, protože ten má zajímavé vlastnosti z hlediska pojmu vektorový prostor:

$$
(\text{SLR-hom}) \quad \left\{
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0\\
&\ \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

Za prvé, $n$-tice $[0,0,\dots,0]$ je vždy řešením (SLR-hom), po dosazení je 0 na pravé i levé straně rovnic

<u>Věta 10</u>. Množina řešení (SLR-hom) <u>tvoří vektorový prostor</u> dimenze $n - h(A)$ ↑ počet neznámých

[Dk.: pro důkaz vektorového podprostoru stačí ukázat, že pro dvě řešení $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1\\ t_2\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}$ je i každá jejich lineární kombinace $\alpha\cdot\vec{s} + \beta\cdot\vec{t}$ také řešením (SLR-hom):

$\vec{s}$ je řešením (SLR-hom): $\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}\cdot s_1 + \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}\cdot s_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot s_n = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\vec{t}$ je řešením (SLR-hom): $\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}\cdot t_1 + \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}\cdot t_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot t_n = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ pak

$\alpha\cdot\vec{s} + \beta\cdot\vec{t}$ je řešením (SLR-hom):

$$
\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m,1}\end{pmatrix}\cdot(\alpha\cdot s_1 + \beta\cdot t_1) + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot(\alpha\cdot s_n + \beta\cdot t_n) = \alpha\cdot\underbrace{\left[\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m,1}\end{pmatrix}\cdot s_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot s_n\right]}_{=0,\ \text{protože } \vec{s} \text{ je řešením}} + \beta\cdot\underbrace{\left[\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}\cdot t_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{m,n}\end{pmatrix}\cdot t_n\right]}_{=0,\ \text{protože } \vec{t} \text{ je řešením}} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}
$$

– přeházíme pořadí
– vytkneme $\alpha$
– vytkneme $\beta$

dimenzi prostoru řešení (SLR-hom) vysvětlíme na příkladu ]

**Příklad 2.3**: Najděte obecné řešení (SLR-hom)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - \tfrac{1}{3}x_5 &= 0 \\ x_3 \qquad + \tfrac{1}{2}x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

[Řešení: matice systému už je ve schodovitém tvaru, tj. jen sestavíme množinu řešení. Protože $h(A) < 5 = n$, víme, že řešení bude nekonečně mnoho; dále víme, že počet parametrů, za které lze dosadit jakékoli reálné číslo, je $n - h(A) = 5 - 3 = \underline{\underline{2}}$ ... dvě neznámé označíme jako parametry: například: $x_5 := t$

$x_4$ ... nemůžeme volit jako parametr, protože ze třetí rovnice vyjádříme v závislosti na $x_5$: $x_4 = 2x_5 = 2t$

$x_3$ ... nemůžeme volit jako parametr, protože ze druhé rovnice vyjádříme v závislosti na $x_5$: $x_3 = -\frac{1}{2}x_5 = -\frac{1}{2}t$

$x_2 := s$

$x_1$ vyjádříme ze první rovnice: $x_1 = -2x_2 + \frac{1}{3}x_5 = -2s + \frac{1}{3}t$

Celkem množina řešení

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -2s + \frac{1}{3}t \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ pro } s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$n - h(A)$ nezávislých vektorů tzv. fundamentální systém řešení

Jejich lineární kombinace $s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ||| obecné řešení (SLR-hom)

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je řešení, které dostaneme volbou $s = 1, t = 0$ ; $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ je řešení, které dostaneme volbou $s = 0, t = 1$

Touto nezávislou volbou parametrů (jeden je roven jedné, ostatní jsou rovny nule) dostaneme tzv. fundamentální řešení, která vytváří bázi prostoru K všech řešení (SLR-hom). ]

**Def. 17** Obecné řešení SLR, SLR-hom ... řešení, ve kterém se vyskytují parametry

Partikulární řešení SLR, SLR-hom ... jedno řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů

Jaký je vztah mezi obecným řešením SLR a obecným řešením SLR-hom?
Podívejme se na konkrétní příklad, a souvislost pak zapíšeme do věty 11.

Př. 24. Vyřešte SLR a SLR-hom pro stejnou matici $A$ levých stran rovnic a prozkoumejte souvislosti mezi množinami řešení:

$$(SLR)\quad \begin{aligned} x+y+2z+3w&=13\\ x-2y+z+w&=8\\ 3x+y+z-w&=1\end{aligned} \qquad\qquad (SLR-hom)\quad \begin{aligned} x+y+2z+3w&=0\\ x-2y+z+w&=0\\ 3x+y+z-w&=0\end{aligned}$$

