Algebra 2 – přednáška 01

Algebra je věda o řešení rovnic a speciálně Algebra 2 = lineární algebra se zabývá řešením systému lineárních rovnic. Začneme dvěma rovnicemi o dvou neznámých.

1. metoda – Cramerovo pravidlo – najde totální vzorec, který platí vždy:

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1 \quad /\cdot a_{22}$$
$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 = b_2 \quad /\cdot (-a_{12})$$

a_{ij} ... reálná čísla
x_i ... reálné proměnné

Vynásobíme první rovnici číslem a_{22}, druhou rovnici číslem $(-a_{12})$ a obě rovnice sečteme; ve výsledné rovnici se vyruší neznámá x_2, a pak z ní vyjádříme x_1:

$$x_1\cdot(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = b_1a_{22}-b_2a_{12} \Rightarrow x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

označme $|A_1|$

označme $|A|$

Podobně provedeme násobení takovými konstantami, aby při sečtení obou rovnic vypadla neznámá x_1, a z výsledné rovnice pak vyjádříme x_2:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad /\cdot(-a_{21})$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad /\cdot a_{11}$$

$$x_2(a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}) = b_2a_{11}-b_1a_{21} \Rightarrow x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

označme $|A_2|$

to je zase $|A|$

Podobné totální vzorce lze najít i pro systém tří lineárních rovnic o třech neznámých:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

zase násobíme rovnice čísly a sčítáme, proces je trochu složitější a ve výsledné rovnici vypadnou vždy dvě neznámé; dostaneme vzorce

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \text{ kde}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overset{id}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \overset{(1,2,3)}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \overset{(1,3,2)}{a_{13}a_{21}\cdot a_{32}} -$$

$$- \overset{(2,3)}{a_{11}\cdot a_{23}a_{32}} - \overset{(1,3)}{a_{22}\cdot a_{13}\cdot a_{31}} - \overset{(1,2)}{a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21}} = \text{výsledkem je číslo}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

($|A_1|, |A_2|, |A_3|$ se spočítají obdobným způsobem jako $|A|$, pouze jeden sloupec čísel je jiný)

Pozn.: Všimněte si, že při výpočtu $|A|$ vystupují permutace indexů, všechny prvky grupy $(S_3, \circ)$!

(označení permutace je vyznačeno nad každým součinem)

Definice 1: Čtvercové nebo obdélníkové schéma čísel ||| matice A typu $m \backslash n$

m značí počet řádků, n značí počet sloupců matice.

(matice zpravidla označujeme velkými písmeny $A, B, C, \ldots$)

(Tedy A, A_1, A_2, A_3 jsou matice typu $3 \backslash 3$ = matice řádu 3)

Definice 2 Determinant čtvercové matice A ||| číslo, které čtvercové matici přiřadíme podle vzorce

$$\boxed{|A| = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{N(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}}$$

(suma přes všechny možné permutace $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sloupcových indexů z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$,
v každém členu je (-1) umocněno na počet inverzí v dané permutaci,
součin n prvků $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ je součin prvků vybraných ze čtvercové matice tak, aby ze každého řádku a každého sloupce byl vybrán právě jeden činitel)

Počet všech permutací = součinů = členů v dané sumě je $n!$

Př.1 Vyřešte Cramerovým pravidlem (metodou determinantů) systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 \qquad - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

[Řešení: Vypočteme jednotlivé determinanty

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 0 - 0 - (-9) - (-4) = 20$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 + 6 + 0 - 0 - (-16) - (-9) = 40 \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{40}{20} = \underline{\underline{2}}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 27 + 18 - 3 - (-18) - 72 = -20 \Rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-20}{20} = \underline{\underline{-1}}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 48 + 0 - 0 - 12 - (-27) = 60 \Rightarrow x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{60}{20} = \underline{\underline{3}}$$]

Pozn.: Slabina Cramerovy metody: pokud $|A| = 0$, nelze ji použít (nelze dělit nulou!!)

