Př. 30 Příklady lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory:

a) Ke každé matici A typu $m \backslash n$ existuje lineární zobrazení $\varphi : R^n \to R^m$, které lze touto maticí reprezentovat.

b) Nulová matice typu $m \backslash n$ zobrazí všechny vektory prostoru R^n na nulový vektor $\vec{o} \in R^m$. (tzv. nulové zobrazení)

c) Jednotková matice E_n typu $n \backslash n$ (= řádu n) představuje identické zobrazení, které zobrazí každý vektor $\vec{v} \in R^n$ na sebe sama.

d) Zobrazení $V \to V$, které přiřadí každému vektoru $\vec{v} \in V$ jeho λ-násobek $\lambda \cdot \vec{v}$, kde λ je konstanta z tělesa T, je lineární a tzv. podobnostní zobrazení.

V libovolné bázi je matice tohoto zobrazení

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

e) Zavedeme v R^2 tzv. polární souřadnice ρ, φ (stejné jako ρ a φ v goniometrickém tvaru komplexního čísla):

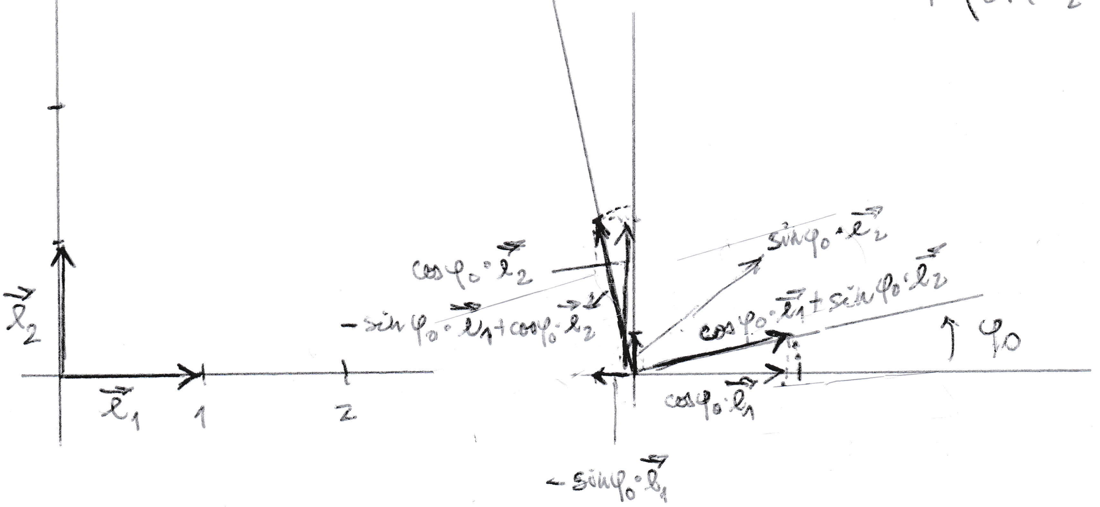
ρ = vzdálenost daného bodu od počátku,

φ = úhel, který svírá průvodič bodu s kladným směrem osy x.

Zobrazení

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi + \varphi_0 \end{pmatrix}$$ představuje pootočení roviny o úhel φ_0

je lineární zobrazení, tzv. rotace o úhel φ_0; pokusme se najít matici tohoto zobrazení pro bázi $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Tedy $\vec{e}_1 \longmapsto \cos\varphi_0 \cdot \vec{e}_1 + \sin\varphi_0 \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi_0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sin\varphi_0 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi_0\\ \sin\varphi_0\end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 \longmapsto -\sin\varphi_0 \cdot \vec{e}_1 + \cos\varphi_0 \cdot \vec{e}_2 = -\sin\varphi_0 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \cos\varphi_0 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi_0\\ \cos\varphi_0\end{pmatrix}$

Víme, že obrazy vektorů báze vytvářejí sloupce matice A:

$$A = \begin{pmatrix}\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0\\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\end{pmatrix}$$

