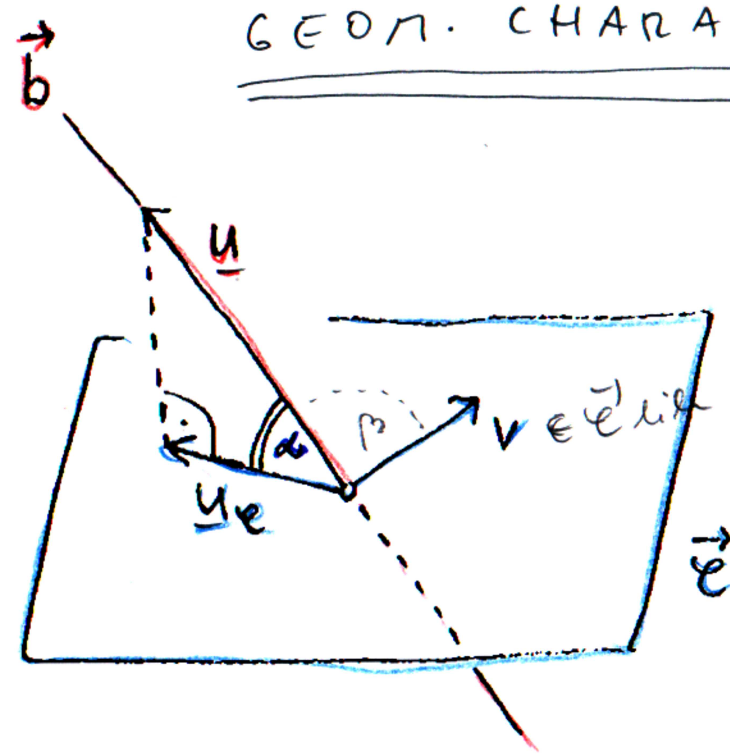
GEOM. CHARAKTERIZACE $\measuredangle(b, e)$

$\measuredangle(b, e)$ — b: přímka, e: cokoliv



Platí:

- $b \perp e \Rightarrow \measuredangle(b, e) = 90°$
- $b \not\perp e \Rightarrow \measuredangle(b, e) = \measuredangle(\underline{u}, \underline{u}_e)$

  kde $\underline{u} \in \vec{b}$ lib. a

  $\underline{u}_e =$ kolmý průmět $\underline{u}$ do $\vec{e}$

Důkaz:

- Pro lib. $\underline{v} \in \vec{e}$ chceme dokázat, že

  $\boxed{\beta \geq \alpha}$, tj. $\cos\beta \leq \cos\alpha$.

  $\beta = \measuredangle(\underline{u}, \underline{v})$, $\alpha = \measuredangle(\underline{u}, \underline{u}_e)$

- přičemž $\underline{w} = \underline{u} - \underline{u}_e \perp \vec{e}$, tj. $(\underline{u} - \underline{u}_e) \cdot \underline{v} = 0$

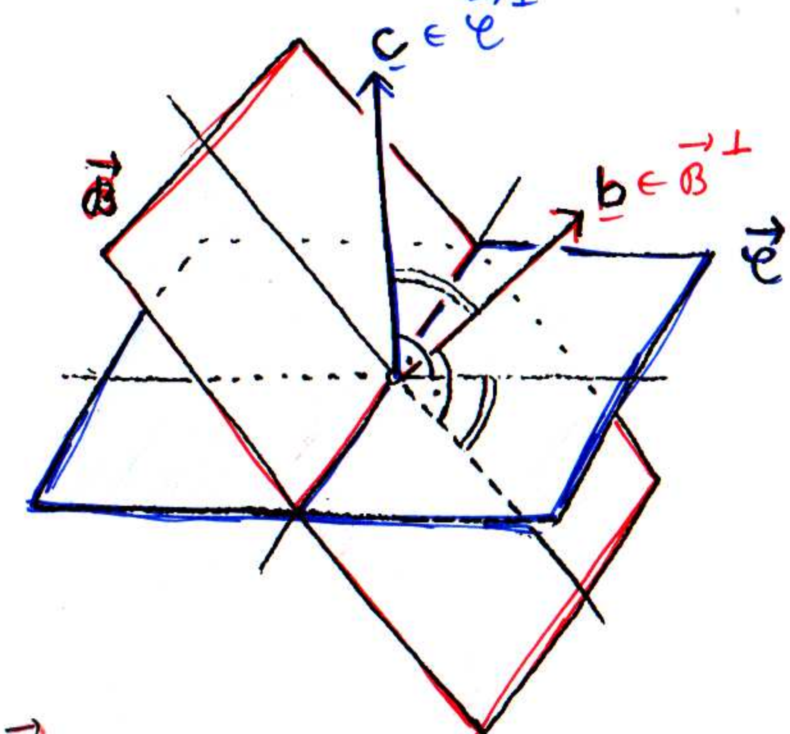
  tj. $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u}_e \cdot \underline{v}$.

