MA2BP_CGE, CVIČENÍ Z GEOMETRIE

PODZIM 2018

Obsah

Pokyny a požadavky

K zápočtu bude třeba:

- aktivní spolupráce na cvičeních,
- aspoň 50% úspěšnost z každé písemky,
- samostatná domácí práce podle vlastního výběru.

Písemky budou dvě, termíny se upřesní na cvičeních (první zhruba v první půlce listopadu, druhá v posledním týdnu výuky). Opravné termíny se budou organizovat hromadně na konci semestru.

Samostatnou domácí prací se myslí stručné, ale srozumitelné písemné zpracování vybraného problému. Forma nehraje roli, obsah musí vyhovovat následujícím požadavkům:

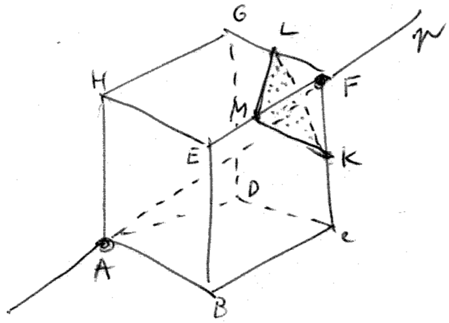
- vybraný problém je ilustrován aspoň jedním konkrétním příkladem,
- v řešení je použit aspoň jeden postup, který překračuje školský rámec a využívá nástrojů tohoto kurzu, tj. vektorové algebry,
- text je srozumitelný každému interesovanému čtenáři s podobným vzděláním (zejména obsahuje víc českých slov než matematických a jiných symbolů),
- jsou uvedeny hlavní použité zdroje,
- sám autor je se svým výtvorem spokojen.

Date: 4. prosince 2018, V. Žádník.

Několik vhodných témat ke zpracování uvádíme v části 5.

1. Úvod

0. *Uvažte situaci jako na obrázku:*
$A, \dots, H$ = *vrcholy krychle,* K, L, M = *středy hran, přímka* $p = AF$, *rovina* $\alpha = KLM$.



Určete:

(a) průnik (resp. vzájemnou polohu) přímky p *a roviny* α,
(b) odchylku přímky p *a roviny* α, *odchylku přímky* p *a nějaké hrany,*
(c) vzdálenost bodu F *od roviny* α, *vzdálenost jiného vrcholu krychle od přímky* p *apod.,*
(d) těžiště trojúhelníku KLM, *čtyřstěnu* $KLMF$ *apod.,*
(e) obsah trojúhelníku KLM, *objem čtyřstěnu* $KLMF$ *apod.,*
(f) obrazy vrcholů vzhledem k souměrnosti podle roviny α, *resp. podle přímky* p,
(g) obrazy vrcholů vzhledem k takovému otáčení kolem přímky p, *které je symetrií krychle (tzn. permutuje její vrcholy).*

Poznámky:

- většinu těchto úloh umí *nějak* vyřešit každý, a to i na začátku semestu a bez nápovědy,
- řešení, a tedy i odpovědi, mohou být rozličné: ledacos umíme z loňska konstrukčně, mnohé lze spočítat bez souřadnic, něco o souřadnicovém počítání umíme ze SŠ, …
- díky dost speciálnímu zadání lze hodně věcí uhodnout (a pak zdůvodnit),
- jak by fungovaly naše nápady pro obecnější zadání?

Výhled:

- předchozí úlohy chceme umět řešit obecně,
- základní pomůckou v tomto semestru bude *lineární* algebra:
  - vektory a jejich lineární kombinace,
  - soustavy lineárních rovnic,
  - determinanty, skalární součin apod.
- překlad geometrie $\leftrightsquigarrow$ algebra zajišťuje volba souřadné soustavy:
  - bod $\leftrightsquigarrow$ n-tice čísel, resp. systém n lin. nezávislých rovnic,
  - přímka $\leftrightsquigarrow$ n-tice čísel s jedním volným parametrem, resp. systém $n-1$ lin. nezávislých rovnic,
  - atp.
- mnoho nápadů nebude nezáviset na dimenzi n.