Pak dohromady $\forall \vec{v} \in V = \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0\\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\end{pmatrix}}_{\text{zadání zobrazení maticí}} \cdot \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}v_1\cos\varphi_0 - v_2\sin\varphi_0\\ v_1\sin\varphi_0 + v_2\cos\varphi_0\end{pmatrix}}_{\text{zadání zobrazení předpisem}}$$

zadání zobrazení předpisem:

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\cos\varphi_0 - v_2\sin\varphi_0\\ v_1\sin\varphi_0 + v_2\cos\varphi_0\end{pmatrix}$$

f) pro $m < n$ je lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ v bázi $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n$ projekcí prostoru $\mathbb{R}^n$ na podprostor dimenze m (s bází $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$), tj.

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\\ v_{m+1}\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

najdeme matici reprezentující toto zobrazení:

$\vec{e}_1 \longmapsto \vec{e}_1$
$\vec{e}_2 \longmapsto \vec{e}_2$
$\vdots$
$\vec{e}_m \longmapsto \vec{e}_m$
} prvních m vektorů se zobrazí na sebe sama

$\vec{e}_{m+1} \longmapsto \vec{0}$
$\vdots$
$\vec{e}_n \longmapsto \vec{0}$
} dalších $n-m$ vektorů se zobrazí na nulový vektor

prvních m souřadnic vektoru $\vec{v}$ zachováme, další souřadnice budou tedy nulové 0

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow m\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

g) Uvažujme následující zobrazení $\varphi: V \to V$, kde $\dim V = n$, mat. $= A$

$\psi: V \to V$, mat. $= B$

A složené zobrazení $\psi \circ \varphi : V \to V$

s maticí $\underline{B \cdot A = E}$; : složením těchto zobrazení vzniklo identické zobrazení

Množina čtvercových matic s operací násobení, bez nulové matice vzhledem ke sčítání, není grupa. Proto nemůžeme ze vztahu $B \cdot A = E$ zase použít větu 4 z algebry 1 říci, že B je inverzní k A a A je inverzní k B. Inverzní matice k A ani k B totiž nemusí existovat.

Maximálně můžeme říci, že

(definice 24) Při $A \cdot B = E$ se matice A ||| levá inverze matice B,
matice B ||| pravá inverze matice A vzhledem k násobení

Věta 19 a) maticový operátor A (tj. matice příslušející k lineárnímu zobrazení)
může mít více levých inverzí a žádnou pravou inverzi
více pravých inverzí a žádnou levou inverzi] příklady viz cvičení

b) jakmile P je nějaká levá inverze matice A
Q je pravá inverze k matici A $\Big\} \Longrightarrow P = Q$ a žádná další levá ani pravá inverze k A neexistuje

[Důkaz: ad a) viz cvičení

ad b) $$P = P \cdot E = P \cdot (A \cdot Q) = (PA) \cdot Q = E \cdot Q = Q$$
(vlastně tentýž důkaz jako u věty 2 v algebře 1)]

Def. 25 Pokud matice A lineárního zobrazení $V \to V$ je invertibilní (tj. existuje její jednoznačná levá i pravá inverze A^{-1}), lineární zobrazení zadané maticí A^{-1} ||| inverzní lineární zobrazení

Příklad 31 a) lineární zobrazení φ zadané maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ (matice ze př. 17)

zobrazí např. vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi}$ na vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{y}$: $\boxed{\vec{y} = A \cdot \vec{x}}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pak inverzní zobrazení φ^{-1} je zadáno inverzní maticí
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

která naopak zobrazí vektor $\vec{y}$ na vektor $\vec{x}$:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}}, \text{ tj. } \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: existuje tedy vztah mezi systémem lineárních rovnic s maticí A a lineárním zobrazením s maticí A:

