Na předchozí straně byla řeč o kolmém průmětu – musíme se tedy chvíli věnovat pojmu kolmosti.

Def. 38 Vektory $\vec{u},\vec{v}$ v Euklidovském prostoru ||| ortogonální, když $skal(\vec{u},\vec{v})=0$.

Pozn.: Někdy se zaměňují pojmy ortogonálnost a kolmost. Kolmost definujeme v $\mathbb{R}^n$ pro vektory $\vec{u},\vec{v}$, které jsou nenulové. Ortogonálnost připouští, aby některý z vektorů $\vec{u},\vec{v}$ (nebo oba) byl nulový; je to tedy obecnější pojem než kolmost.

Často při práci s bázemi vektorových podprostorů je výhodné, aby byly v nich vektory, které jsou navzájem ortogonální.

Def. 39 Báze podprostoru, nebo libovolná posloupnost nenulových vektorů je
a) ortogonální, jestliže každé dva vektory z této posloupnosti jsou ortogonální
b) ortonormální, jestliže je ortogonální a velikost všech vektorů je normovaná (=1).

Pozn.: Grammova matice ortogonální matice je diagonální, grammova matice ortonormální matice je jednotková.

Pokud už máme ortogonální matici, lze definovat i ortogonální matici a ortogonální zobrazení. Ortogonální zobrazení pak bude převedeně reprezentovat ortogonální matici.

Def. 40 Čtvercová matice A ||| ortogonální, jestliže její sloupce jsou navzájem ortogonální.
Lineární zobrazení $\varphi: V \to W$ ||| ortogonální zobrazení, jestliže zachovává výsledek skalárního součinu, tj.

$$skal(\vec{u},\vec{v}) = skal(\varphi(\vec{u}),\varphi(\vec{v})).$$

Pozn.: Protože norma vektoru se definuje pomocí skalárního součinu, ortogonální zobrazení zachovává i normu ~~a~~ velikost vektorů. Tedy ortogonální zobrazení zachovává i odchylky vektorů, protože odchylka se definuje pomocí skalárního součinu a normy.

Dříve než se pustíme do dalších věcí, dokončíme nyní zkoumání vlastních čísel a vlastních vektorů vzhledem k ortogonalitě (teorie + následující příklad viz Korář, str. 122–128):

Vraťme se k situaci nějaké lineární transformace $\varphi: V \to V$ zadané maticí A;

$$\begin{tikzcd}
\text{báze } e \arrow[d, dashed, "\text{přechod mezi bázemi}"] & R^3 \arrow[r, "A"] & R^3 \arrow[d, "P^{-1}", "\text{přepočet souřadnic vektorů}"'] & \text{báze } e \\
\text{báze } e' & R^3 \arrow[u, "P"', "\text{převod vektorů}"] \arrow[r, "B:=P^{-1}\cdot A\cdot P"'] & R^3 & \text{báze } e' \arrow[u, dashed, "\text{přechod mezi bázemi}"']
\end{tikzcd}$$

(A, B ... podobné matice = matice stejné lineární transformace v různých bázích)

Bez důkazu uvedeme několik vět a jeden příklad, ke kterému směřujeme.

Věta 27. Podobné matice A, B ($B = P^{-1}\cdot A\cdot P$) mají stejné vlastní hodnoty.

Tj. vlastní hodnoty lineární transformace jsou invariantní – nemění se se změnou báze.

Věta 28. Reálná čtvercová symetrická matice má právě n navzájem různých vlastních hodnot a vlastní vektory příslušející různým vlastním hodnotám jsou navzájem ortogonální.

A vrcholem bude následující věta, která ve svém tvrzení uvádí i návod na řešení následujícího příkladu.

Věta 29 Pro každou symetrickou reálnou matici A, která reprezentuje lineární transformaci $\varphi: V \to V$ existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů matice A, ve které má transformace φ diagonální matici D složenou z vlastních čísel na své hlavní diagonále.