2. Polohové úlohy — afinní geometrie

Rozlišujeme *body* (= prvky afinního prostoru) a *vektory* (= prvky vektorového prostoru).
Základní vztahy:

- dvojice bodů A, B určuje vektor $\overrightarrow{AB}$, také ozn. $B - A$,
- bod A a vektor $\mathbf{u}$ určuje koncový bod B, $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, také ozn. $B = A + \mathbf{u}$,
- toto přiřazení je kompatibilní se sčítáním vektorů: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Odtud pojem obecného *afinního prostoru* $\mathcal{A}$, jeho *zaměření* $V = \overrightarrow{\mathcal{A}}$ a *dimenze* $\dim \mathcal{A} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Vyjádření podprostoru.

První dvě úlohy slouží k procvičení překladu geometrie $\leftrightsquigarrow$ algebra.

1. *V úloze **0** zvolte souřadnou soustavu a vyjádřete souřadnice všech relevantních bodů.*

2. *Řešte znovu úlohu **1** pro jinou volbu souřadné soustavy, porovnejte výsledky.*

*Pokud jste tak neučinili v rámci úlohy **1**, zamyslete se, jak všelijak lze nahlížet pojem souřadné soustavy a odpovídajících souřadnic bodů.*

Způsoby vyjádření podprostoru, se kterými budeme nejčastěji počítat, jsou dva.

3. *Vzhledem k volbám z úlohy **1** vyjádřete přímku p, resp. rovinu α, a to:*

(a) parametricky*, tj. s několika volnými parametry,*
(b) obecně*, tj. jako řešení soustavy lin. rovnic.*

Obecný *afinní podprostor* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ je taková podmnožina, která je sama afinním prostorem.

Afinní podprostor je vždy určen několika body, bodem a vektorovým podprostorem (v zaměření celého prostoru) nebo soustavou lin. rovnic.

4. *Uvědomte si, že jeden a týž podprostor může být zadán mnoha a mnoha různými způsoby.*

*Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce volných parametrů, příp. rovnic se může v řešení úlohy **1** vyskytovat.*

Zobecněte pro obecný k-rozměrný podprostor v n-rozměrném afinním prostoru.

Zde si musíme všimnout vlivu lineární *ne-/závislosti* určujících vektorů, resp. rovnic. S tím souvisí *obecná/speciální* poloha určujících bodů.

5. *Ve čtyřrozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$ jsou dány body pomocí souřadnic vzhledem k nějaké souřadné soustavě:*[1]

$$A = [1, -1, 0, 2], \quad B = [4, 1, 0, 2], \quad C = [2, -1, 1, 1].$$

Rozhodněte zda jsou body A, B, C v obecné poloze.

Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ určeného těmito body.

Určete parametrické vyjádření tohoto podprostoru.

První nesamozřejmá úloha se týká rovnicového vyjádření podprostoru:

6. *Určete rovnicové vyjádření podprostoru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ z předchozí úlohy, a to:*

(a) přímo, tj. uhodnutím,
(b) systematicky, tj. pomocí řádkových/sloupcových úprav,
(c) ještě jinak, např. pomocí subdeterminantů matic.

[Všechny nápady v této úloze jsou založeny na různých ekvivalentních vyjádřeních toho, že obecný bod $X \in \mathcal{A}$ je prvkem právě podprostoru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.]

Opačná úloha, tedy určit parametrické vyjádření podprostoru z rovnicového, je triviální — stačí vyřešit danou soustavu rovnic. Jistá ostražitost je však na místě, nejčastěji se kupodivu chybuje u nejjednodušších zadání:

[1] Většina zadání je vztažena k nějaké souřadné soustavě, což nebudeme vždy důsledně opakovat...

7. *Určete parametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$ čtyřrozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}$ určeného soustavou rovnic*

$$\mathcal{B} = \{x_1 = 1,\ x_2 = 2\}.$$

Vzájemné polohy.

Dosud jsme obcovali s jednotlivými afinními podprostory. Nyní studujeme vzájemné polohy dvou podprostorů.

8. *V úloze **0** zvolte souřadnou soustavu a vyjádřete souřadnice všech relevantních bodů.*
Určete průnik (resp. vzájemnou polohu) přímky p a roviny α.

Zde samozřejmě čekáme jednobodový průnik $p \cap \alpha$, tedy *různoběžnost*.
Kromě této možnosti by v trojrozměrném afinním prostoru mohlo ještě nastat:
maximální průnik $p \cap \alpha = p$, tedy *incidentnost*, nebo prázdný průnik $p \cap \alpha = \emptyset$, tedy *rovnoběžnost*.
Na *mimoběžnost* není v této dimenzi dost místa...

