

Pr. 42 (Horák stránka, p. 6.2, B.15) Nalezněte bázi podprostoru W^\perp , je-li W jako podprostor řešením

$$\begin{aligned} \text{homogenní soustavy} \quad & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \\ & 3x_1 - 2x_3 - 9x_4 = 0 \\ & x_3 + x_4 = 0 \end{aligned}$$

Řeš.: W je množina všech vektorů \vec{x} , pro které platí skal $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{x} \right) = 0$
 skal $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{x} \right) = 0$
 skal $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} \right) = 0$

Aby W^\perp je právě podprostor generovaný vektory $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ověříme pouze, zda tyto vektory jsou lineárně nezávislé:

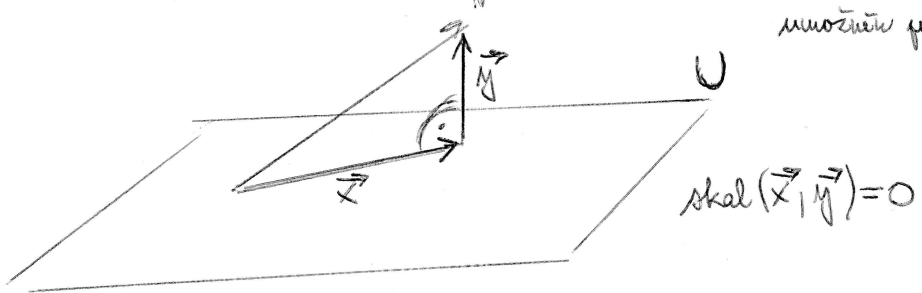
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -9 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{báze } W^\perp = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Pozn.: poslední dvojnásobek, kterou nyní pokusíme povést u pojmu ortogonalita, je tzv. ortogonální projekce vektoru do podprostoru. K čemu to pokusíme?

- a) pokud chceme např. určit odchýlení vektoru od podprostoru, představíme tento (nenulový) vektor kolmo do daného podprostoru a máme odchýlení vektoru a jeho průmětu.
- b) ortogonální projekci budeme používat při konstrukci n -rozměrného dějinného vektorů (68)
- b) při výpočtu skalárního či vektorového součinu pracujeme s kolmými průměty vektoru do směr daného vektoru (u skalárního součinu) a do směr kolmého na daný vektor (u vektorového součinu). Rozklad vektoru na součet dvou vektorů, které jsou na sebe kolmé, lze tedy spočítat s využitím kolmého průmětu.

Def. 43 Ortogonální projekce ^{nenulového} vektoru \vec{n} do podprostoru U ||| vektor \vec{x} takový, že

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{n}, \text{ kde } \vec{x} \in U, \vec{y} \in U^\perp \quad (\text{toto se odehrává v euklidovském prostoru, protože bez skalárního součinu není možný pojem kolmosti})$$



Konstrukce ortogonální projekce bude vyšetřena na příkladu

Pr. 43 (Horák, str. 83) Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ do podprostoru generovaného

$$\text{vektory } \vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Podíváme se, zda $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ jsou lineárně nezávislé, a vybráme z nich bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{báze } U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Protože podprostor $U \subset V$, lze \vec{x} vyjádřit jako lineární kombinaci \vec{u}_1, \vec{u}_2 :

