Def. 47. Orientovaný k-rozměrný objem vzhledem ke kladně orientované ortonormální bázi: $(V,+,\cdot)$ je k-rozměrný euklidovský prostor, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ je jeho kladně orientovaná báze, která je navíc ortonormální.

Pak orientovaný k-rozměrný objem pro libovolnou posloupnost vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ vzhledem k bázi $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ definujeme jako determinant

$$\overrightarrow{vol}_k(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k) = \det \begin{pmatrix} skal(\vec{x}_1, \vec{u}_1) & skal(\vec{x}_2, \vec{u}_1) & \dots & skal(\vec{x}_k, \vec{u}_1) \\ skal(\vec{x}_1, \vec{u}_2) & skal(\vec{x}_2, \vec{u}_2) & \dots & skal(\vec{x}_k, \vec{u}_2) \\ \vdots & & & \\ skal(\vec{x}_1, \vec{u}_k) & skal(\vec{x}_2, \vec{u}_k) & \dots & skal(\vec{x}_k, \vec{u}_k) \end{pmatrix}$$

ORIENTACI ZNAČÍME ŠIPKOU

Pozn. 1) Na předchozí straně jsme mluvili o objemu jako o odmocnině z determinantu – pokud čísla na diagonále jsou velikosti vektorů z ortonormálního systému, jejich velikost je rovna jedné, a tedy velikost = odmocnině z velikosti, tj. pro $\vec{x}_1 = \vec{u}_1, \dots, \vec{x}_k = \vec{u}_k$ se jedná o jedno a totéž z ortonormálního systému!

2) Orientovaný objem je tedy definován jako jistý determinant! Jednotkou tohoto objemu je objem k-rozměrné krychle vytvořené vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ kladně orientované ortonormální báze.

sloupce matice, ze níž determinant počítáme, jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ v bázi $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$

Př. 46 Pokud $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; tak $\forall$ matici $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ platí:

$$\det A = \overrightarrow{vol}(s_1(A), s_2(A), \dots, s_k(A))$$

determinant A je roven k-rozměrnému objemu vytvořenému sloupci této matice

Pozn.: definice 47 nám ukazuje na jiný přístup k pojetí determinantu – pokud se „pohybujeme" v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ (prostor n-tic reálných čísel je euklidovský), tak det A lze chápat jako orientovaný n-rozměrný objem rovnoběžnostěnu vytvořeného sloupci matice A.

Věta 35 a) Orientovaný objem vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ je invariant – nezávisí na volbě kladně orientované ortonormální báze

b) V orientovaném k-rozměrném euklidovském prostoru V je mezi neorientovaným objemem (def. 44) a orientovaným objemem (def. 47) souvislost, kterou bychom očekávali:

$$vol_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k) = \left| \overrightarrow{vol}_k(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k) \right|$$

absolutní hodnota

Přitom $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ tvoří kladně orientovanou bázi V právě tehdy, když $\overrightarrow{vol}_k(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k) > 0$.

[dk b) viz Zlatoš, str. 306]

c) důsledek b): $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ jsou lineárně nezávislé (tvoří nějakou bázi) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{vol}_k(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k) \neq 0$

Pozn.: Orientovaný k-rozměrný objem se někdy nazývá jako vnější součin; pomocí vnějšího součinu se pak obecně definuje pojem vektorového součinu vektorů: značíme $(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_k)$

bez jakéhokoli znaménka operace

Def. 48. Pro kladnou orientovanou ortonormální bázi $\underline{\alpha} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ $(n \geq 2)$ orientovaného euklidovského prostoru V:

Pevně zvolené vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}$ definují lineární formu $\psi: V \to R$

$$\psi(\vec{y}) := \overrightarrow{\mathrm{vol}}_n(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}, \vec{y}) = (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_{n-1} \vec{y})$$

(vektor $\vec{y} \mapsto$ je přiřazen vnější součin $(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_{n-1} \vec{y})$) a podle teorie lineárních forem na vektorovém prostoru (podrobněji viz Zlatoš, str. 307, odkaz na předch. kapitoly)