9. *V trojrozměrném afinním prostoru jsou dány přímky $p = AB$ a $q = CD$, kde*

$$A = [1, -3, 4], \quad B = [3, -1, 5], \quad C = [3, 0, -1], \quad D = [3, 1, 2].$$

Určete vzájemnou polohu přímek p a q.

V tomto případě je *mimoběžnost* nejen možná, ale navíc generická (tj. nejobecnější a nejpravděpodobnější) poloha.

10. *Pozměňte zadání úlohy **9** tak, abyste vyčerpali všechny možné vzájemné polohy.*

Nejpozději tady si uvědomujeme, že vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ lze vždy jednoznačně určit podle společných bodů a společných vektorů, tedy podle průniku $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ (prázdný/neprázdný, maximální/nemaximální) a průniku zaměření $\overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}}$ (maximální/nemaximální).
Obě tyto informace dolujeme naráz z jednoho počítání...

11. *Ve čtyřrozměrném afinním prostoru jsou dány podprostory*

$$\mathcal{B} = \{[-1, 7, 0, a] + t(1, 0, 0, 1) + s(3, 0, 1, 2) \mid t, s \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C} = \{x_1 - 2x_3 = 0,\ x_3 - x_4 = -2\}.$$

V závislosti na hodnotě $a \in \mathbb{R}$ určete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
Pokud to půjde, popište všechny společné body a vektory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Příčky.

Dosud jsme obcovali s jednotlivými nebo s dvojicemi afinních podprostorů. Nyní přidáme další — příčky. *Příčka* dvou podprostorů je přímka, která je s oběma podprostory různoběžná.
I pro malé podprostory je příček obvykle velké množství. S jistými dodatečnými podmínkami může být příčka určena jednoznačně. Postupně budeme diskutovat několik takových podmínek...

12. *V úloze **0** uvažte přímky AH a BC.*
Určete takovou příčku těchto dvou přímek, která prochází středem krychle.

Bez názorné opory v krychli, řešme následující skupinu úloh:

13. *V trojrozměrném afinním prostoru jsou dány přímky*

$$p = \{[t, 1, t] \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad q = \{[s, -1, -s] \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Ukažte, že přímky p a q jsou mimoběžné a popište nějak množinu všech jejich příček.
Zamyslete se, jak by vypadala množina všech příček pro jiné vzájemné polohy přímek p a q.

14. *Pro přímky z úlohy **13** určete příčku, která prochází bodem $M = [-1, 0, 0]$.*

Zvídaví jedinci mohou nahradit bod M jiným bodem na přímce $m = \{[-1, r, r] \,|\, r \in \mathbb{R}\}$ a zamyslet se nad nápadem **2** v části 5.

Jiná omezující podmínka:

15. *Pro přímky z úlohy **13** určete příčku, která je rovnoběžná s vektorem* $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$.

Zvídaví jedinci mohou nahradit vektor $\mathbf{w}$ jiným vektorem z roviny $\omega = \{x_1 - x_2 = 0\}$ a zamyslet se nad analogií nápadu **2** v části 5.

Další úlohy tohoto typu budeme řešit v části 3...

Poloprostory a konvexní obaly.

Dosud jsme se zabývali celými afinními podprostory, nyní se podíváme na jejich části — poloprostory, úsečky, konvexní obaly apod.

16. *V úloze **0** ukažte analyticky, že*

(a) bod F leží v opačném poloprostoru vymezeném rovinou α než bod A,
(b) průsečík $p \cap \alpha$ leží mezi body A a F,
(c) průsečík $p \cap \alpha$ leží v těžišti trojúhelníku KLM,
(d) střed krychle neleží v konvexním obalu bodů K, L, M, F,

V podobných úlohách se báječně hodí tzv. *barycentrické souřadnice* bodu vzhledem k dané množině bodů — ty interpretujeme pomocí jakýchsi „vah"...

Bez názorné opory v krychli, řešte následující úlohu:

17. *Ve čtyřrozměrném afinním prostoru jsou dány body*

$$A = [1, -1, 0, 2], \quad B = [4, 1, 1, 1], \quad C = [2, -1, 1, 3],$$
$$D = [3, 0, 1, 2], \quad E = [5, 1, 2, 2], \quad F = [4, -1, 0, 2].$$

Pokud je to možné, tak určete barycentrické souřadnice bodů D, E a F vzhledem ke trojici A, B, C. Rozhodněte, zda body D, E a F náleží konvexnímu obalu bodů A, B, C.

