Zabývejme se nyní chvíli otázkou podobnou otázce z teorie grup (Alg 1, věta 6):
Co musí splňovat podmnožina S vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$, aby též $(S,+,\cdot)$ byl vektorový prostor?

Definice 11 Vektorový podprostor prostoru $(V,+,\cdot)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$ je taková podmnožina S tohoto prostoru, která je uzavřená vzhledem k operaci $+$ (sčítání vektorů) ①
a $\cdot$ (násobení skalár KRÁT vektor) "①",

tj. je uzavřená na lineární kombinaci vektorů z S:

$$\forall \vec{u},\vec{v}\in S,\ \forall \alpha,\beta\in T:\ \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\in S$$

①+"①" ... uzavřenost na součet součinů skalár KRÁT vektor

Pozn. [Vlastnosti ②, ⑤, "②", "③", "6a", "6b" plynou automaticky z toho, že $S \subseteq V$.
Zbývá ověřit, že platí ③: pro libov. $\vec{u}\in S$: podle ①+"①": $0\cdot\vec{u}+0\cdot\vec{u}\in S$
$\vec{o}\in S$ ... platí ③
a ④ pro libov. $\vec{u}\in S$: podle ①+"①": $(-1)\cdot\vec{u}+0\cdot\vec{u}\in S$
$-\vec{u}\in S$ ... platí ④]

Př. 13 Podívejme se na některé příklady vektorových podprostorů:

a) každý vektorový prostor $(V,+,\cdot)$ má dva triviální podprostory – prostor $\{\vec{o}\}$ ... nejmenší možný podprostor
– celý prostor V je podprostorem sebe sama

b) body na přímce p procházející počátkem tvoří vektorový podprostor celé roviny $\mathbb{R}^2$
– " – q neprocházející – " – netvoří – " – " – ,
protože neobsahují nulový vektor – bod $[0;0]$

c) – body v rovině α procházející počátkem tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$
– body β neprocházející – " – netvoří – " – " – ,
protože neobsahují nulový vektor – bod $[0;0;0]$

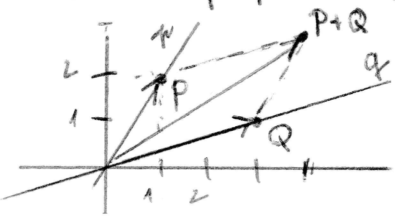
Věta 3 Je průnik dvou podprostorů S_1, S_2 prostoru $(V,+,\cdot)$ vektorovým podprostorem? ANO

[Důkaz: $\vec{u},\vec{v}\in S_1\cap S_2 \Rightarrow \vec{u},\vec{v}\in S_1 \Rightarrow \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\in S_1$; $\vec{u},\vec{v}\in S_1\cap S_2 \Rightarrow \vec{u},\vec{v}\in S_2 \Rightarrow \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\in S_2$; $\Rightarrow \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\in S_1\cap S_2$]

Př. 14. Průnik dvou rovin α, β procházejících počátkem a různoběžných je přímka p, která leží v jejich průniku (tato přímka tedy také prochází počátkem)... tato přímka je také vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

Věta 4. Musí být sjednocení dvou podprostorů S_1, S_2 také vektorovým prostorem? NE

[Dk.:



$S_1=\{[x;y]\in p\}$, $S_2=\{[x;y]\in q\}$
např. bod $1\cdot[1;2]+1\cdot[3;1]=[4;3]\notin p\cup q$
$1\cdot P+1\cdot Q=[4;3]$]

Protože sjednocení vektorových podprostorů nemusí být vektorovým podprostorem, přidáme ke sjednocení nějaké další vektory, abychom vektorový podprostor „vyrobili":

<u>Definice 12</u>: $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je posloupnost vektorů, ne nutně nezávislých, ve vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$.

Lineární obal množiny $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ (značíme $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$) :=

$:= \{ \vec{u} \in V : \vec{u}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$, tj.
$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$ pro nějaká $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$.

