

MA0009, 24. ledna 2020

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 36 bodů.

1. Je dána krychle s protilehlými podstavami $ABCD$ a $EFGH$. Dále jsou dány body

$$K = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B, \quad L = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C, \quad N = \frac{1}{4}F + \frac{3}{4}G.$$

- + Určete odchylku rovin KLM a ABC .
- + Určete vrcholy mnohoúhelníku řezu krychle rovinou KLM .
- + Určete obsah mnohoúhelníku řezu (vzhledem k obsahu stěny krychle).

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{x_3 - 2x_1 = 2, \quad x_3 + x_4 - 2x_1 = 2\},$$
$$\mathcal{C} = \{[1, 3, 9, 1] + t(1, 3, 2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- + Určete vzájemnou polohu \mathcal{B} a \mathcal{C} .
- + Určete vzdálenost \mathcal{B} a \mathcal{C} .

3. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (0, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (-2, 2, -4).$$

- + Určete vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, vnější součin $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| = \pm[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

4. Je dán lichoběžník $ABCD$ s obsahem 25, jehož úhlopříčky se protínají v bodě

$$E = \frac{3}{5}A + \frac{2}{5}C.$$

- + Určete obsahy trojúhelníků ABE , BCE , CDE a DAE .

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní (souřadnicový) příklad. . .

- + . . . nepravidelného mnohoúhelníku, který je souměrný podle některé své úhlopříčky.
- + . . . dvou podprostorů, které jsou kolmé a mají společný směr.

6. Dokažte, že. . .

- + . . . vlastnost v úloze **3** platí právě tehdy, když vektor \mathbf{w} je kolmý k \mathbf{u} a \mathbf{v} .
- + . . . pro obecné podprostory \mathcal{B} a \mathcal{C} platí: body $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$ mají minimální vzdálenost právě tehdy, když vektor \overrightarrow{BC} je kolmý jak k \overrightarrow{B} , tak \overrightarrow{C} .
- + . . . umíte některý z předchozích úkolů řešit jiným způsobem.