Zvídaví jedinci se mohou zamyslet nad tím, jaký (známý) útvar tvoří konvexní obal všech šesti bodů z předchozí úlohy...

3. Měřičské úlohy — eukleidovská geometrie

K měření potřebujeme *metriku*. *Eukleidovská* metrika je metrika kompatibilní s afinní strukturou. K jejímu popisu stačí *skalární součin* na zaměření: $V \times V \to \mathbb{R}$.

Základní vlastnosti skalárního součinu jsou bi-lineárnost, symetričnost a pozitivní definitnost.

Odtud velikost vektoru, kolmost a odchylka dvou vektorů, ...

Vzdálenost.

Vzdálenost dvou bodů je rovna velikosti odpovídajícího vektoru. *Vzdálenost* dvou podmnožin je rovna infimu všech možných vzdáleností mezi body z jedné a druhé podmnožiny.

Chceme umět měřit vzdálenosti lib. podprostorů — v tomto případě se vzdálenost vždy realizuje v nějaké dvojici bodů (tedy infimum = minimum).

Základní geometrická charakterizace pro, $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$, je tato:

$$|BC| = \min \iff \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B} \text{ a } \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}.$$

(Česky: úsečka BC je nejkratší příčkou podprostorů, právě když je k oběma kolmá.)

18. *Ověřte, zda vaše volba v úloze **1** je* kartézská.

Pokud náhodou není, zvolte kartézskou souřadnou soustavu a vyjádřete souřadnice všech relevantních bodů.

Uvědomte si, že volba měřítka odpovídá volbě velikosti hrany krychle…

19. *V úloze **0** určete vzdálenost*

(a) bodů $|AC|$, $|AF|$, $|AL|$ apod.,
(b) bodu A od přímky EH, GF apod.,
(c) bodu K od přímky AF,
(d) bodu F od roviny KLM,
(e) přímek AH a BC, AH a CF, AF a BG apod.,
(f) přímek AF a BC,

*a to nejprve bez souřadnic, poté analyticky (vzhledem k volbám z úlohy **18**).*

Uvědomte si, že každou z předchozích úloh umíme řešit několika (mnoha) způsoby:

20. *Řešte některou z předchozích úloh nějak jinak.*
Dobře si rozmyslete, nakolik jsou jednotlivé nápady obecné/specifické.

Uvědomte si, že z (téměř jakéhokoli) výpočtu vzdálenosti dvou podprostorů lze vždy rozpoznat jejich vzájemnou polohu!

Bez názorné opory v krychli, řešte následující úlohu:

21. *Ve čtyřrozměrném eukleidovském prostoru, vzhledem ke kartézské souřadné soustavě, jsou dány podprostory*

$$\mathcal{B} = \{[1,2,0,0] + t(0,0,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C} = \{[-1,0,2,0] + r(-1,0,2,1) + s(1,0,-1,0) \mid r,s \in \mathbb{R}\}.$$

Určete vzdálenost a vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Kolmost a odchylka.

Pomocí skalárního součinu umíme měřit *odchylku* dvou vektorů; speciálním případem je *kolmost*…

Se zobecněním těchto pojmů pro obecné podprostory je trochu potíž, viz přednáška…

Omezíme se jen na několik nevinných úloh.

22. *V úloze **0** určete*

(a) všechny možné podprostory, které jsou kolmé k přímce AF a prochází bodem K,
(b) všechny možné podprostory, které jsou kolmé k rovině KLM a prochází bodem F.

Nejpozději na tomto místě si musí každý uvědomit, že v rovnicovém vyjádření podprostoru jsou vidět souřadnice k němu kolmých vektorů (sr. s úlohou **3**).

23. *V úloze **0** určete odchylku*

(a) přímek AF a FC, AF a BC, KM a KL apod.,
(b) přímky KF od roviny KLM,
(c) rovin ABC a KLM.

Odchylka přímky od lib. podprostoru je rovna odchylce směrového vektoru přímku od jeho *kolmého průmětu* do onoho podprostoru.

Pokud jste to tak v některé z předchozích úloh neudělali, rozhodně zkuste např.:

24. *V úloze **0** určete kolmý průmět vektoru $\overrightarrow{KF}$ do zaměření roviny KLM.*

Mnoho nezávisle formulovaných úloh spolu úzce souvisí, což by nikdo neměl přehlížet! Viz např. následující postřeh:

25. *Ozn. $\varphi =$ odchylku přímky KF od roviny KLM a $v =$ vzdálenost bodu F od roviny KLM.*
Ukažte, že $v = |KF| \cdot \sin\varphi$.