Navíc matice přechodu H je ortogonální a její inverzi získáme pouhým transponováním $H^{-1} = H^T$

$$\boxed{D = H^T \cdot A \cdot H}$$

Př. 39 Najděte diagonální reprezentaci D lineární transformace $\varphi: R^3 \to R^3$ zadané symetrickou maticí $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Naleznete také ortonormální bázi, vzhledem k níž je φ diagonální, a ověřte, že platí $D = H^T \cdot A \cdot H$

Řešení: • matice D se skládá z vlastních čísel, která najdeme nejdříve:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\cdot(\lambda^2 + 2\lambda) + 4(\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda+2)(3\lambda - \lambda^2 + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

• najdeme dále příslušné vlastní vektory, ze kterých složíme ortonormální bázi a matici H

$\lambda_1 = -2$: řešíme SLR $(A - (-2)\cdot E)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) +r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to v_1 = 0 \\ \to v_2 \ldots \text{libovolné} \\ \to v_3 = 0 \end{array}$$

vlastní směr: $t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: řešíme SLR $(A - (-1)\cdot E)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) +2\cdot r_1 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to v_1 = 2t \\ \to v_2 = 0 \\ \to v_3 \ldots \text{libovolné} = t \end{array}$$

$\Rightarrow$ vlastní směr: $t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ normujeme:

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \ldots \text{vektor o velikosti } 1$$

$\lambda_3 = 4$: $\quad (A-4\cdot E)\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0\\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0}\end{array}\right) \begin{array}{l} \to v_{33} = t \Rightarrow v_{31} = -\frac{t}{2}\\ \to v_{32} = 0\end{array}$

$\Rightarrow$ vlastní směr: $1\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$, vektor $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ normujeme: $\left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \vec{v_3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{5}\\0\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

- sestavení:

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & R^3 & \xrightarrow{A = \begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&3\end{pmatrix}} & R^3 & \underline{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
 & \Big\uparrow H = \begin{pmatrix}0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix} & & \Big\downarrow H^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} & \\
\underline{e}' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\0\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{5}\\0\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix} & R^3 & \longrightarrow & R^3 & \underline{e}' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\0\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{5}\\0\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = H^T\cdot A\cdot H$$

na diagonále matice D jsou vlastní čísla λ_i ve stejném pořadí, v jakém jsme dali do báze $\underline{e}'$ jejich normované vlastní vektory

<u>Proč platí $H^{-1} = H^T$?</u> $\quad H^T\cdot H = \left(\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}\right)_{i,j=1,2,3}$ a protože $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ jsou navzájem ortogonální a přitom jejich velikost $= 1$,

máme pro $i \neq j$: $\quad$ skal$(\vec{v_i}, \vec{v_j}) = 0$

pro $i = j$: $\quad$ skal$(\vec{v_i}, \vec{v_i}) = \|\vec{v_i}\|^2 = 1^2 = 1$ $\Big\}$ dostaneme $H^T\cdot H = E$ (z jednoznačnosti inverze u regulární matice (algebra 1 – větička 4) dostaneme, že $H^{-1} = H^T$)

<u>Poznámka</u>: Ne každé lineární zobrazení $V \to V$ je diagonalizovatelné; uvedeným postupem dokážeme najít D, pokud A je symetrická. Pro některé další matice diagonální podobná matice neexistuje (to, co vždy existuje, je tzv. kanonická matice v Jordanově tvaru – viz předmět „analytická geometrie" v 5. semestru)

<u>Poznámka</u>: Pojďme nyní k úloze nalezení ortonormální/ortogonální báze jistého vektorového podprostoru, když je máme zadánu jeho bázi $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}$, která ortogonální není. Obecně následující věta platí i pro vektory lineárně závislé – její důkaz je konstruktivní a bude vysvětlen na příkladu.

Věta 30 (Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces)

Když $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou libovolné vektory euklidovského prostoru $\Rightarrow$ existují po dvou ortogonální vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$: $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$

(které generují tentýž vektorový podprostor, jako zadané vektory)

[Dk.: viz násled. příklad]

Př. 40 Nalezněte ortogonální bázi podprostoru $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[Řešení: mohli bychom nejprve vyřadit některý ze vektorů, pokud je závislý na těch ostatních; i když se tomu vyhneme, podívejme se na to, jak si s tím následující algoritmus poradí:

a) $\vec{e}_1 := \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... první ze konstruovaných vektorů necháme stejný

b) hledáme $\vec{e}_2 := p_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{u}_2 \ / \cdot \vec{e}_1$ (musíme určit neznámou konstantu p_1)

využijeme ortogonality $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$

$$0 = p_1 \cdot \text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \text{skal}(\vec{e}_1, \vec{u}_2) \Rightarrow \text{vypočteme } p_1 = \frac{-\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{u}_2)}{\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

dosadíme

našli jsme tedy vektor $\vec{e}_2 = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