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{x} + \vec{y}, \text{ kde skal}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \vec{y} \quad \begin{matrix} \cdot \vec{u}_1 & \dots & \text{dostaneme dvě rovnice,} \\ \cdot \vec{u}_2 & \dots & \text{ze kterých vyjde } \vec{y} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{skal}(\vec{v}, \vec{u}_1) &= \alpha_1 \cdot \text{skal}(\vec{u}_1, \vec{u}_1) + \alpha_2 \cdot \text{skal}(\vec{u}_2, \vec{u}_1) + 0 \\ \text{skal}(\vec{v}, \vec{u}_2) &= \alpha_1 \cdot \text{skal}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + \alpha_2 \cdot \text{skal}(\vec{u}_2, \vec{u}_2) + 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{matrix} \text{protože } \vec{y} \perp U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \\ \text{dve rovnice o dvou neznámých } \alpha_1, \alpha_2 \end{matrix} \right\}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : \quad \begin{aligned} 4 &= \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 0 \\ -1 &= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 6 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2 \Rightarrow \vec{x} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pozn: vektor \vec{y} lze nyní již snadno vyjádřit $\vec{y} = \vec{v} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nyní se můžeme ještě k pokusit posledního pojmu, který tu bylo levoz zkonstruovat, a to je pojem vektorového součinu vektorů. Tento pojem je obecně odvozen od pojmu m-rozměrného objemu (Dále podle Zlatého, kap. 15, od str. 300): V EUKLIDOVSKÉM VEKTOROVÉM PROSTORU

Def. 44. Objem n euklidovského vektorového prostoru

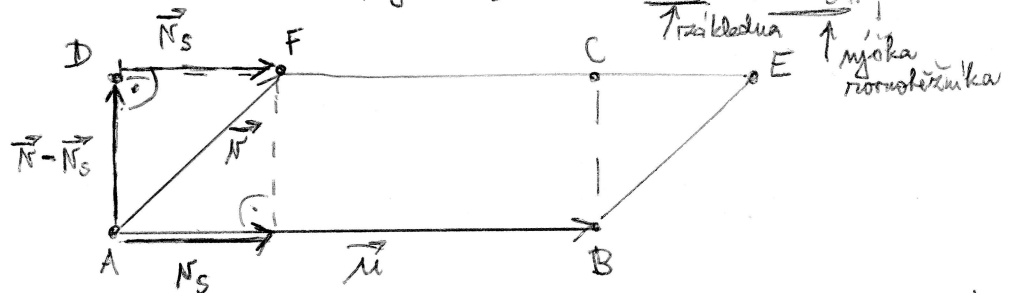
maximálně jednorozměrný objem jako délku vektoru \vec{u} $\text{vol}_1(\vec{u}) = \|\vec{u}\|$

(vol... z anglického volume = objem)

Dále dvourozměrný objem $\text{vol}_2(\vec{u}, \vec{v})$ bude vyjádřen obsahem rovnoběžníka určeného vektory \vec{u}, \vec{v} :

Každý obsah je stejný jako obsah obdelníka ABCD, tj. $\text{vol}_2(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v} - \vec{v}_S\|$

$$S(\triangle BEC) = S(\triangle AFD)$$



kde \vec{v}_S je ortogonální projekce vektoru \vec{v} do podprostoru $S = L(\vec{u})$; tedy $\text{vol}_2(\vec{u}, \vec{v}) = \text{vol}_1(\vec{u}) \cdot \|\vec{v} - \vec{v}_S\|$

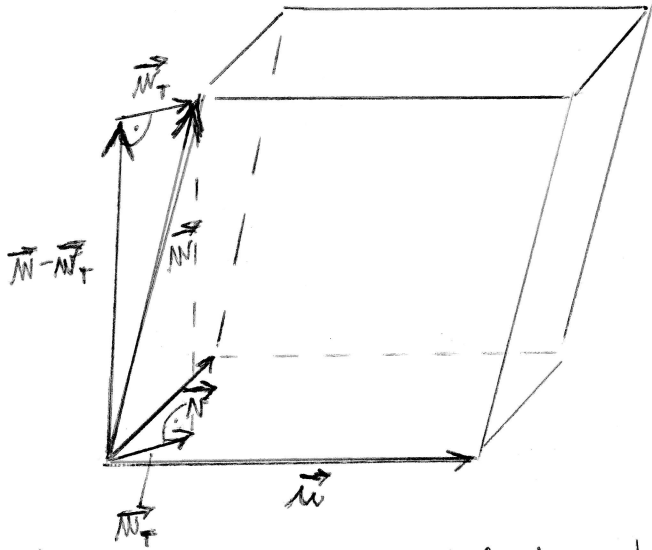
Podobně trojrozměrný objem $\text{vol}_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vyjadruje objem rovnoběžnostěnu určeného vektory

