MA0009, 30. ledna 2020

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 36 bodů.

---

1. Je dán čtyřboký jehlan s podstavou $ABCD$ a vrcholem E, jehož všechny hrany jsou navzájem shodné. Dále jsou dány body

$$K = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B, \quad L = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C, \quad N = \tfrac{1}{4}D + \tfrac{3}{4}E.$$

+ Určete vrcholy mnohoúhelníku řezu jehlanu rovinou KLN.
+ Určete odchylku rovin KLN a ABC.
+ Určete poměr objemů mnohostěnů $ABCE$ a $KBLN$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[4,1,1,2] + t(0,1,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[3,3,4,0] + s_1(1,0,1,0) + s_2(0,1,0,0) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (4,3,0), \quad \mathbf{v}_2 = (4,3,5).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2.$$

4. Ve dvojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1,2], \quad C = [6,2], \quad E = [3,2].$$

+ Určete body B a D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ měl obsah 15 a těžiště v bodě E.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní (souřadnicový) příklad…

+ … nepravidelného středově souměrného mnohostěnu.
+ … dvou mimoběžných podprostorů se společným směrem.

6. Dokažte, že…

+ … vlastnost v úloze **3** platí obecně.
+ … odchylka přímky $\mathcal{B}$ od podprostoru $\mathcal{C}$ je rovna odchylce přímky $\mathcal{B}$ od jejího kolmého průmětu do $\mathcal{C}$.
+ … umíte některý z předchozích úkolů řešit jiným způsobem.