Obsahy a objemy.

Z algebry si pamatujeme, že obsahy rovnoběžníků, resp. objemy rovnoběžnostěnů nějak souvisí s *determinanty*. Tento poznatek si osvěžíme a dále rozvineme…

Vzhledem k předchozímu však nemůžeme začít jinak než

26. *V úloze **0** určete*

(a) obsah trojúhelníku KLM,
(b) objem čtyřstěnu $KLMF$,

a odtud vzdálenost bodu F od roviny KLM.

Nyní jeden výchovný příklad v rovině:

27. *Vzhledem ke kartézské souřadné soustavě jsou dány vektory*

$$\mathbf{v}_1 = (3,3), \quad \mathbf{v}_2 = (7,1).$$

Určete obsah rovnoběžníku určeného těmito vektory, a to

(a) zcela elementárně (počítáním čtverečků),
(b) pomocí vhodných transformací (např. na obdélník se stranami ve směrech souřadných os),
(c) pomocí determinantu (vnějšího součinu),
(d) pomocí výšky na některou ze stran,
(e) pomocí odchylky vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ (a odtud výšky …),
(f) pomocí determinantu (Gramova).

Navazující příklad v prostoru:

28. *Vzhledem ke kartézské souřadné soustavě jsou dány vektory*

$$\mathbf{v}_1 = (3,3,0), \quad \mathbf{v}_2 = (7,1,0), \quad \mathbf{v}_3 = (-1,1,2).$$

Určete

(a) obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,
(b) obsah rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$.

*Dobře si rozmyslete, které nápady z úlohy **27** jsou použitelné, které nikoli a zda nemáme nějaké další.*

Cestou si připomínáme několik sympatických algebraických zobrazení:

- *vnější součin* = determinant chápaný jako $\underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$,
- *vektorový součin*: $\underbrace{V \times \ldots \times V}_{n-1} \to V$,

kde $n = \dim V$, všechno je antisymetrické, lineární ve všech složkách, …

Všimněte si, že ve vyjádřeních vektoru výšky znovu vidíme *kolmý průmět*…

Po této masáži se můžeme vrátit k úloze **26** a ověřit výsledek mnoha různými způsoby…

Na závěr jeden příklad ve vícrozměrném prostoru:

29. *Vzhledem ke kartézské souřadné soustavě jsou dány vektory*

$$\mathbf{v}_1 = (3,3,0,0), \quad \mathbf{v}_2 = (7,0,1,0), \quad \mathbf{v}_3 = (0,-1,1,2),$$

body $B = [2,1,0,-3]$, $C = B + \mathbf{v}_3$ a podprostory $\mathcal{B} = \{B + t\mathbf{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{C} = \{C + s\mathbf{v}_2 \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Dokažte, že umíte z jedné vody vyřešit následující úlohy:

(a) ukažte, že podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou mimoběžné,
(b) určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$,
(c) ukažte, že podprostor $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ je nadrovina,
(d) určete rovnicové vyjádření nadroviny $\mathcal{B} + \mathcal{C}$.

[Vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ se může hodit ...]

4. Transformační úlohy — zobrazení

Chceme analyticky pokrýt *shodná, podobná, (ekvi-)afinní a projektivní* zobrazení, o nichž víme vše podstatné z minulého semestru. Základní úkoly jsou v podstatě jenom tři:

- pro dané geometrické zobrazení najít odpovídající souřadnicové vyjádření,
- pro dané souřadnicové vyjádření najít odpovídající geometrické zobrazení,
- mezi všemi možnými zobrazeními bezpečně rozpoznat ta *základní*.

Vyjádření zobrazení.

Nemůžeme si pomoct a musíme zase začít s krychlí:

30. *V úloze **0***

(a) rozhodněte, zda jsou body B a G souměrné podle přímky p,
(b) určete bod souměrný s B (příp. s dalšími vrcholy krychle) podle přímky p,

*a to nejprve bez souřadnic, poté analyticky (vzhledem k volbám z úlohy **18**).*

Z řešení (b) uvíme vyvodit řešení (a), řešení (a) je snazší. Řešení (a) i (b) umíme vyvodit z řešení následující obecné úlohy:

31. *V úloze **0** určete souměrný obraz obecného bodu podle přímky p, tj. popište tuto souměrnost jakožto zobrazení celého prostoru (vzhledem k volbám z úlohy **18**).*

V tomto případě stačí (vzhledem k řešení úlohy **30**(b) (a několika málo užitečným poznatkům!)) doplnit jenom pár věcí...