(i ostatní vzorce mají své slabiny; nemůžeme po jednom vzorci chtít všechno)

Př. 2. Pomocí Cramerovy metody determinantů vyřešte systém lineárních rovnic

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$
$$x_1+2x_2-x_3+2x_4=1$$
$$x_1-x_2+2x_3+x_4=-1$$
$$x_1+3x_2+3x_3+2x_4=3$$

[Řešení: napišme si nejdříve vzorec pro determinant čtvercové matice řádu 4:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} -$$

$$- a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - \underline{a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} -$$

$$- a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} -$$

$$- a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

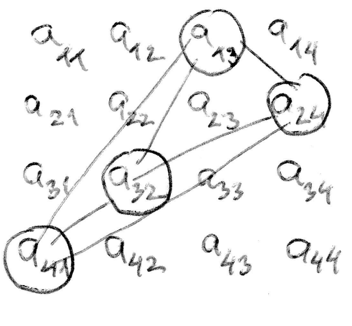
Není ten vzorec nějak složitý? Nešel by ten determinant počítat nějak jednodušeji? Než odpovíme na tuto otázku, prozkoumejme nejprve podrobněji, jak se mění znaménko před každým součinem čtyř prvků:

Vezměme si například součin $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41}$; znaménko před tímto součinem máme:

a) podle počtu inverzí v permutaci sloupců $(3,4,2,1)$ ... inverze je vztah mezi dvěma prvky v daném pořadí, kdy větší prvek se vyskytuje před menším prvkem

musíme projít všech $\binom{n}{2}$ vztahů mezi dvojicemi prvků a zjistíme, že počet inverzí je 5, tj. znaménko je MINUS

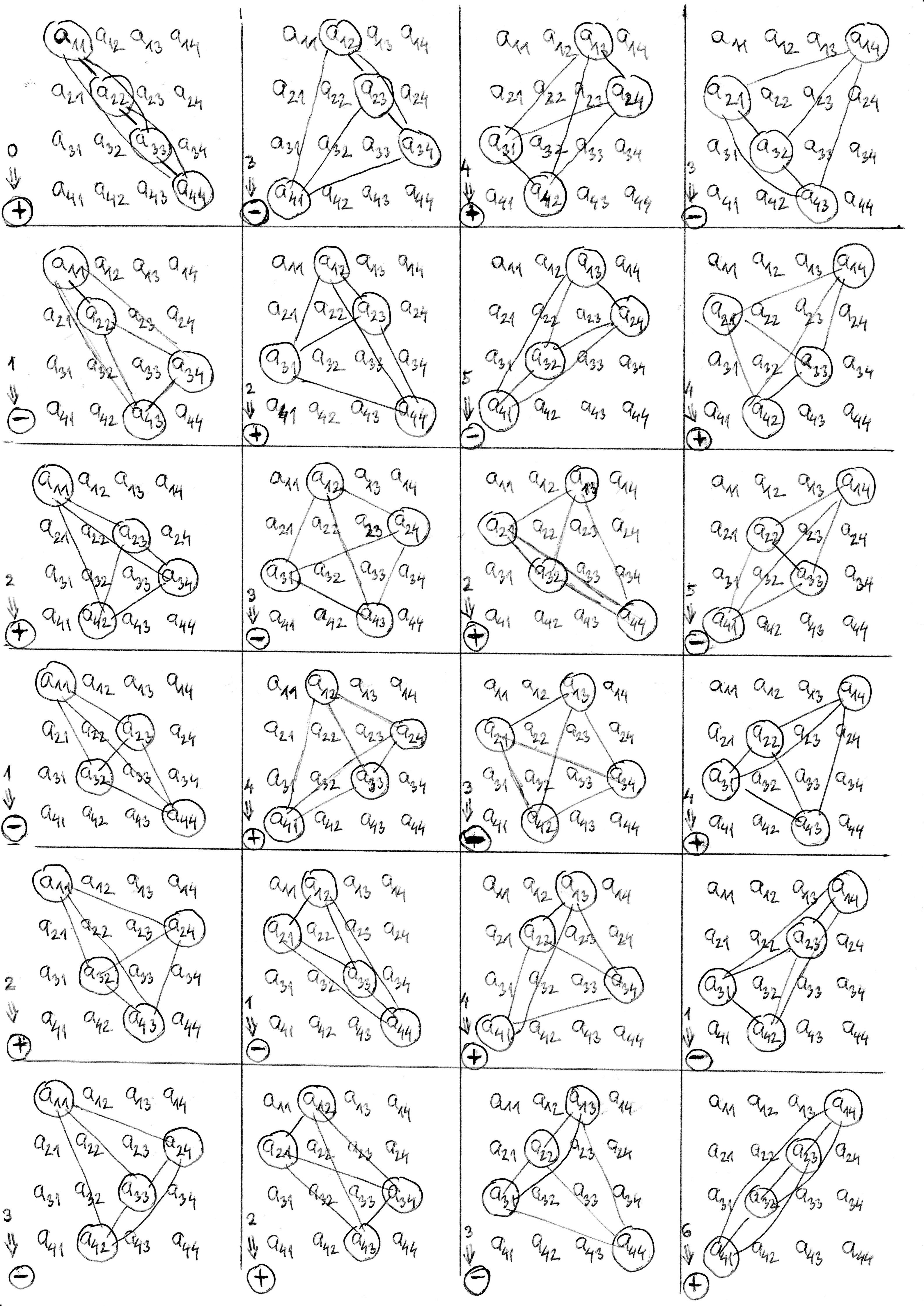
b) z grafického názoru:



Spojíme všechny dvojice v dané vybrané n-tici, dostaneme $\binom{n}{2}$ spojů:

větší sloupcový index stojí před menším v takové dvojici, kdy v reprezentaci diskrétního grafu daná hrana má sklon zleva níže doprava výše ... takových sklonů je 5, tj. znaménko je MINUS

(hlavní diagonála: $a_{11} - a_{44}$
vedlejší diagonála: $a_{14} - a_{41}$
inverze je měřena sklonem příbuzným vedlejší diagonále)



0 ⇓ +
3 ⇓ −
4 ⇓ +
3 ⇓ −
1 ⇓ −
2 ⇓ +
5 ⇓ −
4 ⇓ +
2 ⇓ +
3 ⇓ −
2 ⇓ +
5 ⇓ −
1 ⇓ −
4 ⇓ +
3 ⇓ −
4 ⇓ +
2 ⇓ +
1 ⇓ −
4 ⇓ +
1 ⇓ −
3 ⇓ −
2 ⇓ +
3 ⇓ −
6 ⇓ +

Definice 3 Hlavní diagonála čtvercové matice A je diagonála spojující prvky $a_{11} \to a_{nn}$

Vedlejší ——— " ——— $a_{1n} \to a_{n1}$

Definice 4: Inverzi ve vztahu mezi dvěma prvky v permutaci určujeme podle toho, že

a) algebraicky: větší číslo se vyskytuje před menším

b) graficky: hrana spojující dané dva prvky v matici má sklon příbuzný vedlejší diagonále

Prozkoumání definice determinantu nás stále neuklidnilo, řešil př. 2 výpočtem determinantu z definice je stále dosti komplikované. Podívejme se na některé další vlastnosti determinantu, které usnadňují jeho výpočet.

Věta 1 (Cramerovo pravidlo): pokud $|A| \neq 0$ a $m = n$, $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$, …, $x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|}$

Věta 2 (vlastnosti determinantu čtvercové matice)

D1. $|A| = |A^T|$ (determinant se transponováním matice nemění)

Def. 5 Matice A^T transponovaná k matici A je matice vzniklá ze A záměnou řádků za sloupce

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[Důkaz: Transponováním matice je „překlopíme" symetricky vzhledem k hlavní diagonále → n-tice prvků vybrané pro $|A|$ zůstane n-ticí, která se vyskytuje i v $|A^T|$.

Počet inverzí v permutaci určené touto n-ticí se transponováním nezmění (směr příbuzný vedlejší diagonále se překlopením vzhledem k hlavní diagonále nezmění, " stále zůstává příbuzný vedlejší diagonále), tj. nemění se ani znaménko před tímto součinem

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \xrightarrow{\text{transponování}} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{matrix}$$]

Z vlastnosti D1 plyne, že všechny další vlastnosti, které vyslovíme pro řádky čtvercové matice, platí (beze je přeformulovat) i pro sloupce.