$\exists!$ vektor $\vec{n} \in V$:

$$\forall \vec{y} \in V: \quad \psi(\vec{y}) = \overrightarrow{\mathrm{vol}}_n(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}, \vec{y}) = (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_{n-1} \vec{y}) = \mathrm{skal}\langle \vec{n}, \vec{y} \rangle.$$

vektor $\vec{n}$ je řádkem MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZ. ψ

Tento jednoznačně určený vektor $\vec{n}$ je vektorový součin vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-1}$, (také ortokomplement vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-1}$)

''

ortodoplněk

značíme $\underline{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \ldots \times \vec{x}_{n-1} =: \vec{n}}$

Pozn.: Pro $n=2$ pro pevně zvolený vektor $\vec{x} \in V$, který definuje lineární formu $\psi: V \to R$,

přičemž $\psi(\vec{y}) = \overrightarrow{\mathrm{vol}}_2(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{skal}(\vec{n}, \vec{y})$ (tj. $\vec{y} \mapsto \mathrm{skal}(\vec{n}, \vec{y})$)

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_1) & \mathrm{skal}(\vec{y}, \vec{u}_1) \\ \mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_2) & \mathrm{skal}(\vec{y}, \vec{u}_2) \end{pmatrix} = \mathrm{skal}(\vec{n}, \vec{y})$$

protože tento vztah platí $\forall \vec{y} \in V$, dosadíme za $\vec{y}$ postupně vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ a dostaneme:

$\vec{y} = \vec{u}_1$:

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_1) & 1 \\ \mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_2) & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{skal}(\vec{n}, \vec{u}_1)$$

$$-x_2 = -\mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_2) = \mathrm{skal}(\vec{n}, \vec{u}_1)$$

$\vec{y} = \vec{u}_2$:

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_1) & 0 \\ \mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_2) & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{skal}(\vec{n}, \vec{u}_2)$$

$$x_1 = \mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_1) = \mathrm{skal}(\vec{n}, \vec{u}_2)$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\underline{\alpha}}$ ... pak protože $\mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_1) = x_1$, $\mathrm{skal}(\vec{x}, \vec{u}_2) = x_2$

$\Downarrow$

hledaný vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} =: \boxed{\vec{x}^{\perp}}$

jedná se o vektor kolmý na vektor $\vec{x}$

označení této matice

tj. $\vec{x}^{\perp} = \vec{n} = -x_2 \cdot \vec{u}_1 + x_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & \vec{u}_1 \\ x_2 & \vec{u}_2 \end{vmatrix} =: \det(\vec{x}, \underline{\alpha}^T)$

$\boxed{\text{formální}}$ Laplaceův rozvoj determinantu podle 2. sloupce, ve kterém jsou vektory z báze $\underline{\alpha}$

Pro $n \geq 3$: označme $x_{ij} := skal(\vec{x}_j, \vec{u}_i)$ pro $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n-1$

$X := (x_{ij})$ matice typu $n \times n-1$, jejíž sloupce tvoří souřadnice vektorů (pevně zvolených) $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}$

v bázi $\underline{\alpha} = ((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n))$

Tyto pevně zvolené vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}$ definují lineární formu $\psi : V \to R$,

přičemž $\psi(\vec{y}) = \vec{vol}_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{y}) = skal(\vec{N}, \vec{y})$ $\quad$ ($\forall \vec{y}$: $\vec{y} \mapsto skal(\vec{N}, \vec{y})$)

vektor $\vec{N}$ lze označit jako $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}$

