MA0009, 21. ledna 2020

Všechna souřadnicová vyjádření jsou vzhledem ke kartézské souřadné soustavě příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 36 bodů.

---

1. Je dán čtyřboký jehlan s podstavou $ABCD$ a vrcholem V, jehož všechny hrany jsou navzájem shodné. Dále jsou dány body

$$K = \tfrac{2}{3}A + \tfrac{1}{3}V, \quad L = \tfrac{2}{3}C + \tfrac{1}{3}V.$$

+ Určete odchylku přímek KL a CV.
+ Určete vrcholy mnohoúhelníku řezu jehlanu rovinou KLB.
+ Určete těžiště mnohoúhelníku řezu jehlanu rovinou KLB.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[3,2,1,2] + r(1,1,1,1) \mid r \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[4,4,4,0] + s(1,2,1,0) + t(-1,0,1,2) \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Ve dvojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (3,1), \quad \mathbf{v} = (1,3).$$

+ Určete vnější součin $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$, odchylku $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ a ukažte, že platí

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha.$$

4. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1,1,2], \quad B = [1,4,3], \quad C = [1,2,5].$$

+ Určete bod D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl osově souměrný a měl obsah 12.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní (souřadnicový) příklad…

+ … nepravidelného mnohostěnu s objemem 12.
+ … dvou podprostorů s netriviálním průnikem a odchylkou 60°.

6. Dokažte, že…

+ … vlastnost v úloze **3** platí obecně.
+ … totálně kolmé podprostory se protínají v bodě.
+ … umíte některý z předchozích úkolů řešit jiným způsobem.