Např. řešit systém rovnic (ad př. 19)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

znamená hledat vzor vektoru pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k lineárnímu zobrazení φ zadanému touž maticí A:

zjistíme, že existuje jediný vzor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, který bychom našli též inverzním zobrazením φ^{-1}:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dále např. řešit systém rovnic (ad př. 20)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$$
znamená hledat vzor vektoru pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ vzhledem k lin. zob. φ zadanému maticí A:

V příkladu 20 jsme zjistili, že těchto vzorů je nekonečně mnoho
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-2p \\ 2+3p \\ 3+2p \\ 0+p \end{pmatrix}$$

(takže ačkoli inverzní relace φ^{-1} není lineárním zobrazením, (neexistuje matice, která ji reprezentuje) protože např. pro vzor (při φ^{-1}) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ existuje nekonečně mnoho obrazů, lze symbolem $\varphi^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ označit celou nekonečnou množinu vzorů $\begin{pmatrix} -5-2p \\ 2+3p \\ 3+2p \\ 0+p \end{pmatrix}$

A nakonec, řešit systém rovnic (ad př. 22)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$
znamená hledat vzor vektoru $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k zobrazení φ zadanému touž maticí.

Z př. 22 lze vidět, že žádný takový vzor neexistuje – to znamená, že $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} f$.)

b) Ad př. 30, část (e): najděte matici inverzního pootočení roviny o úhel MINUS φ_0.

(viz cvičení)

Poslední šestice příkladů skrývá dává inspiraci k následující definici:
(pro $\varphi: V \to V$ a vektor $\vec{v} \in S$ někdy $\varphi(\vec{v}) \in S$, jindy $\varphi(\vec{v}) \notin S$)

Definice 26 Podprostor S vektorového prostoru V je invariantní podprostor vzhledem k lineárnímu zobrazení $\varphi: V \to V$, pokud $\varphi(S) \subseteq S$

vlastně jakási vlastnost uzavřenosti podprostoru S vzhledem k lineárnímu zobrazení φ:
invariantní podprostor S vzhledem k φ
je zobrazen do (nebo na) sebe sama.

Ad př. 30 ad b, c, d) každý podprostor S je invariantní vzhledem k nulovému zobrazení, identitě i podobnostnímu zobrazení

ad a) Prostor $\{\vec{o}\}$ a prostor V samotný jsou triviálními invariantními podprostory vzhledem k lineárnímu φ – ty existují vždy.

ad e) Vzhledem k pootočení o úhel φ_0 v rovině je pro $\varphi_0 \neq k\pi$ invariantním podprostorem jen ten triviální – $\{o\}$ nebo celý V. Pokud ovšem $\varphi_0 = k\pi$ (pootočení o násobek π), každá množina bodů na přímce je jednorozměrným invariantním podprostorem

ad f) u projekce R^n na podprostor prvních m souřadnic jsou invariantními podprostory (mimo jiné) například prostory $S_1 = \{\vec{v} \in L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)\}$

$$S_2 = \{\vec{w} \in L(\vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n)\}$$

(vektory z S_1 se zobrazí na sebe sama... jedná se o vektory typu
$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m, 0, \dots, 0)$;
vektory z S_2 se zobrazí na nulový vektor)

Př. 32 Důležitým příkladem zobrazení lineárního, jež budeme studovat na dalších podrobněji, je tzv. diagonální zobrazení φ – to je takové lineární zobrazení $V \to V$, které můžeme zkonstruovat pro jakoukoli bázi $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ prostoru V:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_1 &\mapsto \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 &\mapsto \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 \\ &\vdots \\ \vec{u}_n &\mapsto \lambda_n \cdot \vec{u}_n \end{aligned}\right\}$$

každý vektor báze se zobrazí na nějaký svůj násobek; pak pro $\vec{v} \in L(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi} \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{pmatrix}$

zobrazení je reprezentováno maticí

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Zde libovolný podprostor S generovaný některými z bázových vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ je invariantní vzhledem k tomuto diagonálnímu zobrazení φ.