Obecně:

- souměrnost podle přímky je shodnost, a tedy afinní zobrazení,
- afinní zobrazení v prostoru dimenze 3 je zcela určeno obrazy 4 bodů v obecné poloze,
- dosazení 4 odpovídajících si dvojic bodů do obecného analytického vyjádření vede k soustavě $4 \cdot 3 = 12$ lineárních rovnic a $3 \cdot 3 + 3 = 12$ neznámých,
- která má jednoznačné řešení, ...

Ve vhodné souřadné soustavě může být souřadnicové vyjádření obzvlášť snadné:

32. *Ukažte, že ve vhodné souřadné soustavě lze zobrazení z úlohy **31** vyjádřit takto:*

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z.$$

Určete alespoň milión takových souřadných soustav.

Maticový zápis předchozího vyjádření vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

33. *V úloze **0** uvažte souřadnou soustavu s počátkem v bodě D a bázovými vektory $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ a $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$. Vzhledem k této souřadné soustavě uvažte zobrazení zadané předpisem*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že toto zobrazení je souměrností podle přímky $p = AH$.

34. *Uvědomte si, že souřadná soustava v úloze **33** je kartézská a řešte zbytek úlohy bez nápovědy. Tzn. z daného vyjádření*

(a) rozpoznejte typ zobrazení (tj. shodné/podobné/(ekvi-)afinní/projektivní),
(b) rozhodněte, zda je regulární/singulární,
(c) rozhodněte, zda je přímé/nepřímé,
(d) určete všechny samodružné body a směry,
(e) určete druh zobrazení (tj. souměrnost, otáčení, stejnolehlost apod.).

Na rozloučenou s krychlí:

35. *Vzhledem k souřadné soustavě jako v úloze **33** jsou dány tři zobrazení pomocí rozšířených matic:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že každé z těchto zobrazení je symetrií krychle a určete která.

Zvídaví jedinci si hned spočítají, kolik je všech symetrií krychle a jakých jsou druhů...

Abychom vyčerpali všechny slibované typy zobrazení, doplňujeme ještě pár úloh v rovině:

36. *Vzhledem ke kartézské souřadné soustavě jsou dány body*

$A = [0,0], \quad B = [2,0], \quad C = [0,2], \quad D = [2,2]$

a jejich obrazy

(a) $A' = [6,2], \quad B' = [9,2], \quad C' = [7,4], \quad D' = [9,3],$
(b) $A' = [6,2], \quad B' = [9,2], \quad C' = [7,4], \quad D' = [10,4],$
(c) $A' = [9,4], \quad B' = [9,1], \quad C' = [6,4], \quad D' = [6,1],$
(d) $A' = [9,4], \quad B' = [9,2], \quad C' = [7,4], \quad D' = [7,2].$

*Pro každý z těchto případů určete analytické vyjádření odpovídající projektivní transformace a řešte všechny podúlohy v **34**.*

Uvědomte si, že v rovině si vše snadno znázorníte, odkud téměř vše snadno odhalíte.[2] Všechny výpočty je proto vhodné konfrontovat s příslušným znázorněním...

Základní zobrazení.

Základní je takové zobrazení, které má nadrovinu samodružných bodů (tzv. *nadosu*).

Zobecněná Desarguesova věta nás poučuje, že projektivní zobrazení má nadosu, právě když má střed. Jak nadosa, tak střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní.

Základní zobrazení může být jak regulární (např. stejnolehlost), tak singulární (např. promítání do menšího podprostoru).

37. *Mezi zobrazeními z předchozích úloh vyberte všechna základní, pojmenujte je a popište jejich určující prvky.*

Podle typu zadání tento úkol řešíme geometricky (bez počítání) nebo algebraicky. O základnosti zobrazení rozhoduje, zda má dost samodružných prvků. V této souvislosti si uvědomte, že samodružné směry ukazují na samodružné body v nekonečnu...

