SOUVISLOST SE VZÁJEMNÝMI POLOHAMI

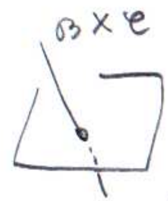
$v := \text{vzdál}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$

$d := \dim \{ \text{všechny dvojice } \underset{\in\mathcal{B}}{B}, \underset{\in\mathcal{C}}{C} \text{ pro které } |BC| = \min, \text{ tj. } \vec{BC} \perp \vec{\mathcal{B}}, \ \vec{BC} \perp \vec{\mathcal{C}} \}$

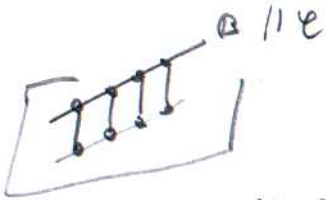
$m := \min \{ \dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{C} \}$

např.:

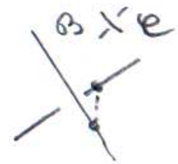
$v = 0, \ d = 1 = \dim \mathcal{B}$



$v = 0, \ d = 0 < \dim \mathcal{B}$



$v \neq 0, \ d = 1 = \dim \mathcal{B}$



$v \neq 0, \ d = 0 < \dim \mathcal{B}$

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ \ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	d je max ($d = m$)	d není max ($d < m$)
$v = 0$	$\subseteq$	X
$v \neq 0$	$\parallel$	X

(... sr. s. 49–50)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět

95

KOLMÝ DOPLNĚK

(Algebraická odbočka)

V .. vekt. pr. se skalárním součinem

U .. vekt. podprostor

* $U^\perp := \{$ všechny vektory ve V, které jsou $\perp$ ke všem vektorům v U $\}$

$= \{ \underline{x} \in V \mid \underline{x} \cdot \underline{u} = 0$ pro všechny $\underline{u} \in U \}$

$= \{ \underline{x} \in V \mid \boxed{\begin{matrix} \underline{x} \cdot \underline{u}_1 = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{u}_2 = 0 \\ \vdots \end{matrix}} \}$ ← $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \ldots$ báze U

← soustava lin. homog. rovnic

.. (k nezáv. rovnic, n neznámých)

* $U^\perp$ je $\boxed{\text{vektorový podprostor}}$.

* $\dim V = n$, $\dim U = k$ $\Rightarrow$ $\dim U^\perp = \boxed{n-k}$

* $U \cap U^\perp = \boxed{\{o\}}$ ⟶ $\boxed{U + U^\perp = V}$

TEDY: U a $U^\perp$ jsou vskutku $\boxed{\text{DOPLŇKOVÉ}}$.

(komplementární)

DŮSLEDKY

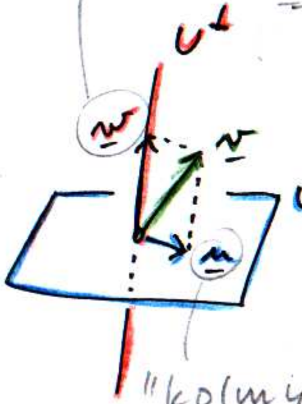
$U + U^\perp = V$

- lib. $\underline{v} \in V$ lze $\boxed{\text{VYJÁDŘIT}}$ jako

$$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}\,;\quad u \in U \text{ a } w \in U^\perp,$$

a to $\boxed{\text{JEDNOZNAČNĚ}}$.

$U \cap U^\perp = \{0\}$



$\vec{\mathcal{B}}^\perp = \vec{\mathcal{C}}$

- totálně kolmé afinní podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ se $\boxed{\text{PROTÍNAJÍ}}$, a to v $\boxed{\text{BODĚ}}$.

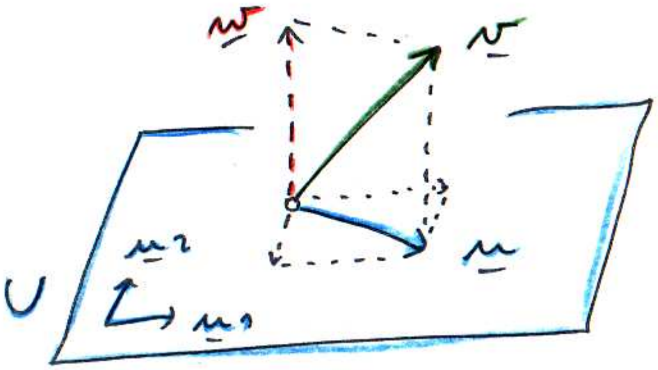
$U + U^\perp = V$

$U \cap U^\perp = \{0\}$

(... viz s. 51)

KOLMÝ PRŮMĚT

vektoru $\underline{v} \in V$ do podprostoru $U \subseteq V$



dim $U = \underline{\underline{k}}$

ⓐ $\underline{u} \in U$, tj. $\underline{u} = a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2 + \dots$

$a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$?