- Tedy:

$$\cos\beta = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} = \frac{\underline{u}_e \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \leq \frac{\|\underline{u}_e\| \cdot \cancel{\|\underline{v}\|}}{\|\underline{u}\| \cdot \cancel{\|\underline{v}\|}} = \cos\alpha. \quad \blacksquare$$

$\leq$: Cauchyho-Schwarzova nerovnost

ZKRATKY

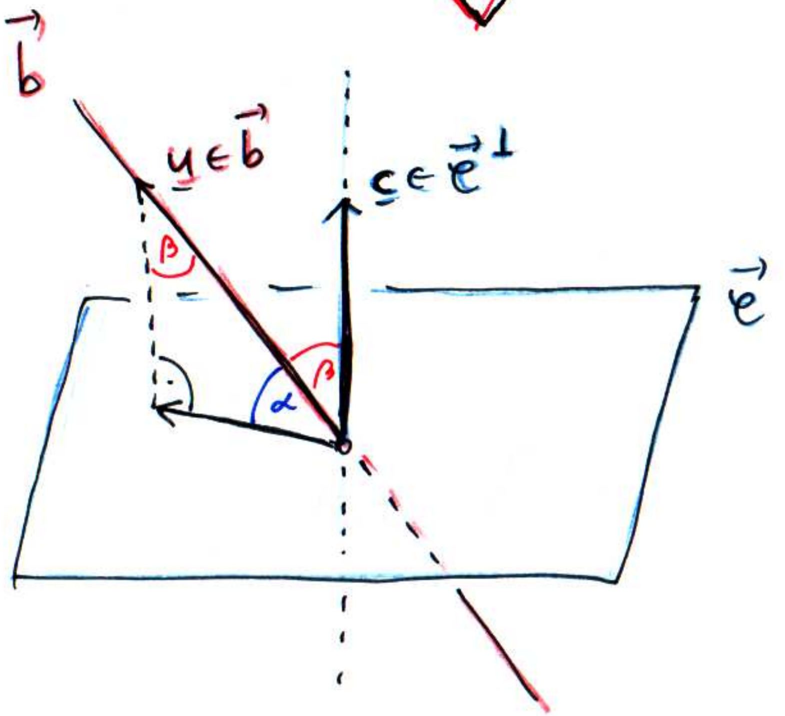


← DVĚ NAD-ROVINY:

$$\boxed{\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \sphericalangle(\underline{b}, \underline{c})}$$

↑ ↑ normály

$\dim \vec{\mathcal{B}}^{\perp} = \dim \vec{\mathcal{E}}^{\perp} = 1$



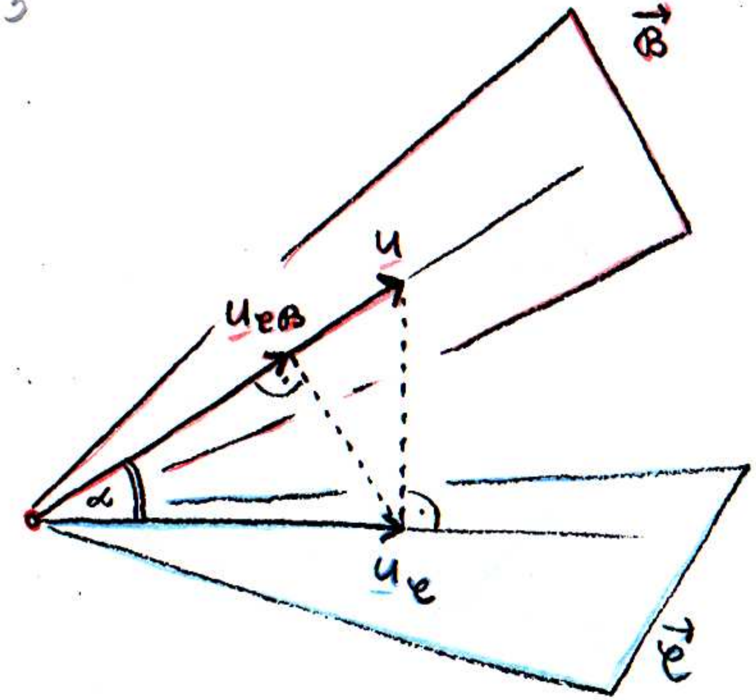
$\alpha + \beta = 90^{\circ}$

← PŘÍMKA a NAD-ROVINA:

$$\boxed{\cos \beta = \sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{c}|}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{c}\|}}$$

