Kapitola 5: Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

V algebře 1 jsme se zabývali pojmem homomorfismus mezi grupami a jeho vlastnostmi i nyní v algebře 2, teorii prostorů, se budeme též zabývat zobrazeními mezi vektorovými prostory, které zachovávají výsledky operace – u vektorových prostorů je ovšem kromě grupové operace součtu definována ještě "operace" násobení vektoru skalárem, tj. lineární zobrazení bude zachovávat i výsledek součinu (skalár KRÁT vektor).

Def. 21 $(V,+,\cdot)$, $(V',+,\circ)$ jsou vektorové prostory nad stejným číselným tělesem $(T,+,\circ)$.

Lineární zobrazení $f: V \to V'$ je takové zobrazení, pro které platí vlastnosti

$\forall \vec{u},\vec{v} \in V$: a) $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{v})$ … podmínka zachování grupové operace

$\forall \vec{u} \in V, \alpha \in T$: b) $\varphi(\alpha\cdot\vec{u}) = \alpha\cdot\varphi(\vec{u})$ … podmínka zachování výsledku součinu (skalár KRÁT vektor)

obě podmínky lze současně vyjádřit v jedné: $\forall \vec{u},\vec{v} \in V$, $\forall \alpha,\beta \in T$:

$$\underbrace{\varphi(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v})}_{\text{obraz lineární kombinace}} = \underbrace{\alpha\varphi(\vec{u})+\beta\varphi(\vec{v})}_{\text{lineární kombinace obrazů dílčích vektorů}}$$

Pozn. Zadání lineárního zobrazení – bude vysvětleno na příkladě (Horák, str. 85)

Budeme označovat $\dim V = n$; báze $V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$
$\dim V' = m$; báze $V' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m)$

vzhledem k těmto zvoleným bázím lze lineární zobrazení zadat

a) pomocí předpisu mezi souřadnicemi $\vec{v} \in V$ a $\varphi(\vec{v}) \in V'$

b) pomocí matice A typu $m \setminus n$: $\varphi(\vec{v}) = A\cdot\vec{v}$ → jedná se o další využití pojmu matice !!

c) pomocí obrazů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ bázových vektorů

Př. 27 Uvažujme $V = R^3$ s bází $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$V' = R^2$ s bází $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

zobrazení lineární $V \to V'$ lze zadat

ad a) vzorcem = předpisem:
$$\varphi(\vec{v}) = \varphi\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2v_1+v_3\\v_1-v_2-v_3\end{pmatrix}$$

ad b) maticí A zobrazení φ v zadaných bázích:
$$\varphi(\vec{v}) = A\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$
→ další využití operace násobení matic!

(matici A vytvoříme na základě koeficientů u souřadnic v_i ve vzorci (a))

naopak ze zadané matice A lze snadno vytvořit vzorec pro φ doplněním neznámých, tj. roznásobením součinu $A\cdot\vec{v}$

ad c) pomocí obrazů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \varphi(\vec{e}_3)$: například ze vzorce (a) či z matice (b)

lze psát:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e}_3) = \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

obrazy základní báze jsou sloupce matice A

naopak tedy, pokud máme celé lineární zobrazení zadáno pomocí obrazů základní báze

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\underline{e}} \mapsto \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\underline{e}} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\underline{e}} \mapsto \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

; můžeme uspořádáním těchto obrazů do sloupců jednoduše vytvořit matici A

Př. 28 (Horák, str. 85) a) Zobrazení $\psi: R^3 \to R^2$ definované $\psi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1+1\\ x_1-x_2-x_3\end{pmatrix}$ není lineární,

protože např. pro $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$: $\psi(2\vec{u}+3\vec{v}) = \psi\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}$

ale $2\psi(\vec{u}) + 3\psi(\vec{v}) = 2\cdot\begin{pmatrix}2\cdot1+1\\1-1-0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}2\cdot1+1\\1-0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix}$ $\neq$

(problematické je přičítání jedničky v první souřadnici)

b) Zobrazení $\delta: R^3 \to R^2$ definované $\delta\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\cdot x_2\\ x_1-x_2-x_3\end{pmatrix}$ není lineární,

protože např. pro $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$: $\delta(2\vec{u}+3\vec{v}) = \delta\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$

ale $2\delta(\vec{u}) + 3\delta(\vec{v}) = 2\cdot\begin{pmatrix}1\cdot1\\1-1-0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}1\cdot0\\1-0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ $\neq$

(problematický je součin $x_1\cdot x_2$ v první souřadnici)

Pozn. 1) Z př. 28 plyne poučení, že ve vzorci lineárního zobrazení se nemůže vyskytovat ani konstanta, ani nelinearita typu $x_1\cdot x_2$, x_2^2, apod.