Alternativně říkáme, že $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ je podprostor generovaný vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$

(značíme $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$).

<u>Definice 13</u> Součet podprostorů S_1, S_2 prostoru $(V, +, \cdot)$ je $L(S_1 \cup S_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} : \vec{u} \in S_1, \vec{v} \in S_2\}$

(součet podprostorů S_1, S_2 je podprostor, který vznikne jako lineární obal jejich sjednocení)

<u>Ad př. 14</u> $L(S_1 \cup S_2) = \mathbb{R}^2$ ... lineární obal bodů na osou přímkách je už celá rovina

(alternativní zápis: $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \mathbb{R}^2$) ... $\mathbb{R}^2$ je generována lineárními kombinacemi bodů z $S_1 \cup S_2$

Jak souvisí pojem lineární nezávislosti vektorů a pojmem lineárního obalu či množiny generátorů, uvedeme v následující větě (část (5b) je pouze zobecněním části (5a) na větší počet vektorů než dva)

<u>Věta 5a.</u> Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé $\iff$ vektory $\vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$, $(\beta \neq 0)$, jsou lineárně nezávislé

[<u>Důkaz</u>: $\vec{u}, \vec{v}$ jsou nezávislé $\iff$ jsou oba nenulové a $\vec{v}$ není násobkem vektoru $\vec{u}$ $(\vec{v} \notin \langle \vec{u} \rangle)$

$\iff \begin{matrix} \vec{u} \neq \vec{o} \\ \vec{v} \neq \vec{o} \end{matrix} \wedge \vec{v} \neq k \cdot \vec{u}$ pro žádné $k \in \mathbb{R}$ $\iff \begin{matrix} \vec{u} \neq \vec{o} \\ \vec{v} \neq \vec{o} \end{matrix} \wedge \alpha \cdot \vec{u} + \beta \vec{v} \neq \underbrace{\alpha \vec{u} + \beta \cdot k \cdot \vec{u}}_{= (\alpha + \beta k) \cdot \vec{u}}$

$\iff \vec{u}, \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ jsou dva nezávislé vektory]

<u>Věta 5b</u> $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou lin. nezáv. $\iff$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k + \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \vec{u}_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé

[Dk.: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou lin. nezáv. $\iff$ $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}$ jsou nezávislé a navíc

$\vec{o} \neq \vec{u}_k \neq l_1 \vec{u}_1 + l_2 \vec{u}_2 + \dots + l_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1}$ (pro žádnou kombinaci $l_1, \dots, l_{k-1}$, z nichž aspoň jedno číslo je nenulové (jinak by $\vec{u}_k = 0$, ale takové $\vec{u}_k$ nemůže být))

to nastane právě tehdy, když

$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}$ jsou nezávislé a navíc

$\underset{\vec{o}}{\overset{\vec{u}_k}{\not\shortparallel}} + \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1} \neq \underbrace{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1} + l_1 \vec{u}_1 + \dots + l_{k-1} \vec{u}_{k-1}}_{= (\alpha_1 + l_1) \cdot \vec{u}_1 + \dots + (\alpha_{k-1} + l_{k-1}) \cdot \vec{u}_{k-1}}$

$\iff \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k + \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1}$ jsou lin. nezávislé]

Pozn. 1, tj. nezávislost vektorů se nemění podobně jako výsledek determinantu (viz D4), když k jednomu vektoru přičteme lineární kombinaci vektorů ostatních.

Z toho plyne i postup, jak zjišťujeme, zda posloupnost vektorů je lineárně nezávislá: složíme vektory jako řádky do matice a v ní „vyrábíme" schodový tvar (větší počet nul) pomocí úprav D4. Tím se nemění závislost/nezávislost těchto vektorů.

