ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů

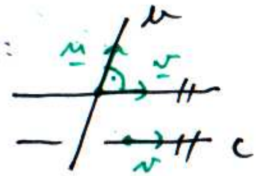
105

KOLMOST

1. základ .... vektory

$\underline{u} \perp \underline{v}$, pokud $\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = 0}$

2. přímky:



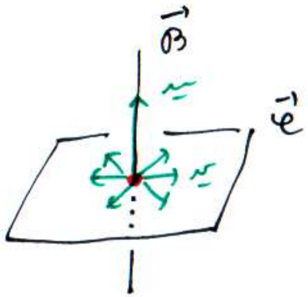
$b \perp c$, pokud $\boxed{\vec{b} \perp \vec{c}}$

tj. $\underline{u} \perp \underline{v}$

lib. $\vec{b}$ lib. $\vec{c}$

Obecné podpr.:

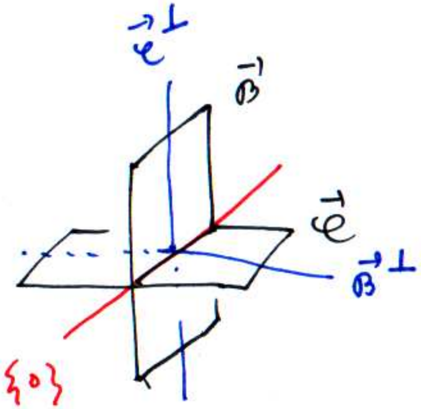
3. $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$



$\boxed{\mathcal{B} \perp \mathcal{C}, \text{ pokud } \underline{u} \perp \underline{v}}$

lib. $\vec{\mathcal{B}}$ — lib. $\vec{\mathcal{C}}$

4.



$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \{o\}$

$\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$, pokud
$\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$ nebo $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$
(tj. $\vec{\mathcal{B}}^{\perp} \supseteq \vec{\mathcal{C}}$ nebo $\vec{\mathcal{B}}^{\perp} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$)

(... podle nápadu 3 by nebyly kolmé ...)

"kolmost je věcí vektorů"

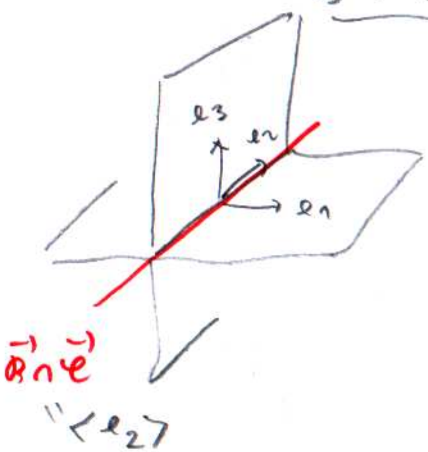
Def

- $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$, pokud $\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{C}}$;
- $\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{C}}$, pokud $\vec{\mathcal{B}} \underset{\supseteq}{\subseteq} \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$ (tj. $\vec{\mathcal{B}}^{\perp} \underset{\subseteq}{\supseteq} \vec{\mathcal{C}}$).

pozn

- tato def. zahrnuje všechny představitelné případy ... pomocí "inkluze" :)
- tato def. závisí na okolním prostoru $\mathcal{E}$:(

$\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle$



$\vec{\mathcal{C}} = \langle e_1, e_2 \rangle \rightsquigarrow \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = \langle e_3 \rangle$

$\underbrace{\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle \supset \langle e_3 \rangle = \vec{\mathcal{C}}^{\perp}}$

tedy $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ ✓

$\rightsquigarrow \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = \langle e_3, e_4 \rangle$

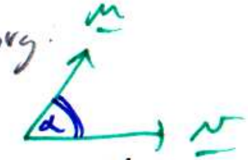
$\underbrace{\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle \cancel{\underset{\supseteq}{\subseteq}} \langle e_3, e_4 \rangle = \vec{\mathcal{C}}^{\perp}}$

tedy $\mathcal{B} \cancel{\perp} \mathcal{C}$

(e_1, e_2, e_3) ... ON báze $\mathcal{E}$ → vložíme do $\tilde{\mathcal{E}} \supset \mathcal{E}$ s rozšířenou ON bází (e_1, e_2, e_3, e_4)