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ a vyjádřeme jej jako

$$\text{vol}_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{vol}_2(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \|\vec{w} - \vec{w}_T\|$$

obsah rovnoběžníka, který je skládán z rovnoběžnostěnů

↑ výška rovnoběžnostěny, určená velikostí vektoru $\vec{w} - \vec{w}_T$, kde \vec{w}_T je kolmý průmět vektoru \vec{w} do podprostoru $T = L(\vec{u}, \vec{v})$



Podle tohoto schématu pokračujeme do vyšších dimenzí a definujeme (rekurentním vztahem)

k -rozměrný objem normotěžištěm jako funkci $\text{vol}_k: V^k \rightarrow \mathbb{R}$, která vektorům

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k \in V$ přiřadí reálné číslo

$$\text{vol}_k(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = \text{vol}_{k-1}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k-1}) \cdot \|\vec{u}_k - \vec{u}_0\|,$$

kde \vec{u}_0 je ortogonální projekce (= kolmý průmět) vektoru \vec{u}_k do podprostoru $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{k-1})$

Pozn. = Z geometrické názornosti takto definované objem plyne, že n má konvulsi

k -rozměrný objem je symetrická k -lineární forma. Dále z konstrukce objemu plyne máš. věta:

Objem uzávně na k vektorů \downarrow multilineární = lineární v každé složce

Věta 32 (Zlata, str. 301) V je k -rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem (= euklidovský vekt. prostor), $k \geq 1$.

Pro libovolné vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in V$ platí:

a) $\text{vol}_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) \geq 0$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně závislé.

b) $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou ortogonální $\Leftrightarrow \text{vol}_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \dots \cdot \|\vec{u}_k\|$

c) pokud $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně uzávně, pak lze Gr.-Schm. procesem získat

ortogonální vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$: $\text{vol}_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \text{vol}_k(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \dots \cdot \|\vec{v}_k\|$

Pozn. ad a) pokud vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně závislé, tj. lze je jednoduše

normotěžištěm jimi máčtý je degenerovaný - jeho objem vol_3 n postupně jednoduše je roven 0.

Def. 45. Elementární úpravy matice bilineární formy

Bilineární forma $\varphi: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je zadána matricí A řádku m , tzn.

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1, u_2, \dots, u_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy matice bilineární formy

(budeme jím říkat ERU/ESU úprava = řádková i sloupcová úprava) jsou lokální úpravy.
 které změni matrici A na matici B stejné bilineární formy φ , ovšem vyjádřené
 v jiné bázi (tj. při transformaci souřadnic vektorů \vec{u}, \vec{v}) a platí $B = P^T A P$ pro nějakou
 regulární P.

Protože do množiny bilineární formy vstupují dva vektory současně (řádkový i sloupcový),
 má rozdíl od Gaussovy eliminace buďta elementární úprava řáde bude sformulovat v tom,
 že s řádkovou úpravou se bude následně provádět i sloupcová úprava stejné povahy.

(ERU+ESU matice bilineární formy):

- a) přehodíme i-tý řádek s j-tým řádkem, a hned poté i-tý sloupec s j-tým sloupcem
- b) i-tý řádek vynásobíme nenulovou konstantou c, a hned poté i-tý sloupec vynásobíme c
- c) k j-tému řádku přičteme c-násobek i-tého řádku, a hned poté k j-tému sloupci přičteme c-násobek i-tého sloupce

Věta 33. Matice B získaná z matice A elementárními ERU+ESU úpravami

($B = P^T A P$ pro nějakou regulární P) je matice téže bilineární formy, pouze rozhlédem
 k jiné bázi daného
 prostoru

Pr. 44 Převěďte matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$

na symetrickou bilineární formu φ rozhlédem ke standardní bázi \underline{e}
 a jinou matici rozhlédem
 k jiné bázi \underline{e}'

