MA0009, 8. ledna 2020

Všechna souřadnicová vyjádření jsou vzhledem ke kartézské souřadné soustavě příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 36 bodů.

---

1. Je dána krychle s protilehlými podstavami $ABCD$ a $EFGH$. Dále jsou dány body

$$K = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B, \quad L = \tfrac{1}{2}F + \tfrac{1}{2}G, \quad M = \tfrac{1}{2}G + \tfrac{1}{2}H, \quad N = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}D.$$

\+ Dokažte, že body K, L, M, N leží v jedné rovině.
\+ Určete vzdálenost bodu E od roviny $KLMN$.
\+ Určete poměr oblemů částí krychle vymezených rovinou $KLMN$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid 2x_3 - x_4 = 1\},$$
$$\mathcal{C} = \{[0, 8, 0, 1] + t(1, 1, 1, 0) + s(0, 1, 1, -1) + r(2, 1, 0, 1) \mid t, r, s \in \mathbb{R}\}.$$

\+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
\+ Určete odchylku podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 2).$$

\+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \centerdot \mathbf{v}_2)^2.$$

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1, 3, 4], \quad B = [0, 4, 4], \quad C = [2, 4, 6].$$

\+ Určete bod D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl lichoběžníkem a obsah trojúhelníku ACD byl dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ACB.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní (souřadnicový) příklad…

\+ … mnohoúhelníku, jehož těžiště leží mimo tento mnohoúhelník.
\+ … dvou podprostorů, které jsou mimoběžné a současně kolmé.

6. Dokažte, že…

\+ … vlastnost v úloze **3** platí obecně.
\+ … nadrovina v afinním prostoru nemůže být mimoběžná s žádným podprostorem.
\+ … umíte některý z předchozích úkolů řešit jiným způsobem.