Když v průběhu úprav dostaneme ze řádku $\vec{a}_\ell$ řádek samých nul ($\vec{a}_\ell + \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{a}_k = \vec{o}$), znamená to, že $\vec{a}_\ell = -\alpha_1 \vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2 - \dots - \alpha_k \cdot \vec{a}_k$, tj. $\vec{a}_\ell$ je lineární kombinací některých jiných řádků $\Longleftrightarrow$ původní řádky matice byly lineárně závislé.

2, víme dokonce víc: ten řádek, ze kterého pomocí úprav D4 vyjde řádek samých nul, je lineárně závislý na ostatních řádcích, tj. když hledáme minimální množinu generátorů (= bázi) daného podprostoru, můžeme tento vektor vypustit.

Př. 15 (Zlatoš 104, př. 4.5. a)) Vyberte ze zadaných vektorů lineárně nezávislé vektory, které generují tentýž vektorový podprostor jako původní vektory: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) zjistěte, zda vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ patří do $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

[Řešení: ad a) dejme vektory do řádků matice a upravme na schodový tvar pomocí úprav D4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} +2 \cdot r_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot r_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

třetí vektor lze vypustit, protože je závislý na prvních dvou vektorech:

posloupnost $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ je bází vektorového podprostoru $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

ad b) $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$: hledejme α_1, α_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,

tj. rozepsáním do souřadnic řešíme systém lineárních rovnic

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \\ 2 &= \alpha_1 + 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \tfrac{1}{3} \\ -1 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -1 \end{aligned}\right\}$$

nemůže nastat současně, systém rovnic tedy nemá řešení, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$]

Př. 16 (Zlatoš 119, 5.3.a) Doplňte vektory $g(x) = 1 + 2x + 7x^2$, $h(x) = 1 + x$ na bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty (= nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

[Řešení: polynom stupně 2 má tři koeficienty, tj. $\dim(\mathbb{R}^2[x], +, \cdot) = 3$. Stačí doplnit bázi jedním vektorem: $g(x) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $h(x) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ... např. $i(x) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. $i(x) = 1$

$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ... příslušný schodový tvar neobsahuje nulový řádek: žádný vektor není závislý na těch ostatních vektorech]

Př. 17 (Zlatoš 099, př. 4.5.1) Patří vektory $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do lineárního obalu vektorů

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

Odpověď: $\vec{y} \overset{?}{\in} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \rangle$

řešíme systém lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rozepíšeme do souřadnic:

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 + 3\alpha_3 \\ 5 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ -2 &= -\alpha_1 - 3\alpha_3 + \alpha_4 \\ 1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4 \end{aligned}$$

ANO, protože daný systém lineárních rovnic má alespoň jedno řešení

$\vec{z} \overset{?}{\in} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \rangle$

řešíme systém lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rozepíšeme do souřadnic:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + 3\alpha_3 \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 &= -\alpha_1 - 3\alpha_3 + \alpha_4 \\ 1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4 \end{aligned}$$

NE, protože daný systém lineárních rovnic nemá žádné řešení]

Def. 14. Při řešení systému lin. rovnic

$$(SLR) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &a_{ij} \in R, b_i \in R \text{ jsou konstanty} \\ &x_j \in R \text{ jsou neznámé} \end{aligned}$$

jsou následující úpravy označovány za elementární řádkové úpravy:

a) vynásobení některé rovnice nenulovým reálným číslem

b) záměna pořadí dvou rovnic

c) k dané rovnici přičteme lineární kombinaci jiných rovnic

Věta 6. Elementární řádkové úpravy systému lineárních rovnic nemění množinu řešení tohoto systému