ⓑ $\underline{u}$ je kolmý průmět $\underline{v}$,

tj. $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u} \perp U$

tj. $(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{u}_i = 0$

tj. $\underline{u} \cdot \underline{u}_i = \underline{v} \cdot \underline{u}_i$

tj.

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1(\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1) + a_2(\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_1) + \dots = \underline{v} \cdot \underline{u}_1 \\ a_1(\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2) + a_2(\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_2) + \dots = \underline{v} \cdot \underline{u}_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}}$$

$\underline{\underline{k}}$ lin. rovnic

$\underline{\underline{k}}$ neznámých $\longrightarrow$

(sym. čtvercová matice

det $\neq 0$, jednozn. řešení ...)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled

$\boxed{\text{CVIČENÍ}}$

98 Je dán bod B a (nad-)rovina C v eukleidovském prostoru:

$$B = [-1, 5, 7],$$

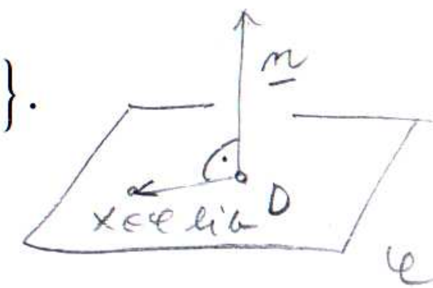
$$C = \Big\{ \underbrace{[1,2,3]}_{D} + r\underbrace{(1,1,-1)}_{\underline{u}} + s\underbrace{(2,1,0)}_{\underline{v}} \,\Big|\, r, s \in \mathbb{R} \Big\} \quad = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \}.$$

$$\vec{C} = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \}$$ homog.

Kolmý doplněk k $\vec{C}$ je $\quad \underline{x} \cdot \underline{u}$, kde $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\underline{x} \cdot \underline{v} = 0$

$$\vec{C}^{\perp} = \{ x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 2x_1 + x_2 = 0 \} \quad = \Big\{ t\underbrace{(1,-2,-1)}_{\underline{n}} \,\Big|\, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$



Označíme body a vektory tak, že

$$C = \Big\{ D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \,\Big|\, r, s \in \mathbb{R} \Big\} \quad = \Big\{ \overrightarrow{DX} \,.\, \mathbf{n} = 0 \Big\},$$

$$\vec{C}^{\perp} = \{ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{v} = 0 \} \quad = \Big\{ t\mathbf{n} \,\Big|\, t \in \mathbb{R} \Big\}. \tag{1}$$

Hodláme určit vzdálenost $v(B, C)$, a to pomocí charakterizace:

$$|BC| = \min \iff \overrightarrow{BC} \perp C. \tag{2}$$

99

A. pata kolmice, vzdálenost ← velmi OBECNÝ postup ($\mathcal{B}, \mathcal{C}$ = cokoli)

Pro $C \in \mathcal{C}$ platí (2), právě když

$$\boxed{\overrightarrow{BC}\,.\,\mathbf{u} = 0 \text{ a } \overrightarrow{BC}\,.\,\mathbf{v} = 0,}$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + r\underline{u} + s\underline{v}$

což po rozepsání ($C = D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$) vede k soustavě lineárních rovnic

(podobnost se soustavou na s. 97 NENÍ náhodná! (*)) →

$$\boxed{\begin{aligned} r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u} &= \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{u},\\ r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} &= \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{v}.\end{aligned}}$$

