Při násobení matic tedy podstatně záleží na jejich pořadí – počet sloupců první matice musí být stejný jako počet řádků druhé matice. Abychom mohli věcee mluvit o násobení matic bez ohledu na jejich pořadí a o inverzní matici, musíme se omezit na čtvercové matice typu n/n neboli čtvercové matice řádu n.

Def. 20 Čtvercová matice A řádu n je singulární, jestliže $h(A) < n$

regulární, jestliže $h(A) = n$

Věta 13 Množina $(M_{n,n}, +, \cdot)$ čtvercových matic řádu n je nekomutativní okruh, který obsahuje netriviální dělitele nuly.

Dk.: Již jsme dokázali ve větě 12, že $(M_{n,n}, +)$ je komutativní grupa, zbývá tedy dokázat (ukázat) vlastnosti, které se týkají operace násobení.

① vynásobením dvou čtvercových matic řádu n vznikne čtvercová matice řádu n (to plyne z definice násobení matic)

② násobení matic je asociativní: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(důkaz plyne rozepsáním součinu na každé pozici matice na levé straně a matice na pravé straně rovnosti; nebude rekonstruováno, je dosti technické, protože se zde vyskytuje šest označení indexů prvků a_{ij}, b_{kl}, c_{rs} (pro zájemce důkaz viz Horák, str. 37, věta 3.3))

③ vzhledem k násobení čtvercových matic $\exists$ neutrální prvek, tzv. jednotková matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

jedničky má pouze na hlavní diagonále, jinak jsou nuly

④ inverzní matice A^{-1} k matici A existuje jen někdy, a sice právě tehdy, když A je regulární (důkaz viz diskuse u metody výpočtu inverzní matice); obecně tedy inverzní matice nemusí existovat.

④ ONDN ... množina obsahuje tzv. netriviální dělitele nuly, tj. nenulové matice, jejichž součinem je nulová matice – například pro $n=3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matice A, B jsou netriviální dělitelé nuly

⑤ Násobení matic není obecně komutativní – buď v opačném pořadí matice nelze násobit, nebo u čtvercových matic dostáváme často různé výsledky.

Vezmeme-li například nalezené dělitele nuly pro $n=3$ ($A\cdot B=0$) a vynásobíme je v opačném pořadí, dostaneme

↑ nulová matice!!

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&5\\1&1&-7\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-7\\-1&-1&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$, tj. $A\cdot B\neq B\cdot A$

(6) distributivní pravidlo:

$$\left.\begin{aligned}A\cdot(B+C)&=AB+AC\\(B+C)\cdot A&=BA+CA\end{aligned}\right\}$$ lze dokázat rozepsáním výsledku na pozici ij]

Rýsuje se nám tedy odpověď na otázku, kdy lze řešit SRL maticovou metodou: jen tehdy, když A je čtvercová ($m=n$) a regulární ($h(A)=n$).

SLR: $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ $/\cdot A^{-1}$ zleva

$$\vec{x}=A^{-1}\cdot b$$

Popíšeme nejprve na příkladu tzv. Gaussovu-Jordanovu metodu výpočtu inverzní matice, a potom ve větách 14, 15 ukážeme, že tento postup je oprávněný a vede k cíli vždy, když A^{-1} existuje.

Př. 26 Pro $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ nalezněte inverzní matici A^{-1} tak, aby $A\cdot A^{-1}=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^{-1}\cdot A=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Řešení:

Začneme tak, že napíšeme matici A, a na ní doprava matici E, tj. $(A|E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$. Dále elementárními řádkovými úpravami upravíme tuto matici typu 3/6 na schodový tvar Gaussovou metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-2\cdot r_1\\ \\\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$ výměna řádků $\sim$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&0&1\\0&-3&-4&-2&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\+3\cdot r_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&0&1\\0&0&2&-2&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\/\cdot\frac{1}{2}\end{array}\sim$$

vynásobením řádků zajistíme, aby na hlavní diagonále byly hodnoty 1

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\boxed{2}&\boxed{3}&1&0&0\\0&1&\boxed{2}&0&0&1\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-2\cdot r_3\\ \\\end{array}$$

v této fázi také poznáme, zda inverzní matice existuje: pokud se na hlavní diagonále schodovitého tvaru vyskytuje 0, tak A^{-1} neexistuje