$\vec{N}$ vznikl + dosaď i-tý řádek

Protože tento vztah platí $\forall \vec{y} \in V$, dosadíme za $\vec{y}$ postupně vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$:

$$\vec{y} = \vec{u}_i : \quad \underline{skal(\vec{N}, \vec{u}_i)} = skal(\vec{x}_1 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}, \vec{u}_i) = det(X, e_i) = (-1)^{n+i} \cdot det\, X_i$$

jednotkový vektor, na pozici i má 1, jinak nuly

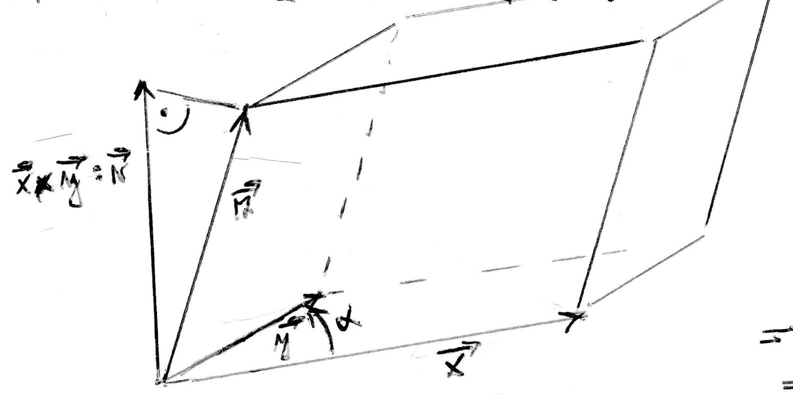
$\boxed{\text{formální}}$ Laplaceův rozvoj determinantu podle posledního sloupce

tedy vektor $\vec{N}$ lze formálně zapsat

$$\vec{N} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \cdot det\, X_i = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,n-1} & \vec{u}_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n-1,1} & \dots & x_{n-1,n-1} & \vec{u}_{n-1} \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n-1} & \vec{u}_n \end{vmatrix} = det(X, \underline{\alpha}^T)$$

označení této matice

pro $n=3$: pro pevně dané vektory $\vec{x}, \vec{y}$ existuje jediný vektor $\vec{N}$, označme $\vec{N} := \vec{x} \times \vec{y}$



$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \vec{i} \\ x_2 & y_2 & \vec{j} \\ x_3 & y_3 & \vec{k} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{(x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ je ortogonální na prostor $L(\vec{x}, \vec{y})$, tj. $\vec{x} \times \vec{y} \in [L(\vec{x}, \vec{y})]^{\perp}$

Pro $\vec{x}, \vec{y}$ lineárně nezávislé tvoří vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$.

Při záměně pořadí vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ se změní orientace báze $\underline{\alpha} = (\vec{x}, \vec{y})$, tj. vektorový součin jako součást orientovaného objemu změní znaménko, tj. vektorový součin je antisymetrické zobrazení:

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$

Věta 36 Vlastnosti vektorového součinu $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}$ v orientovaném euklidovském prostoru V, $\dim V = n$: (Zlatoš 310–319), nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel

a) vektorový součin $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}$ je multilineární ($(n-1)$-lineární) antisymetrické zobrazení $V^{n-1} \to V$

b) vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}$ jsou lineárně závislé $\iff \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1} = \vec{0}$

c) pokud $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé, tak $\vec{N} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}$ je normálový vektor nadroviny $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1})$ a vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{N}$ tvoří kladně orientovanou bázi

d) $\|\vec{x}_1 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}\| = \mathrm{vol}_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})$ → neorientovaný objem (!! neorientovaný objem spočítá velikost daného vektoru)

e) V dvojrozměrném orientovaném euklidovském prostoru platí $\|\vec{x}^{\perp}\| = \|\vec{x}\|$

(vektorový součin je unární operace: $\vec{x} \to \vec{x}^{\perp}$)

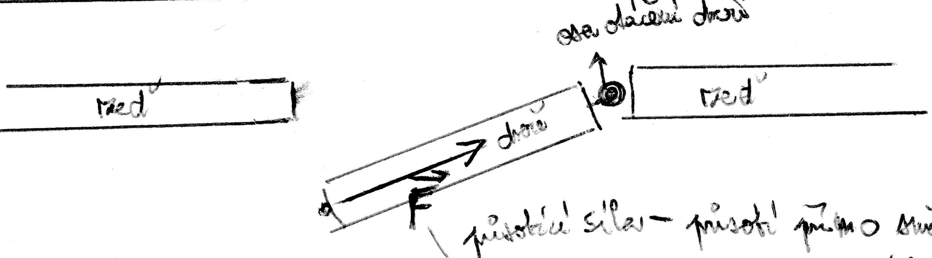
f) V trojrozměrném orientovaném euklidovském prostoru platí pro nenulové vektory $\vec{x}, \vec{y}$:

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\angle(\vec{x}, \vec{y})$$

g) pro $n \geq 2$ v n-rozměrném orientovaném euklidovském prostoru V platí $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1} \in V$:

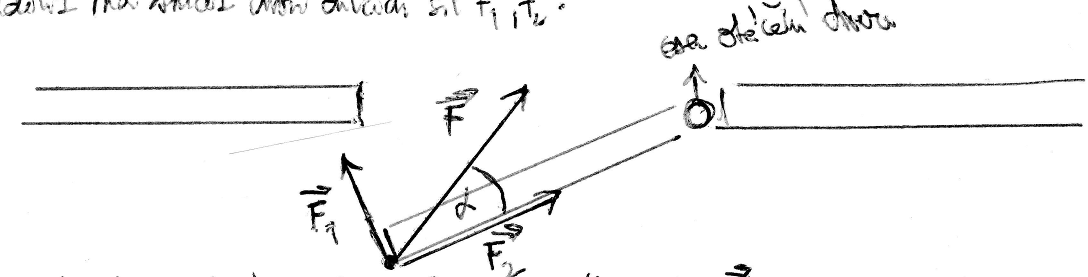
$$\|\vec{x}_1 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}\| = \underbrace{\mathrm{vol}_{n-1}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1})}_{\text{neorientovaný objem}} = \sqrt{\det G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1})}$$

Fyzikální význam vektorového součinu: otáčivý moment $\vec{M}$ tělesa kolem pevné osy při působení síly $\vec{F}$



působící síla – působí přímo směrem k ose otáčení! (kolmo na ni)

Tímto způsobem dveře nepootočíme ani o centimetr. Pomocník snažící se dveře otevřít nebo zavřít svou silou vynaloží zbytečně úsilí; otáčivý moment této síly vzhledem k ose otáčení je nulový vektor. Když síla $\vec{F}$ bude působit šikmo a nikoli rovnoběžně se stěnou dveří, lze ji rozdělit na součet dvou dílčích sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2$:

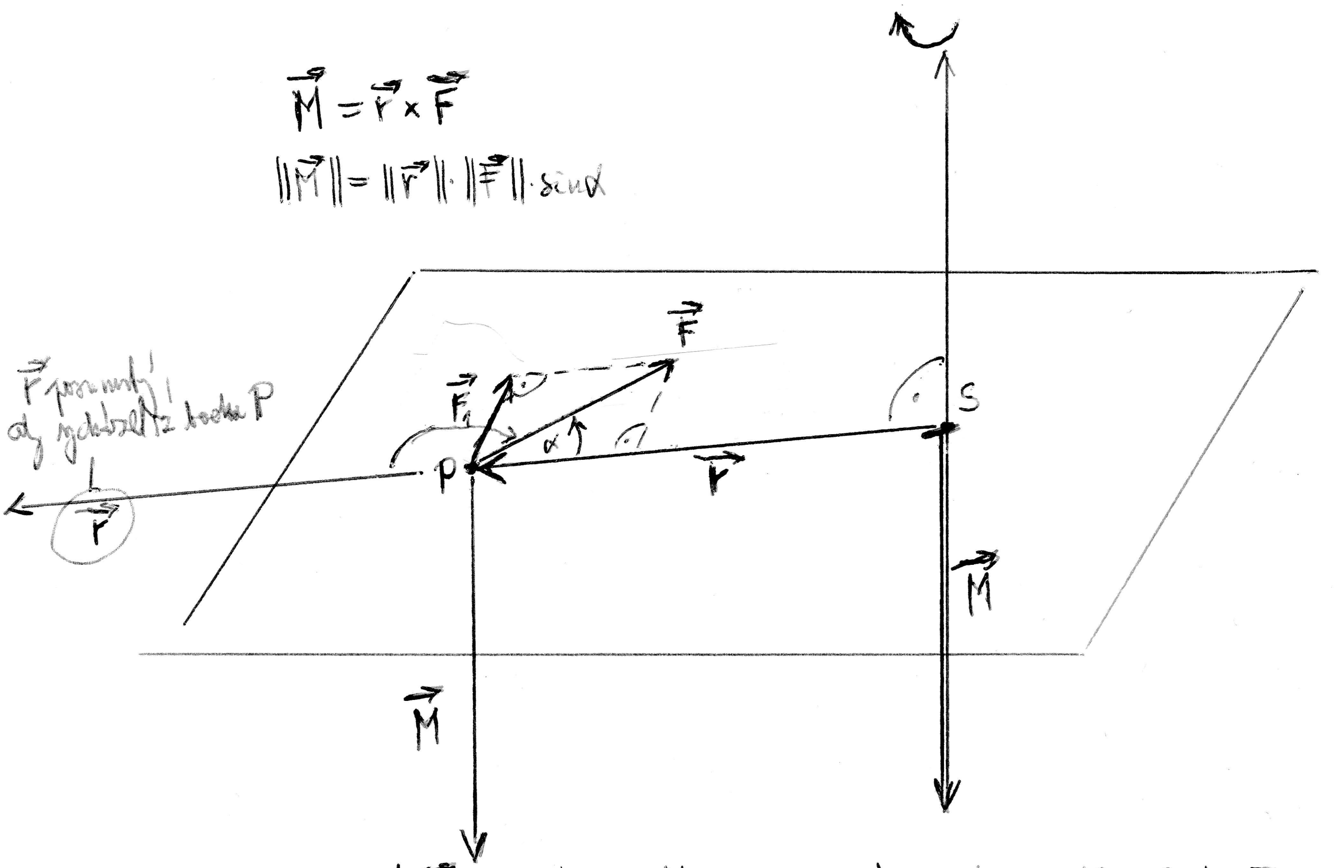


Síla $\vec{F}_2$ představuje působení neefektivního pomocníka, síla $\vec{F}_1$ naopak působí ve směru kolmém na osu otáčení, tj. $\vec{F}_1$ je ta „část" síly $\vec{F}$, která ovlivňuje otáčivý moment tělesa.

Pokračujme dále k definici momentu síly vzhledem k ose otáčení:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin\alpha$$



- Otáčivý moment $\vec{M}$ působí ve směru osy otáčení – v tom směru, když měříme podle pravidla pravé ruky: když prsty směřují ve směru otáčení osy, palec ukazuje ve směru vektoru $\vec{M}$
- $\|\vec{M}\| = \|\vec{r}\| \cdot \underbrace{\|\vec{F}\| \cdot \sin\alpha}_{\|\vec{F}_1\|} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{F}_1\|$ velikost momentu závisí na vzdálenosti $\|\vec{r}\|$ působiště P od osy otáčení, a dále na průmětu $\vec{F}_1$ síly $\vec{F}$ do směru kolmého na průvodič $\vec{r}$ (tj. na velikosti průmětu $\|\vec{F}\| \cdot \sin\alpha$)

tedy orientace $\vec{M}$ je taková, aby vektory $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ v daném pořadí tvořily kladně orientovanou bázi prostoru (otáčení 1. vektoru směrem ke 2. vektoru vidíme lépe, když posuneme $\vec{r}$ do bodu P).

! Na moment $\vec{M}$ má tedy vliv jen složka F_1 kolmá na průvodič bodu působení síly – tj. při vektorovém součinu využíváme „informace", která vzniká kolmým průmětem jednoho vektoru do směru kolmého na druhý vektor.

Zobrazení $\vec{r} \times \vec{F}$ je multilineární (bilineární):

$$(\alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2) \times \vec{F} = \alpha \vec{r}_1 \times F + \beta \vec{r}_2 \times F$$

$$\vec{r} \times (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \cdot \vec{r} \times \vec{F} + \beta \cdot \vec{r} \times \vec{G}$$

Zobrazení $\vec{r} \times \vec{F}$ je antisymetrické: $\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}$