c) hledáme $\vec{e}_3 := p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{u}_3 \ / \cdot \vec{e}_1, \cdot \vec{e}_2$ (musíme určit neznámé konstanty p_1, p_2; využijeme definiční rovnici už zkonstruovaných vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — $\vec{e}_3$ sice neznáme, ale požadujeme $\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$, $\text{skal}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$, tak $\vec{e}_3$ z rovnic vypadne a dostaneme 2 rovnice pro 2 neznámé konstanty p_1, p_2)

$$0 = p_1 \cdot \text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + p_2 \cdot \overbrace{\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}^{0} + \text{skal}(\vec{e}_1, \vec{u}_3)$$
$$0 = p_1 \cdot \underbrace{\text{skal}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{0} + p_2 \cdot \text{skal}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \text{skal}(\vec{e}_2, \vec{u}_3)$$

$$0 = p_1 \cdot 6 + 2 \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{3}$$
$$0 = p_2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow p_2 = 1$$

$\Rightarrow$ našli jsme vektor $\vec{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pokud jsme nevyloučili $\vec{u}_3$ závislý na vektorech $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, tak Grammův–Schmidtův proces najde $\vec{e}_3 = \vec{o}$, a ten do báze pak nebereme, i když je ortogonální k $\vec{e}_1$ i k $\vec{e}_2$.

Odpověď: $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ má bázi ortogonální: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$]

(atd., při větším počtu vektorů hledáme

$e_4 := p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + p_3 \cdot \vec{e}_3 + \vec{u}_4 \ / \cdot \vec{e}_1 \dots, \cdot \vec{e}_2 \dots, \cdot \vec{e}_3 \dots$ dostaneme tři rovnice pro tři neznámé p_1, p_2, p_3)

U ortogonality nemusíme uvažovat jen dva vektory, ale i dvě množiny vektorů:

Definice 41. Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když $\forall \vec{a} \in A, \vec{b} \in B$: vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou ortogonální (označení: $A \perp B$)

Z linearity skalárního součinu plyne, že množiny A, B jsou ortogonální právě tehdy, když jsou ortogonální i vektorové podprostory $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ jimi generované. Proto má smysl následující definice:

Definice 42. Když U je vektorový podprostor euklidovského prostoru V, pak ortogonální doplněk $U^{\perp}$ podprostoru U ve prostoru V se definuje jako množina všech vektorů ortogonálních k U:

$$U^{\perp} = \{\vec{x} \in V : \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \ \forall \vec{u} \in U\}.$$

Věta 31
a) ortogonální doplněk $U^{\perp}$ je vektorový podprostor
b) $V = U \dotplus U^{\perp}$ (tzv. přímý součet, tj. $U \cap U^{\perp} = \{\vec{o}\}$, $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$)
c) $(U^{\perp})^{\perp} = U$
d) $(U+S)^{\perp} = U^{\perp} \cap S^{\perp}$
e) $(U \cap S)^{\perp} = U^{\perp} + S^{\perp}$

$\Big\}$ jakási analogie de Morganových pravidel (viz Základy, kap. 4) pro vektorové podprostory U, S euklidovského prostoru V

Př. 41 (Horák sbírka, str. 31): V R^4 je dán podprostor $U = \left\langle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle$.

Najděte ortonormální bázi podprostoru $U^{\perp}$

I řešení: nejprve ze vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ eventuálně vyloučíme vektor závislý na těch ostatních; pokud bychom na to zapomněli, algoritmus si s tím stejně poradí:

pro $\vec{x} \in U^{\perp}$ platí: $\left.\begin{array}{l}\text{skal}(\vec{x}, \vec{u}_1) = 0\\ \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}_2) = 0\\ \text{skal}(\vec{x}, \vec{u}_3) = 0\end{array}\right]$ to je SLR

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 &) -r_1 \sim \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 &) -2 \cdot r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 4 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ / \cdot \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = s - 2t$

$\Rightarrow x_2 = 2t - 2s$

volíme $x_3 = s$, $x_4 = t$

tedy řešením SLR jsme našli vektory z $U^{\perp}$: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ ... lineární kombinace bázických vektorů; zortogonalizujeme Gr. Schm. procesem:

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 := p_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\0\\1\end{pmatrix} \ / \cdot \vec{e}_1$

$0 = 6p_1 - 6 \Rightarrow p_1 = 1 \Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Big\}$ vektory znormalizujeme: $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\0\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$]