Tady by končila Gaussova metoda u systému rovnic. Nyní pokračujeme dále a „vyrábíme" nuly nad hlavní diagonálou tak, abychom neporušili nuly pod diagonálou — budeme pokračovat tak dlouho, až na levé straně vytvoříme jednotkovou matici při úpravě r_2 použijeme násobek řádku r_3, který neporuší hodnoty $a_{21}=0, a_{22}=1$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot r_2 - 3\cdot r_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}_{= A^{-1}}$$

lze provést zkoušku: $A\cdot A^{-1} = E$

$A^{-1}\cdot A = E$

Věta 14 Každou ERÚ matice A (přičtení násobku jiného řádku, vynásobení řádku nenulovým číslem, výměnu dvou řádků) lze reprezentovat vynásobením matice A jistou maticí zleva.

[Dk. ukážeme na příkladu, ve kterém použijeme všechny typy elementárních řádkových úprav:

Ad př. 26:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ výměna řádků}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +3\cdot r_2 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{P_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P_4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\cdot r_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\cdot r_2 - 3\cdot r_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provedli jsme celkem výpočet $\underline{P_6\cdot P_5\cdot P_4\cdot P_3\cdot P_2\cdot P_1\cdot A = E_3}$

Každý ze typů ERÚ jsme realizovali vynásobením jistou maticí P_i]

Věta 15 Gaussova-Jordanova metoda

$(A \mid E) \sim$ e. ř. úpravy $\sim (E \mid A^{-1})$ najde vždy inverzní matici A^{-1}, pokud A^{-1} existuje.

[Dk. ad důkaz věty 14 na příkladu 26: Jak je možné, že pomocí ERÚ matice A lze spočítat i A^{-1}, když tytéž ERÚ použijeme na matici E_3?

To plyne ze faktu, že ERÚ představují vynásobení maticemi P_i:

$$\underbrace{P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1}_{\substack{\text{podle věty 4 ze algebry 1} \\ \| \\ A^{-1}}} \cdot A = E_3$$

podle věty 4 ze algebry 1: pokud součin dvou matic je roven neutrálnímu prvku, pak tyto matice jsou si navzájem inverzní

A navíc lze psát $P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 = \underline{P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot E_3}$,

E_3 je neutrální prvek vzhledem k operaci násobení

tento součin znamená, že na jednotkovou matici E_3 použijeme tytéž ERÚ, kterými jsme převáděli A na E_3.]

(K původnímu důkazu věty 15 bychom potřebovali dokázat i vztah $A \cdot \underbrace{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_6}_{A^{-1}} = E$, protože násobení matic je obecně nekomutativní;

vynásobení maticí Q_i zprava představuje sloupcové úpravy,

a matici A^{-1} bychom získali tak, že bychom vytvořili matici typu 6×3 $\left(\frac{A}{E}\right)$ a prováděli Gaussovu eliminaci pro sloupce, nikoli pro řádky

jednotkovou matici napsali pod matici A)

tato část důkazu není povinná, doplňuje pouze celkový obraz: řádkové úpravy matic lze reprezentovat násobením jistou maticí zleva, sloupcové úpravy matic lze reprezentovat násobením jistou maticí zprava

Pozn.: Také je ze postupu pro výpočet A^{-1} jasné, proč tato inverze existuje jen někdy: pokud ve schodovitém tvaru vzniklém ze matice A pomocí ERÚ je některý řádek nulový (některý prvek na hlavní diagonále schodovitého tvaru roven 0), je den řádek (aspoň 1) matice A je závislý na těch ostatních, žádnými ERÚ nelze regulérně „vyrobit" ze tohoto řádku řádek nezávislý na těch ostatních, protože ERÚ zachovávají závislost/nezávislost.

Tedy pomocí ERÚ nelze převést A na jednotkovou matici, ve které jsou všechny řádky lineárně nezávislé.

(v takovém případě A^{-1} neexistuje, matice A je singulární)

Ad př. 17 Vyřešme metodou A^{-1} systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad\;\; + 3\alpha_3 &= 3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 5 \\ -\alpha_1 \quad\;\; - 3\alpha_3 + \alpha_4 &= -2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 1 \end{aligned}$$

Přepišme si systém maticově:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Big/ \cdot A^{-1} \text{ zleva}$$

Najdeme matici A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ přehození řádků}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}\cdot r_4 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3r_3 \\ +2r_3-2r_4 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(pravá část} = A^{-1}\text{)}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tj. $$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1} + 0 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_2} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_4}$$

neboli $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$.