← 2 rovnice / 2 neznámé

$\underbrace{\dim \mathcal{C}}_{2} + \underbrace{\dim \mathcal{B}}_{0}$

Dosazením vektorů ze zadání dostáváme

$$\boxed{\begin{aligned} 3r + 3s &= -3,\\ 3r + 5s &= -1.\end{aligned}}$$

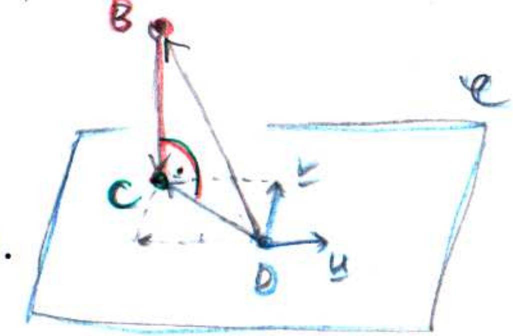
Tato soustava má jednoznačné řešení $r = -2$ a $s = 1$, tedy

$$C = D - 2\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1, 1, 5] \quad \text{a} \quad \overrightarrow{BC} = (2, -4, -2) = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je

$$v(B, \mathcal{C}) = |BC| = 2\|\mathbf{n}\| = 2\sqrt{6}.$$

(*) pozn.:

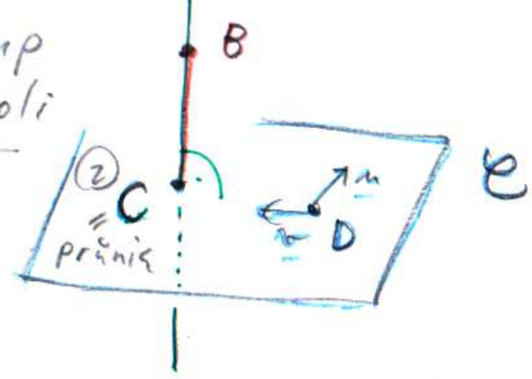


- $\overrightarrow{DC} = -2\underline{u} + \underline{v}$ ... kolmý průmět $\overrightarrow{DB}$ do $\mathcal{C}$
- $\overrightarrow{BC} = 2\underline{n}$ ... kolmý průmět $\overrightarrow{BD}$ do $\mathcal{C}^{\perp}$

100

B. kolmice, pata kolmice, . . .

« "konstrukční" postup pro B = bod, $\mathcal{C}$ = cokoli



① Kolmice k C procházející bodem B je

$$\mathcal{K} = B + \overrightarrow{C}^{\perp} = \left\{ B + t\mathbf{n} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

① $\mathcal{K}$ = kolmice

② Pata kolmice $C = \mathcal{K} \cap C$ odpovídá řešení rovnice

průnik podprostorů (umíme)

$$(-1 + t) - 2(5 - 2t) - (7 - t) = -6. \tag{3}$$

← ① rovnice / ① neznámá

dim $\vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

Tato rovnice má jednoznačné řešení $t = 2$, tedy

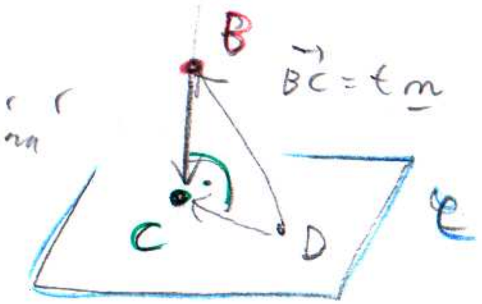
$$C = B + 2\mathbf{n} = [1, 1, 5].$$

Vzdálenost je

$$v(B, C) = |BC| = 2\|\mathbf{n}\| = 2\sqrt{6}.$$

101

C. zkratka ← « pro B = bod, ℯ = nadrovina



Rovnici (3) lze podle (1) obecně zapsat takto: 1 rovnice / 1 neznámá

$$\vec{DC} \cdot n = \boxed{(\overbrace{\overrightarrow{DB} + t\mathbf{n}}^{\vec{DC}}) \,.\, \mathbf{n} = \overrightarrow{DB} \,.\, \mathbf{n} + t\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} = 0.}$$

· $C \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \vec{DC} \cdot n = 0$

· $\vec{DC} = \vec{DB} + t\,n$

Tato rovnice má jednoznačné řešení

$$\boxed{t = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}}} = \frac{12}{6} = 2,$$

tedy

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}}\mathbf{n}} = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je ← „vzoreček"

$$\boxed{v(B, C) = |BC| = \frac{|\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}} = 2\sqrt{6}.$$