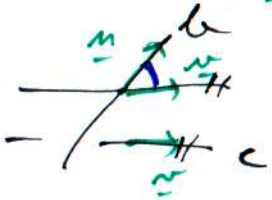
107
ODCHYLKY

1. základ ... vektory:



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}} \quad \ldots \ \alpha\in\langle 0°, 180°\rangle$$

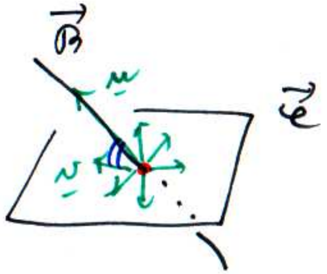
2. přímky:



$$\cos\alpha = \frac{|u\cdot v|}{\|u\|\cdot\|v\|} \quad \ldots \ \alpha\in\langle 0°, \underline{90°}\rangle$$

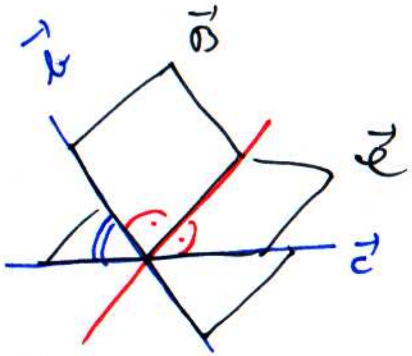
obecné podpr:

3. $\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}=\{0\}$



$$\boxed{\measuredangle(\mathcal{B},\mathcal{E}) := \min\left\{ \measuredangle(u,v) \;\middle|\; \begin{matrix} u\in\vec{\mathcal{B}} \\ v\in\vec{\mathcal{E}} \end{matrix} \right\}}$$

4.



$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}\neq\{0\}$

$$\measuredangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) := \measuredangle(\vec{b},\vec{c})$$

$\vec{b}\subseteq\vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{b}\perp(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})$

$\vec{c}\subseteq\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{c}\perp(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})$

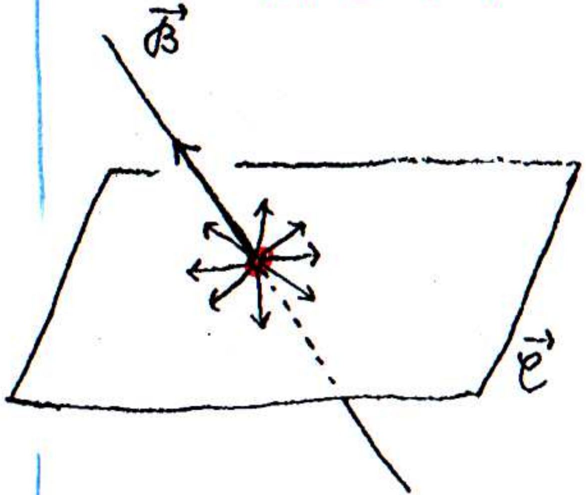
(... podle nápadu 3 by odchylka byla 0 ...)

"odchylka je věcí vektorů"

Def • $\measuredangle(\mathcal{B},\mathcal{E}) := \measuredangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}})$

• $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}})$ … musíme rozlišovat:

$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}=\{o\}$:

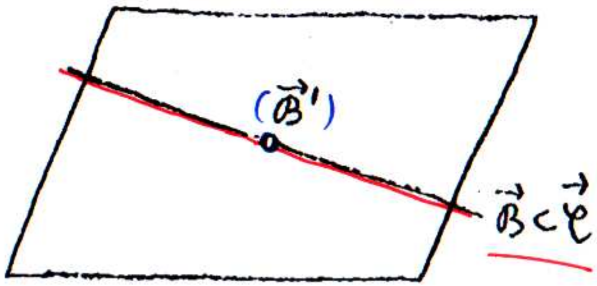


$\measuredangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) := \min\{\cdots\}$

