Ve fyzice a podobně i v geometrii je důležitým činitelem volba systému souřadnic.
Při našem postupu volba souřadného systému je dána volbou báze daného vektorového prostoru. Následující úvahy souvisejí se změnou báze budou využity v příští, šesté kapitole při klasifikaci kvadratických forem.
Uvažujme nyní vektorový prostor V dimenze n.

<u>Definice 28</u> Označme $\underline{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $\underline{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ dvě různé báze téhož prostoru V.

Protože se jedná o báze, lze vektory $\vec{e}_i$ jednoznačně vyjádřit souřadnicemi v bázi $\underline{f}$:

$$\boxed{\vec{e}_i = \vec{f}_1 \cdot p_{1i} + \vec{f}_2 \cdot p_{2i} + \dots + \vec{f}_n \cdot p_{ni}}$$

vztah ① po sloupcích $\qquad \sum_k \vec{f}_k \cdot p_{ki} = \vec{e}_i$

souřadnice vektoru $\vec{e}_i$ v bázi $\underline{f}$ $\qquad$ zápis pomocí sumy Σ

Maticově ① $\boxed{\underline{e} = \underline{f} \cdot P_{f \to e}}$. Matice P ≡ matice přechodu od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$

(někdy též matice transformace báze $\underline{f}$ na bázi $\underline{e}$)

vektory $\vec{e}_i$ jsou ve sloupcích

vektory $\vec{f}_i$ jsou ve sloupcích

v i-tém sloupci jsou souřadnice vektoru $\vec{e}_i$ v bázi $\underline{f}$

<u>Věta 21</u> a) Matice přechodu $P_{\underline{f} \to \underline{e}}$ je regulární (dk.: pokud by řádky P byly lineárně závislé, byly by závislé i řádky matice $\underline{e}$, tj. byly by závislé i sloupce matice $\underline{e}$, a to nejsou (tvoří bázi))

b) Naopak jakákoli regulární matice P vytvoří ze báze $\underline{f}$ „novou bázi" $\underline{e}$

(dk plyne ze vztahu ① a z toho, že součin dvou regulárních matic je zase matice regulární)

c) Vynásobením vztahu ① maticí P^{-1} zprava dostáváme ② $\boxed{\underline{e} \cdot P^{-1} = \underline{f}}$

že matice P^{-1} je také matice přechodu, a sice v opačném směru!! (od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$)

(dk plyne z regulárnosti všech matic a toho, že ve sloupcích matic $\underline{e}$, $\underline{f}$ jsou vektory bází)

<u>Podívejme se nyní, jak se přepočítají souřadnice vektoru $\vec{x} \in V$ při změně báze:</u>

Vektor $\vec{x}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{e}_i$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$)
a současně lze $\vec{x}$ jednoznačně vyjádřit jako lin. kombinaci vektorů $\vec{f}_i$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{f}$):

③ $$\boxed{\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{f}_1 + \beta_2 \vec{f}_2 + \dots + \beta_n \vec{f}_n}$$

(označení: budeme psát $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\underline{f}}$)

Vyjádříme-li $\vec{e}_i$ pomocí vztahu ① po sloupcích, dostaneme

$$\alpha_1 \cdot \sum_k \vec{f}_k \cdot p_{k1} + \alpha_2 \cdot \sum_k \vec{f}_k \cdot p_{k2} + \dots + \alpha_n \cdot \sum_k \vec{f}_k \cdot p_{kn} = \beta_1 \vec{f}_1 + \beta_2 \vec{f}_2 + \dots + \beta_n \vec{f}_n$$

Porovnáním koeficientů u $\vec{f}_i$ na obou stranách dostaneme systém rovnic

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\cdot p_{11}+\alpha_2\cdot p_{12}+\dots+\alpha_n\cdot p_{1n}&=\beta_1\\ \alpha_1\cdot p_{21}+\alpha_2\cdot p_{22}+\dots+\alpha_n\cdot p_{2n}&=\beta_2\\ &\vdots\\ \alpha_1\cdot p_{n1}+\alpha_2\cdot p_{n2}+\dots+\alpha_n\cdot p_{nn}&=\beta_n \end{aligned}\right\} \to \text{SLR s neznámými } \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$$

maticově:

$$P_{\underline{f}\to\underline{e}}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\underline{e}}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}_{\underline{f}} \quad /\cdot P^{-1} \text{ zleva}$$

$$\Downarrow$$

$$④ \quad \boxed{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\underline{e}}=P^{-1}_{\underline{f}\to\underline{e}}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}_{\underline{f}}}$$