[Řešení: nejprve (SLR): zapíšeme systém do matice a řešíme Gaussovou eliminací

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&13\\ 1&-2&1&1&8\\ 3&1&1&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1\\ -3\cdot r_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&13\\ 0&-3&-1&-2&-5\\ 0&-2&-5&-10&-38\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2\\ \cdot(-3)\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&13\\ 0&-6&-2&-4&-10\\ 0&6&15&30&114\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ +r_2\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&13\\ 0&3&1&2&5\\ 0&0&13&26&104\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{13}\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&13\\ 0&3&1&2&5\\ 0&0&1&2&8\end{array}\right)$$

počet parametrů $= n - h(A) = 4-3 = \underline{\underline{1}}$

zpětný chod: $x_4 = t$ ... parametr

$x_3 = 8-2t$

$x_2 = \frac{1}{3}(5 - x_3 - 2x_4) = \frac{1}{3}(5-8+2t-2t) = -1$

$x_1 = 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 13+1-16+4t-3t = -2+t$

$$\Rightarrow K = \left\{\begin{pmatrix}-2+t\\-1\\8-2t\\t\end{pmatrix}; t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\8\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

obecné řešení SLR

SLR-hom: úpravy jsou stejné, jen sloupec pravých stran jsou nuly:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&0\\ 1&-2&1&1&0\\ 3&1&1&-1&0\end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&2&3&0\\ 0&3&1&2&0\\ 0&0&1&2&0\end{array}\right)$$

počet parametrů $n - h(A) = 4-3=1$

zpětný chod: $x_4 = t$ ... parametr

$x_3 = -2t$

$x_2 = \frac{1}{3}(-x_3-2x_4) = \frac{1}{3}(2t-2t) = 0$

$x_1 = -x_2-2x_3-3x_4 = 4t-3t = t$

$$\Rightarrow K_h = \left\{\begin{pmatrix}t\\0\\-2t\\t\end{pmatrix}; t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

obecné řešení (SLR-hom)

Porovnání SLR a SLR-hom:

$\begin{pmatrix}2\\-1\\8\\0\end{pmatrix}$ je jedno konkrétní řešení SLR volbou $t=0$, nazveme ho partikulární řešení

= jedno konkrétní řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametru či parametrů

**Věta 11** (princip superpozice): Obecné řešení SLR = partikulární řešení SLR + obecné řešení (SLR-hom)

[ od př. 24: $\begin{pmatrix}-2\\-1\\8\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\8\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$ ]

## Kapitola 4: maticové operace, maticová metoda řešení SLR

3. metoda řešení SLR – pomocí operací s maticemi (maticová metoda)

Kdybychom dokázali nějak definovat násobení matic či násobení matice krát vektor, lze SLR psát v maticovém zápisu: $m=n$ … VRAŤME SE K SITUACI ČTVERCOVÉ MATICE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$$

jak víme z algebry 1, pokud by existovalo něco jako inverzní matice vzhledem k násobení, mohli bychom řešení $\vec{x}$ spočítat právě pomocí $A^{-1}$

$\cdot A^{-1}$ zleva

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}$$

Podívejme se tedy na operace sčítání matic a násobení matic, v jakém smyslu je možné tyto operace definovat a jaké vlastnosti splňují:

**Def. 18** $A, B$ … matice typu $m \backslash n$ … stejného typu! Pak součet matic $A+B$ definujeme jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Jaké vlastnosti bychom mohli u takto definovaného sčítání matic očekávat?

**Věta 12** $(M_{m\times n}, +)$ je komutativní grupa.

[Dk. ① uzavřenost operace: výsledkem součtu je opět matice stejného typu $m\backslash n$

② asociativita: $(A+B)+C = A+(B+C)$ … plyne z asociativity sčítání reálných čísel

③ neutrálním prvkem vzhledem ke sčítání je matice samých nul $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ typu $m\backslash n$

④ inverzí k $A$ je matice $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & & -a_{mn} \end{pmatrix}$

⑤ komutativita plyne ze komutativity sčítání reálných čísel ]

**Def. 19** A je matice typu m/k, B je matice typu k/n. Pak lze definovat součin matic $C = A\cdot B$ jako matici typu m/n, kterou získáme pomocí vzorce

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\cdot b_{lj} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{ik}\cdot b_{kj}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \hline & & & \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} j\text{-tý sloupec} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \boxed{\;} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & & b_{kn} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1k}b_{k1} & \dots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\dots+a_{1k}b_{kn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2k}b_{k1} & \dots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\dots+a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mk}b_{k1} & \dots & a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+\dots+a_{mk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

**Poznámka**: pokud trochu předběhneme pojem skalárního součinu, na pozici $(i,j)$ výsledné matice se vyskytuje skalární součin $i$-tého řádku matice $A$ a $j$-tého sloupce matice $B$ jak jej známe možná z analytické geometrie SŠ:

$$\underbrace{c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})\cdot\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj}\end{pmatrix}}_{\vec{a}_{i,\cdot}\,\cdot\,\vec{b}_{\cdot,j}} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{ik}\cdot b_{kj}$$

(složky obou vektorů na odpovídajících pozicích vynásobíme, všechny tyto součiny sečteme)

**Př. 25**

Pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ -8 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ je součinem $C = A\cdot B$ matice typu 3\2,

typu 3\4     typu 4/2

aby bylo možné provést skalární součin vektorů, řádky A a sloupce B musí mít stejnou délku

kde

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot(-4)+(-1)\cdot 1+0\cdot(-2) & 1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot(-3) \\ 0\cdot 3+1\cdot(-4)+(-1)\cdot 1+(-7)\cdot(-2) & 0\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-7)\cdot(-3) \\ -8\cdot 3+0\cdot(-4)+0\cdot 1+(-5)\cdot(-2) & -8\cdot 2+0\cdot 1+0\cdot 0+(-5)\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1,2,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\-2\end{pmatrix} & (1,2,-1,0)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix} \\ (0,1,-1,-7)\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\-2\end{pmatrix} & (0,1,-1,-7)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix} \\ (-8,0,0,-5)\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\-2\end{pmatrix} & (-8,0,0,-5)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & 22 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$$

typu 3\2