[Dk.: a) jasné – rovnici lze vynásobit nenulovým reálným číslem, aniž se změní její řešení

b) jasné – na pořadí rovnic v systému nezáleží

c) k-tou rovnici vynásobíme α_k a přičteme k l-té rovnici:

$$\begin{aligned} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n &= b_l \quad / + \alpha_k \cdot (1) \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \\ (a_{l1} + \alpha_k \cdot a_{k1})x_1 + \dots + (a_{ln} + \alpha_k \cdot a_{kn}) &= b_l + \alpha_k \cdot b_k \end{aligned}$$

sečtení dvou rovnic je povolená úprava, která nemění množinu řešení

(opakováním kroku c) lze k l-tému řádku přičíst lineární kombinaci více jiných řádků, a přitom množina řešení stále zůstává zachována)]

Věta 7. (Zlatoš 111) Pokud S, T jsou konečněrozměrné podprostory (= s konečnou dimenzí) vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, tak platí $\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$.

[Dk.: označme $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ ... nějaká báze prostoru $S \cap T$ $(\dim S \cap T = k)$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{m-k}$ ... doplnění báze $S \cap T$ na bázi S $(\dim S = m)$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-k}$ ... doplnění báze $S \cap T$ na bázi T $(\dim T = n)$

není moc práce si uvědomit, že

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{m-k}, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-k}) \text{ je bází } (S+T)$$

- $\vec{v}_i$ jsou nezávislé na $\vec{u}_i$ ... plyne ze konstrukce báze S
- $\vec{w}_i$ jsou nezávislé na $\vec{u}_i$ ... plyne ze konstrukce báze T
- $\vec{v}_i$ jsou nezávislé na $\vec{w}_i$ (pokud by nějaký v_{i_0} byl lineární kombinací nějakých dvojvéček, ležel by v $S \cap T$, což je spor s označením $\vec{v}_i$ — jedná se o vektory, které už v průniku $S \cap T$ neleží)

Pak rovnost ve větě plyne ze definice dimenze jako počtu vektorů báze daného prostoru]

Př. 18 Jsou zadány podprostory

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Určete bázi a dimenzi prostoru a) U_1

b) U_2

c) $U_1 + U_2$

d) $U_1 \cap U_2$

a) první tři vektory
b) druhé tři vektory
c) všech šest vektorů

[Řešení: a, b, c řešíme podobně: napíšeme dané vektory do řádků matice, upravujeme elementárními řádkovými úpravami na schodový tvar. Pokud se nějaký řádek vynuluje, ze báze ho vyhodíme – dimenzi pak určíme jako počet vektorů dané báze.

d) řešíme JINAK: dimenzi $U_1 \cap U_2$ lze určit pomocí a), b), c) a věty 7.

Bázi průniku $U_1 \cap U_2$ hledáme následujícím způsobem: Uvažujme obecný vektor $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$. Pak $\vec{v}$ je lineární kombinací generátorů U_1 a současně lineární kombinací generátorů U_2:

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Napíšeme tento systém lineárních rovnic do matice jen s tou úpravou, že vše převedeme na levou stranu rovnic a napravo zůstanou nuly:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \text{ — označení neznámých}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ \\ -r_1 \\ -2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot r_2 \\ -2\cdot r_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -2\cdot r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ -\frac{1}{2}\cdot r_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow$ nyní si zjednodušené rovnice přepíšeme:

$$\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \rightarrow \underline{\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2}$$
$$\alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0 \rightarrow \underline{\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2}$$
$$\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = 0$$
$$2\beta_3 = 0 \rightarrow \beta_3 = 0$$

Nyní si obecný vektor $\vec{N}$ z průniku přepíšeme jen pomocí první části, tj. pomocí α_i:

$$\vec{N} = (\beta_1+\beta_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + (\beta_1-\beta_2)\begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix} = \beta_1\cdot\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix}}\Bigg) + \beta_2\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}}\Bigg) =$$

- roznásobíme
- vytkneme β_1
- vytkneme β_2

$$= \underline{\underline{\beta_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix} + \beta_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}}}$$

$\Rightarrow$ dimenze $U_1 \cap U_2 = 2$

báze $U_1 \cap U_2$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$.