Věta 22 (dk. viz předchozí odvození): Když P je matice přechodu od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$,

a) „nové" souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$ počítáme pomocí matice P^{-1} !! (vztah ④)

b) Naopak pokud $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$ a matice P je regulární čtvercová řádu n, pak existuje „stará" báze $\underline{f}$ rekonstruovatelná pomocí ②, kde souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k této „staré" bázi je možné zjistit jako

$$P\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=:\underline{\underline{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}}}.$$

Poznámka ke 22a: 1) jak si zapamatovat vztah přechodu bází: matice P je v součinu vpravo

$$① \quad \underset{n/n}{\underline{e}}=\underset{n/n}{\underline{f}}\cdot\underset{n/n}{P}$$

kdežto při převodu vektorů ④ P^{-1} je v součinu vlevo:

$$\boxed{\underset{n/1}{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\underline{e}}}=\underset{n/n}{P^{-1}}\underset{n/1}{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}_{\underline{f}}}}$$

lineární zobrazení mezi vektory

2) tedy matice přechodu P (od $\underline{f}$ k $\underline{e}$) definuje lineární zobrazení s maticí P^{-1}, které převádí vektor o souřadnicích v $\underline{f}$ na vektor o souřadnicích v $\underline{e}$

Př. 35 (Horák, str. 54) Ukážeme na příkladu, jak se obecně počítá matice přechodu od jedné báze ke druhé:

báze $\underline{e}=\underset{\vec{e}_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}},\underset{\vec{e}_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{\vec{e}_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$, báze $\underline{f}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$. Hledáme matici P typu 3/3 tak, že pro přechod od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$ platí

(vektory do matic $\underline{e}$, $\underline{f}$ píšeme sloupcově)

$$①: \quad \underline{e}=\underline{f}\cdot P$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&3\\2&2&3\end{pmatrix}\cdot P$$

Přehodíme pouze obě strany:

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&3\\2&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

S využitím způsobu násobení matic a rozepsání tohoto násobení po sloupcích vlastně současně řešíme tři systémy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Každý ze systémů najde jeden sloupec matice P. Protože všechny tři systémy mají stejnou matici A, lze je řešit současně, vektory pravých stran napíšeme všechny tři za svislou čáru:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 9 & 12 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 1/3 \\ \cdot 2 - r_1 \\ \cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +7 \cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} -3r_2 - r_3 \\ -r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 1/2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

P ve sloupcích matice P jsou souřadnice vektorů $\vec{l}_i$ v bázi $\underline{f}$:

$$\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}}, \quad \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}_{\underline{f}}, \quad \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

Pokud bychom chtěli přepočítat $\vec{v}_{\underline{f}} = \vec{v}_{\underline{e}}$ při zadaném např. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$, musíme ještě najít P^{-1}!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ +2 \cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} +4 \cdot r_2 + 3 \cdot r_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

P^{-1}

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\underline{e}}}}$$

Pozn.: Protože platí, že P^{-1} je matice opačného přechodu (od $\underline{e}$ k $\underline{f}$), naopak $\underline{f}$-ové souřadnice z $\underline{e}$-čkových přepočteme pomocí lineárního zobrazení P:

$$\vec{N}_f = P\cdot\vec{N}_e = \begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ -1\\ 3\end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}_{\underline{f}} \quad \text{... sedí to!!}$$

Příklad 36: Podívejme se nyní na obecný příklad změny matice lineárního zobrazení při změně bází vstupního a cílového prostoru:

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadané v běžných bázích

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right),\quad \underline{f} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ maticí } A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}, \text{ tj. } \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

Jak se změní matice tohoto zobrazení, pokud bázi $\underline{e}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ změníme na $\underline{e}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ a bázi $\underline{f}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ změníme na $\underline{f}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$?

Řešení: složíme tři lineární zobrazení
- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^3$
- zobrazení φ
- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$: $\underline{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2$: $\underline{f} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{\underline{e}} \arrow[rr, "\varphi \text{ v bázích } \underline{e},\underline{f}"] \arrow[drr, "Q\cdot A\cdot\vec{x} = \vec{y}'"] & & \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_{\underline{f}} \arrow[d, "Q\cdot\vec{y} = \vec{y}'"] \\
\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{\underline{e}'} \arrow[u, "P\cdot\vec{x}' = \vec{x}"] \arrow[urr, "A\cdot P\cdot\vec{x}' = \vec{y}"] \arrow[rr, "\varphi \text{ v bázích } \underline{e}',\underline{f}'"'] & & \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}_{\underline{f}'}
\end{tikzcd}$$

φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}$: $A\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

matice přechodu $P_{\underline{e}\to\underline{e}'}$: $\boxed{\underline{e}\cdot P = \underline{e}'}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

to je už je matice P!

přepočet souřadnic: $P\cdot\vec{x}' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{\underline{e}'} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{\underline{e}}$

pouze změna $\underline{e}\to\underline{e}'$: $A\cdot P\cdot\vec{x}' = \vec{y}$: $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{\underline{e}'} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_{\underline{f}}$

pouze změna $\underline{f}\to\underline{f}'$: $Q\cdot A\cdot\vec{x} = \vec{y}'$: $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/3\\ 0 & -1 & 5/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}_{\underline{f}'}$

přepočet souřadnic: $\vec{y}' = Q\cdot\vec{y}$: $\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}_{\underline{f}'}$

matice přechodu $Q_{\underline{f}\to\underline{f}'}$: $\boxed{\underline{f}'\cdot Q = \underline{f}}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2/3 & 1/3\\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3\end{array}\right) = Q$$

φ v bázích $\underline{e}', \underline{f}'$: $\boxed{Q\cdot A\cdot P\cdot\vec{x}' = \vec{y}'}$

$$\underset{2|2}{Q}\cdot\underset{2|3}{A}\cdot\underset{3|3}{P} \to 2|3$$

$$\begin{pmatrix}2/3 & 2/3 & 1\\ 5/3 & 2/3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{\underline{e}'} = \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}_{\underline{f}'}$$

$\mathbb{R}^3$: $\underline{e}' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2$: $\underline{f}' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Shrnutí příkladu: Obecně řečeno, při změně báze jednoho či obou prostorů dojde ke změně matice lineárního zobrazení φ – složí se s jednou či dvěma lineárními transformacemi vstupního či cílového prostoru způsobenými změnou báze:

φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}$ ... zadané maticí A, přepočet vektorů: $\vec{y}_f = A\cdot\vec{x}_e$

φ v bázích $\underline{e}', \underline{f}$ ... zadané maticí $A\cdot P$, — " — $\vec{y}_f = A\cdot P\cdot\vec{x}'_{e'}$

φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}'$ ... zadané maticí $Q\cdot A$, — " — $y'_{f'} = Q\cdot A\cdot\vec{x}_e$

φ v bázích $\underline{e}', \underline{f}'$ ... zadané maticí $Q\cdot A\cdot P$, — " — $y'_{f'} = Q\cdot A\cdot P\cdot\vec{x}'_{e'}$

Příklad 37: Jak se změní matice A lineárního zobrazení $\psi: V \to V$ při změně báze?

Definice 29: Lineární zobrazení $\varphi: V\to W$ ||| izomorfismus mezi vektorovými prostory, je-li navíc bijektivní.

Lineární zobrazení $\psi: V\to V$ ||| lineární transformace (vstupní i cílový prostor je jeden a tentýž)

pokud A je singulární, ψ je projekcí na nějaký podprostor prostoru V

Lineární transformace $\psi: V\to V$ ||| automorfismus (vektorového prostoru na sebe sama), je-li navíc bijektivní.

Příkladem automorfismu je právě přepočet souřadnic vektorů způsobený změnou báze. (automorfismus ... A je regulární a čtvercová)

Zadání př. 37: Jak se změní matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ lineární transformace $\psi: R^3 \to R^3$

při změně báze $\underline{e} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ na bázi $\underline{e}' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$?

Řešení: podobné př. 36 s tím rozdílem, že zpětný přepočet báze je zadán maticí inverzní ke vstupnímu přepočtu báze.

$\underline{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

ψ v bázi $\underline{e}$:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{\underline{e}} \mapsto \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{\underline{e}}: \quad A\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

přechod $P_{\underline{e}\to\underline{e}'}$: $\underline{e}\cdot P = \underline{e}'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P\cdot\vec{x}' : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot\vec{y} : \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\end{pmatrix}$$

Def. 30 Čtvercové matice A, B ||| podobné, když $B = P^{-1}\cdot A\cdot P$ pro nějakou regulární P.

Věta 23. Podobnost je relace ekvivalence na množině čtvercových matic.

přechod $\underline{e}'\to\underline{e}$: P^{-1}

$\underline{e}'\cdot P^{-1} = \underline{e}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$= P^{-1}$

$\underline{e}' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

ψ v bázi $\underline{e}'$: matice $P^{-1}\cdot A\cdot P$

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}_{\underline{e}'} \mapsto \begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\end{pmatrix}_{\underline{e}'}: \quad B\vec{x}' = P^{-1}\cdot A\cdot P\vec{x}' = \vec{y}'$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\end{pmatrix}$$