38. *V úloze **0** rozhodněte zda existuje základní zobrazení, které je symetrií krychle a zobrazuje vrchol F na vrchol A (resp. B, C, ...). Pokud ano, pojmenujte je a popište jeho určující prvky.*

V této úloze nutně pátráme mezi shodnými zobrazeními.

Pro kterýkoli z dalších typů můžeme řešit následující úlohu, kde — na rozdíl od předchozí situace — máme obrovskou volnost:

[2] aplikace na následujícím odkazu může pomoct: `https://ggbm.at/WpijCH4E`

39. *V úloze **0** určete alespoň milión základních zobrazení, která zobrazují vrchol F na vrchol A.*

Z obdobných důvodů jako výše zmiňujeme ještě pár úloh v rovině:

40. *Pozměňte body v každé podúloze **36** tak, aby odpovídající transformace byla stejného typu a současně byla základní.*

Nezapomeňte, že o základních zobrazeních v rovině víme úplně všechno (včetně konstrukcí a mnoha aplikací)... [3]

Skládání.

Skládání projektivních zobrazení odpovídá násobení jim příslušných matic.

41. *Uvažte všemožné složeniny symetrií krychle v úloze **35** a určete druhy nově vzniklých symetrií.*

Ještě několik jednoduchých zobrazení v rovině (vesměs posbíraných z různých písemek):

42. *V eukleidovské rovině, vzhledem ke kartézské souřadné soustavě, jsou dána následující zobrazení:*

(a) osová souměrnost podle osy určené body $A = [0, -2]$ a $B = [2, 0]$,
(b) posunutí o vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$,
(c) otáčení kolem bodu $C = [0, 2]$ o 90° v kladném směru,
(d) stejnolehlost se středem v bodě $D = [-2, 0]$ a koeficientem $k = -2$,
(e) osová afinita s osou určenou body C a D, směrem $\mathbf{w} = \overrightarrow{CA}$ a modulem $m = +\frac{1}{2}$,
(f) středové promítání ze středu C do přímky BD.

Uvažte všemožné složeniny těchto zobrazení a určete druhy nově vzniklých zobrazení.

Skládáním základních zobrazení jistého typu umíme vyjádřit jakékoli zobrazení tohoto typu. (To je taky důvod, proč se základním zobrazením říká právě tak.)

43. *Nezákladní zobrazení v úloze **42** (resp. **36**) vyjádřete pomocí základních zobrazení.*

Ještě jedna krychle na rozloučenou:

44. *Nezákladní symetrie krychle v úloze **35** vyjádřete pomocí základních symetrií.*

No a to je zhruba všechno...

5. Nápady

Tady uvádíme pro inspiraci několik možných a osvědčených témat k samostatné domácí práci:

1. *Diskutujte změnu analytického vyjádření vzhledem ke zvolené souřadné soustavě (viz např. cvičení 5.2).*[4]

2. *Určete všechny společné příčky tří navzájem mimoběžných přímek. Představte, příp. znázorněte přímkovou plochu určenou těmito příčkami (viz např. úlohu **14**).*

3. *Řešte jednu úlohu několika různými způsoby, porovnejte výsledky, diskutujte možnosti a výhody/nevýhody toho kterého postupu (viz např. vzdálenosti podprostorů, objemy mnohostěnů apod.).*

4. *Řešte některou z úloh zmiňovaných na přednášce, na něž se však na cvičení nedostalo (viz např. odchylku obecných podprostorů).*

5. *Řešte některou ze standardních úloh v homogenních souřadnicích a porovnejte s odpovídajícím řešením v souřadnicích afinních (viz např. vzájemné polohy podprostorů).*

---

[3] viz též `https://ggbm.at/az7e9qsC`

[4] odkaz míří do osnovy k přednášce, `http://is.muni.cz/el/1441/podzim2018/MA2BP_PGE/um/osnova.pdf`

6. *Srovnejte elementární a algebraický přístup k nějakému klasickému geometrickému tvrzení nebo problému (viz např. Thaletova věta, střed kružnice vepsané apod.).*[5]

7. *Srovnejte konstrukční a početní řešení nějaké stereometrické úlohy (viz např. úvodní úlohu **0**).*

8. *Srovnejte konstrukční a početní řešení nějaké transformační úlohy (viz např. skládání základních transformací, obraz pravidelného mnohoúhelníku apod.).*

9. *A tak dále a tak podobně...*

---

[5] užitečným zdrojem může být `http://is.muni.cz/th/13813/prif_d/dizerJE.pdf`