↑ nápad ③

$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}\neq\{o\}$

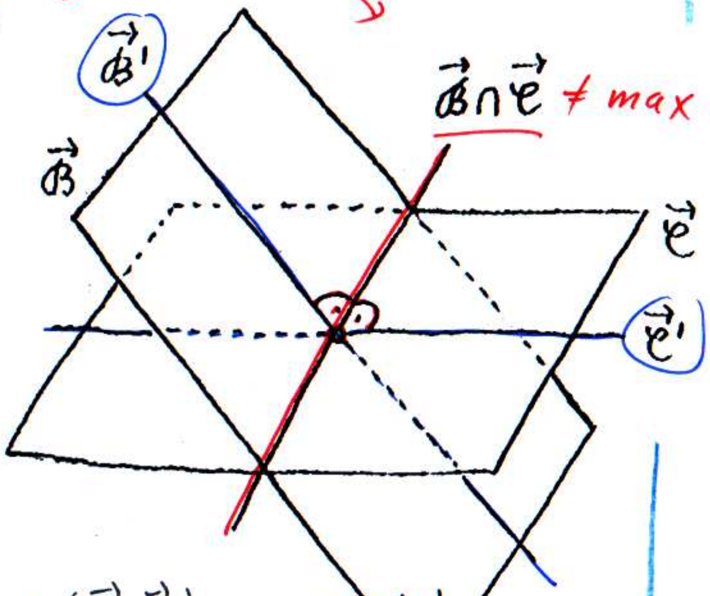
$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}=\max$:



$\measuredangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) := 0$

↑ spec. případ

$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}\neq\max$:



$\measuredangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) := \measuredangle(\vec{\mathcal{B}}',\vec{\mathcal{E}}')$

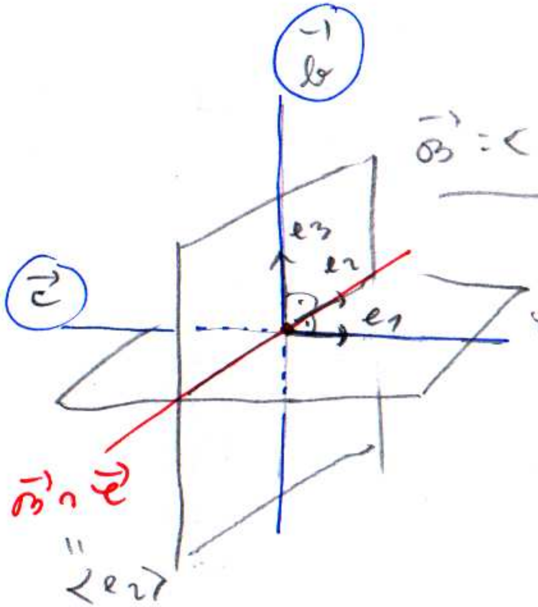
↑ nápad ④

Pozn • v posledním případě je $\vec{\mathcal{B}}'\cap\vec{\mathcal{E}}'=\{o\}$

$$\left[\left.\begin{aligned}\vec{\mathcal{B}}' &= \vec{\mathcal{B}}\cap(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})^{\perp}\\ \vec{\mathcal{E}}' &= \vec{\mathcal{E}}\cap(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})^{\perp}\end{aligned}\right\}\ \vec{\mathcal{B}}'\cap\vec{\mathcal{E}}' = (\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})\cap(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})^{\perp} = \{o\}\right]$$

109 POZN. · tato def. zahrnuje všechny předchozí a představitelné případy. ☺

· tato def. nezávisí na okolním prostoru $\mathcal{E}$ ☺



$\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle \rightsquigarrow \vec{b} \subseteq \vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{b} \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}}) \dots \vec{b} = \langle e_3 \rangle$

$\vec{\mathcal{E}} = \langle e_1, e_3 \rangle \rightsquigarrow \vec{c} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{c} \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}}) \dots \vec{c} = \langle e_1 \rangle$

$$\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = \measuredangle(e_1, e_3) = 90^\circ$$

tato úvaha nezávisí na vložení $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{E}}$

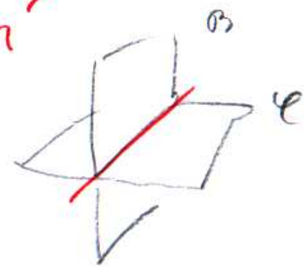
$(e_1, e_2, e_3) \dots$ ON báze $\rightsquigarrow (e_1, e_2, e_3, \dots)$ lib. rozšíření!

110 ZÁVĚRY

- $\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \implies \sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 90^\circ$

  $\cancel{\Longleftarrow}$

  obecně neplatí

  (viz 

ve 4-dim prostoru)

- pokud $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{\underline{o}\}$, potom

  $$\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \iff \sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 90^\circ$$