Ve vzorci lineárního zobrazení se tedy mohou vyskytovat právě jen lineární kombinace souřadnic zobrazovaného vektoru $\vec{v}$

2) Všimněme si vztahu mezi rozměry matice A $(m\backslash n)$ a dimenze obou prostorů: $m = \dim(V')$, $n = \dim(V)$

Rozměr matice A si lze pamatovat také na faktu, že $\boxed{\varphi(\vec{v}) = \underset{m \backslash n}{A} \cdot \underset{n \backslash 1}{\vec{v}}}$ maticové násobení musí být proveditelné!!

vektor $\vec{v}$ je zadáván jako sloupcový vektor

Věta 16: (základní vlastnosti lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory – označení viz def. 21)

a) $\varphi(\vec{o}_V) = \vec{o}_{V'}$

b) $\varphi(-\vec{v}) = -\varphi(\vec{v})$

c) φ nemusí zachovat lineární nezávislost vektorů z V

d) φ musí zachovat lineární závislost vektorů z V

[**Dk** ad a), b) protože φ je homomorfismus grup vzhledem k operaci +, na základě téže věty z algebry 1 φ musí zobrazit nulový vektor na nulový vektor, a obraz inverze (= obraz opačného vektoru) je inverze k obrazu (= opačný vektor k obrazu)

ad c) viz příklad 27: tři nezávislé vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou zobrazeny na vektory $\binom{2}{1}, \binom{0}{-1}, \binom{1}{-1}$, které jsou lineárně závislé; tedy dimenze $f(V)$ se může lineárním zobrazením zmenšit

(např. projekce ... některá dimenze se zobrazením „může ztratit, zmizet")

ad d) pokud $\vec{u}_k = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1}$, tak lineární zobrazení právě zachovává „výsledek lineární kombinace", tj.

$$\varphi(\vec{u}_k) = \alpha_1 \cdot \varphi(\vec{u}_1) + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \varphi(\vec{u}_{k-1})$$

($\varphi(\vec{u}_k)$ je závislý na vektorech $\varphi(\vec{u}_1), \varphi(\vec{u}_2), \dots, \varphi(\vec{u}_{k-1})$)]

Při studiu lineárního zobrazení jsou důležité pojmy jádro lineárního zobrazení a obor hodnot lineárního zobrazení:

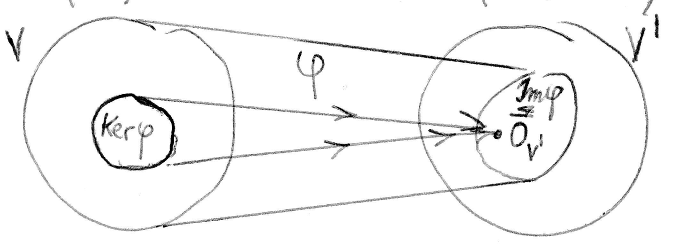
Definice 22 $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ lineárního zobrazení je množina těch vektorů z V, které se zobrazí na nulový vektor:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{v} \in V : \varphi(\vec{v}) = \vec{o}_{V'}\}$$

Obor hodnot lineárního zobrazení je množina těch vektorů z V', pro které existuje nějaký vzor:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\vec{w} \in V' : \exists \vec{v} \in V : \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\}$$



Ker φ a Im φ celkem hodně vypovídají o každém lineárním zobrazení φ.
Často bude užitečné Ker φ a Im φ najít. V první fázi si uvědomme, že se jedná o vektorové podprostory !!

Věta 17: a) Ker φ je vektorový podprostor prostoru V

b) Im φ je vektorový podprostor prostoru V'

c) ① $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = n - h(A) = \dim V - h(A)$, kde A je matice lin. zobrazení φ

② $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = h(A)$

$\rightarrow$ tedy $n = \dim V = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi$

Důkaz je konstruktivní, tj. bude během něj vysvětlena konstrukce Ker φ i konstrukce (nalezení) Im φ. Vysvětleme jej přímo na příkladě:

Ad př. 27 a) Ker φ je množina těch vektorů $\vec{v}$, které se zobrazí na nulový vektor:

$\underline{A \cdot \vec{v} = \vec{o}}$, kde A je matice zobrazení φ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ... řešíme vlastně (SLR − hom)!