[Řešení: Asi nejlépe se nejprve, jak bilineární formu φ převede rozhlédem k bázi $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Např. pro vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ máme $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (1, 2, 3, -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -11,5$

Pokusme se matici A zjednodušit elementárními ERU+ESU úpravami:

Analýza: vezmeme první nenulový prvek a_{ii} a pomocí něj vynulujeme prvky pod ním

a napravo od něj:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+1/2 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+1/2 \cdot s_2} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 3/4 & 0 & 0 & -9/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3 \cdot s_3} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & -9/2 \end{pmatrix} = B$$

je zachována symetrie matice B!
 matice B je matice téže
 bilineární formy rozhlédem
 k jiné bázi
 (s úpravami matice B bychom
 mohli pokračovat)

Vrstíme se nyní k výpočtu k-oznamitého objemu:

Věta 34 Na euklidovském rektorovém prostoru nad tělesem \mathbb{R} platí pro libovolný vektorový systém $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$:

$$\text{Vol}_k(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = |G(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)|^{\frac{1}{2}}$$

↖ asociativní a determinanta !!

Pozn.: Z předchozího můžeme plyne náhod pro výpočet objemu: vyhodíme Gramovu matici $G(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ a protože se jedná o matici symetrické bilineární formy, upravíme ji symetrickými ERU+ESU na podobu na diagonální tvar. Když se nám to podaří, tento diagonální tvar je

$$\begin{pmatrix} \|\vec{u}_1\|^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\vec{u}_2\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \|\vec{u}_k\|^2 \end{pmatrix}$$

a tedy $\text{Vol}_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \sqrt{\text{výsledek determinantu z diagonální matice, a to něco asociativní !!}}$
 (z součinu prvků na diagonále)
 Pokud má tento tvar naponě nějaké (a_{ii}=0), znamená to, že $\text{Vol}_k(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = 0$.

Def. 46: Dvě báze rektorového prostoru jsou souběžně orientované, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant (nesouběžně orientované, ... záporné, ...)

Pozn.: Relace souběžné orientace mezi dvěma bázemi (tj. bázeřmi relace !) je relace ekvivalence, protože - každá báze je souběžně orientovaná sama se sebou : $\det E = 1$

- $\underline{\alpha} \sim \underline{\beta} \Rightarrow \underline{\beta} \sim \underline{\alpha}$... relace je symetrická : $\det P, \det P^{-1} = \det E = 1$,
 tj. $\det P > 0 \Leftrightarrow \det P^{-1} > 0$

- $\underline{\alpha} \sim \underline{\beta}, \underline{\beta} \sim \underline{\gamma} \Rightarrow \underline{\alpha} \sim \underline{\gamma}$... relace je tranzitivní:

$P_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot P_{\beta \rightarrow \gamma} = P_{\alpha \rightarrow \gamma}$... matice mezi maticemi přechodu

($\det P_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \det P_{\beta \rightarrow \gamma} = \det P_{\alpha \rightarrow \gamma}$... vzhledem k součinu kladných čísel je opět kladný)

Strategie kladné orientace: Vybereme jednu libovolnou bázi ($\mathbb{N} \mathbb{R}^n$ například $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots$) a prohlásíme ji za kladně orientovanou,

číslo 45

Pr. 1a) Kladně orientovaná báze \mathbb{R} prostoru jedné dimenze $L(\vec{u})$:

báze \vec{u} má svůj směr jako vektor \vec{u}

b) kladně orientovaná báze \mathbb{R}^2 prostoru dimenze 2 $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$:

\vec{u}_1 otočíme do směru \vec{u}_2 proti směru pohybu hodinových ručiček

c) kladně orientovaná báze \mathbb{R}^3 prostoru dimenze 3 $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$:

(pauza pro ruku: když otočíme \vec{u}_1 do směru \vec{u}_2 proti směru ručiček, tj. ve směru první pravé ruky, vidíme toto otáčení jako proti směru ručiček a následně vektor \vec{u}_3 (= palec ukazuje ve směru vektoru \vec{u}_3))