V duchu (1) můžeme poslední výpočet vyjádřit také takto: dosazení B do rovnice ℯ

$$v(B, C) = \frac{|-1 - 2 \cdot 5 - 7 + 6|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

← velikost normály

D. podle definice ← velmi OBECNÝ postup

- $\vec{BC} = \vec{BD} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+r+2s \\ -3+r+s \\ -4-r \end{pmatrix}$

- vzdál. $|BC| = \|\vec{BC}\| = \sqrt{(2+r+2s)^2+(-3+r+s)^2+(-4-r)^2} = \dots$

$$\dots = \sqrt{3r^2+6rs+6r+5s^2+2s+29}$$

↖ ozn. $f(r,s)$

- hledáme GLOBÁLNÍ MINIMUM funkce f:

⇝ derivace $\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6r+6s+6}{\sqrt{\dots}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6r+10s+2}{\sqrt{\dots}}$

⇝ STACIONÁRNÍ BOD(Y) = řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 6r+6s+6=0 \\ 6r+10s+2=0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} r=-2 \\ s=1 \end{pmatrix}$$

(podobnost se soustavou na s. 99 NENÍ náhodná!)

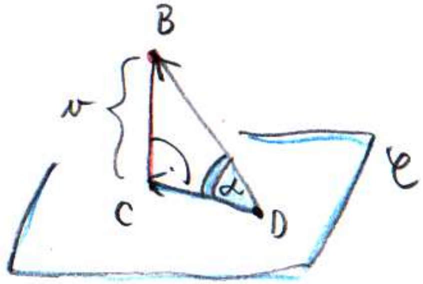
⇝ nutně MINIMUM ..... ↯

- $v(B,\mathcal{C}) = f(-2,1) = \dots = 2\sqrt{6}$

E. souvislost s odchylkou

viz dále ...

kolmý průmět



$$\vec{DC} = -2u + v = (0, -1, 2)$$

$$\alpha := \sphericalangle(DB, \varrho) \overset{!}{=} \sphericalangle(\vec{DB}, \vec{DC})$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{DB} \cdot \vec{DC}}{\|\vec{DB}\| \|\vec{DC}\|} = \dots = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$$

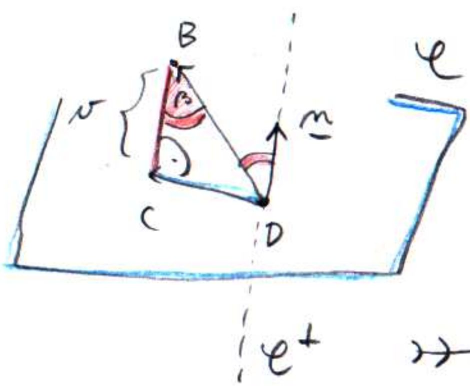
$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \dots = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{29}}$$

B = bod
ϱ = cokoli

$$\rightarrowtail \boxed{v = |DB| \cdot \sin\alpha} = \dots = \sqrt{24} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$

ZKRATKA :

normála



$$\beta := \sphericalangle(DB, m) \qquad (\because \ \alpha + \beta = 90°)$$

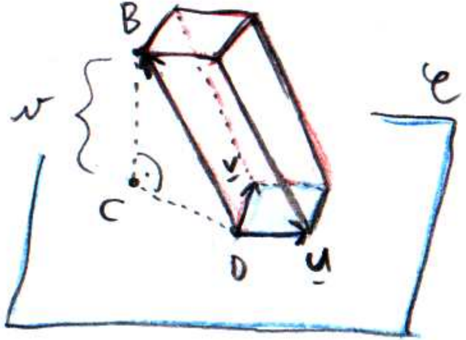
$$\cos\beta = \frac{|\vec{DB} \cdot m|}{\|\vec{DB}\| \cdot \|m\|}$$

B = bod
ϱ = nad-rovina

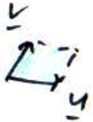
$$\rightarrowtail \boxed{v = |DB| \cdot \cos\beta} = \frac{|\vec{DB} \cdot m|}{\|m\|} = \dots = \frac{12}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$

tentýž "vzoreček" jako na s. 101 !

104 **F. souvislost s objemy** ← « velmi OBECNÝ postup



$V :=$ objem 

$S :=$ obsah 

$$\boxed{w = \frac{V}{S}} = \dots = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

viz dále ... !