řešení bude závislé na $n - h(A)$ parametrech $=$ $\underline{\dim V - h(A) \text{ parametrech}}$ $\searrow$ platí c.①

n: počet neznámých

$3 - 2 = 1$ parametr

Pouze vyměníme pořadí rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{-2\cdot r_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \Uparrow \quad \begin{array}{l} v_1 = -\frac{3}{2}t + t = -\frac{1}{2}t \\ v_2 = -\frac{3}{2}t \\ \text{volme } v_3 = t \end{array}$$

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$ ... vektorový prostor dimenze 1

(pokud $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, tak $\left.\begin{array}{l} \varphi(\vec{u}) = \binom{0}{0} \\ \varphi(\vec{v}) = \binom{0}{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) \underset{\text{lin. zobrazení } \varphi}{=} \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v}) = \alpha \cdot \binom{0}{0} + \beta \cdot \binom{0}{0} = \binom{0}{0}$)

Ker φ je uzavřené na lineární kombinace $\Rightarrow$ je to podprostor

b) Im φ je množina vektorů $\{\varphi(\vec{u}) \in V' : \vec{u} \in V\}$

$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{2}{1}$, $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{0}{-1}$, $\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \binom{1}{-1}$ ... vybereme ze vektorů $\binom{2}{1}, \binom{0}{-1}, \binom{1}{-1}$ bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{-2\cdot r_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ +3\cdot r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = \vec{w}_1 \\ = \vec{w}_2 \\ \end{array}$$

tedy $\vec{w}_1 = \binom{1}{-1}$, $\vec{w}_2 = \binom{0}{1}$ je báze prostoru Im φ

platí c.②

(protože $\forall \vec{u} \in V\ \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$: $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 \Rightarrow$ $\boxed{\varphi(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3) = \alpha_1 \cdot \varphi(\vec{e}_1) + \alpha_2 \cdot \varphi(\vec{e}_2) + \alpha_3 \cdot \varphi(\vec{e}_3)}$)

$h(A) =$ počet vektorů báze Im φ $\rightarrow$ věta 8 (sloupcová hodnost = řádková hodnost) tj. každý vektor z $\varphi(V)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3})$ a naopak každá lineární kombinace $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3}) \in \varphi(V)$. Tedy máme

$$\varphi(V) = L(\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3}))$$ ... z těchto vektorů lze tedy vybrat bázi podprostoru $\varphi(V)$

Bude občas užitečné vědět, kdy zobrazení φ (samozřejmě lineární, o jiných se nebavíme) „zachovává dimenzi", tj. $\dim V = \dim \varphi(V)$. Poznáme to právě podle jádra $\operatorname{Ker}\varphi$:

Věta 18 lineární zobrazení $\varphi: V \to V'$ je injektivní $\iff \operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}_V\}$

[důkaz: "$\Rightarrow$" φ je injektivní $\Rightarrow$ dva různé vektory se nemohou zobrazit na stejný obraz $\vec{o}_{V'}$, tj. $\operatorname{Ker}\varphi$ může obsahovat pouze jeden vektor, a sice $\vec{o}_V$.

"$\Leftarrow$" $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}_V\}$ a $\Rightarrow$ pokusme se dokázat injektivitu zobrazení φ:

pokud $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) \Rightarrow \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \vec{o}_{V'}$

$\underset{\varphi \text{ je lineární}}{\Rightarrow} \varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{o}_{V'} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in \operatorname{Ker}\varphi$

ale v $\operatorname{Ker}\varphi$ je pouze nulový vektor, tj. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{o}_V$

$\Downarrow$

$\vec{u} = \vec{v}$ ... φ je injektivní]

Definice 23 Složením dvou lineárních zobrazení vzniká opět lineární zobrazení:

$\varphi: V \to V'$ (s maticí A), $\psi: V' \to V''$ (s maticí B) $\Rightarrow$ složené zobrazení $\boxed{\psi \circ \varphi}: V \to V''$ je zobrazení (s maticí $\boxed{B \cdot A}$)

$\psi \circ \varphi(\vec{v}) = \psi(\varphi(\vec{v}))$ „po"

zápis matic je ve stejném pořadí jako zápis zobrazení

Př. 29 $\varphi: R^5 \to R^3$ zadané $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi: R^3 \to R^2$ zadané $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \psi \circ \varphi: R^5 \to R^2$ zadané maticí $\boxed{B \cdot A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

$\underline{2}\backslash 3$ $3\backslash\underline{5}$ $\underline{2}\backslash\underline{5}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

celkem po složení:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \overset{\psi \circ \varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

další využití násobení matic! (pozor, důležité pořadí násobení matic není obecně komutativní) (a naopak by to ani nebylo možné)