↑ normála $\mathcal{E}$

GEOM. CHARAKTERIZACE OBECNĚ



Pokud $\measuredangle(B, e) = \measuredangle(\underline{u}, \underline{v}) =: \alpha$

pro $\underline{u} \in \vec{B}$ a $\underline{v} \in \vec{e}$,

potom taky (viz s. 111)

$$\alpha = \measuredangle(\underline{u}, \underline{u}_e) = \measuredangle(\underline{v}, \underline{v}_B)$$

kolmý průmět $\underline{u}$ do $\vec{e}$

kolmý průmět $\underline{v}$ do $\vec{B}$

$\underline{u}_e$ = násobek $\underline{v}$ a

$\underline{v}_B$ = násobek $\underline{u}$ . . .

. . . stačí tedy popsat (nějak chytře) složení kolmých projekcí $\vec{B} \longrightarrow \vec{e} \longrightarrow \vec{B}$ a najít CHARAKTERISTICKÉ (VLASTNÍ) VEKTORY tohoto zobrazení . . .

← (viz dále . . .)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

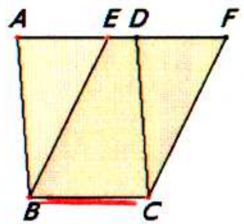
EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

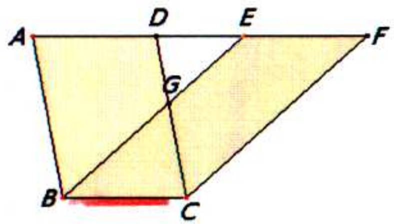
- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů
- obsahy a objemy

Opakování

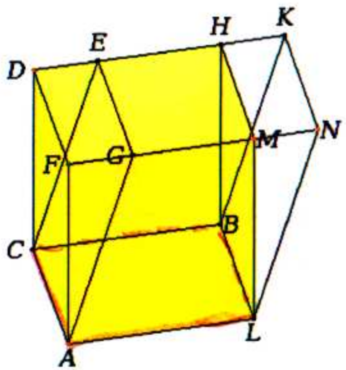
OBSAHY a OBJEMY

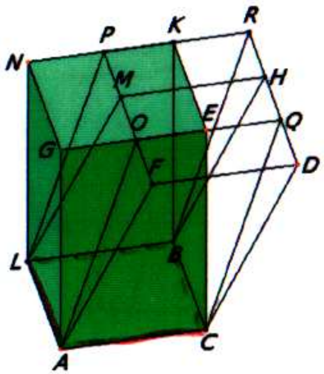
- Rovnoběžníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.





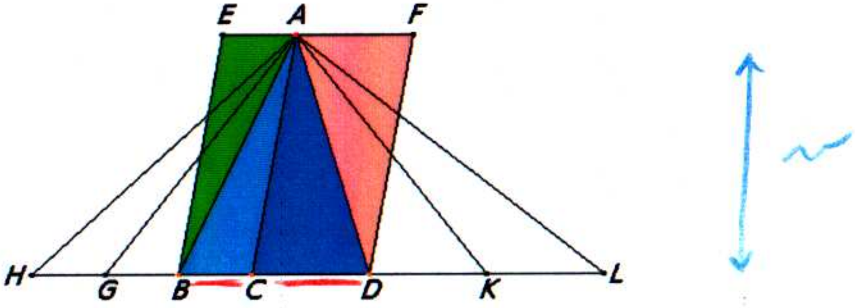
- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.



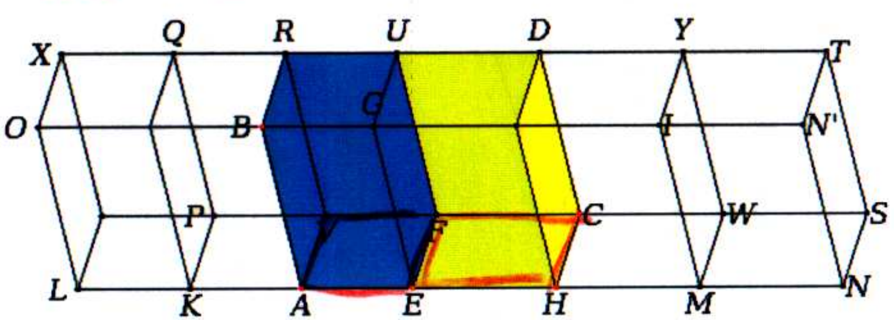


115 # Opakování

- Poměr obsahů rovnoběžníků se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



116

Opakování

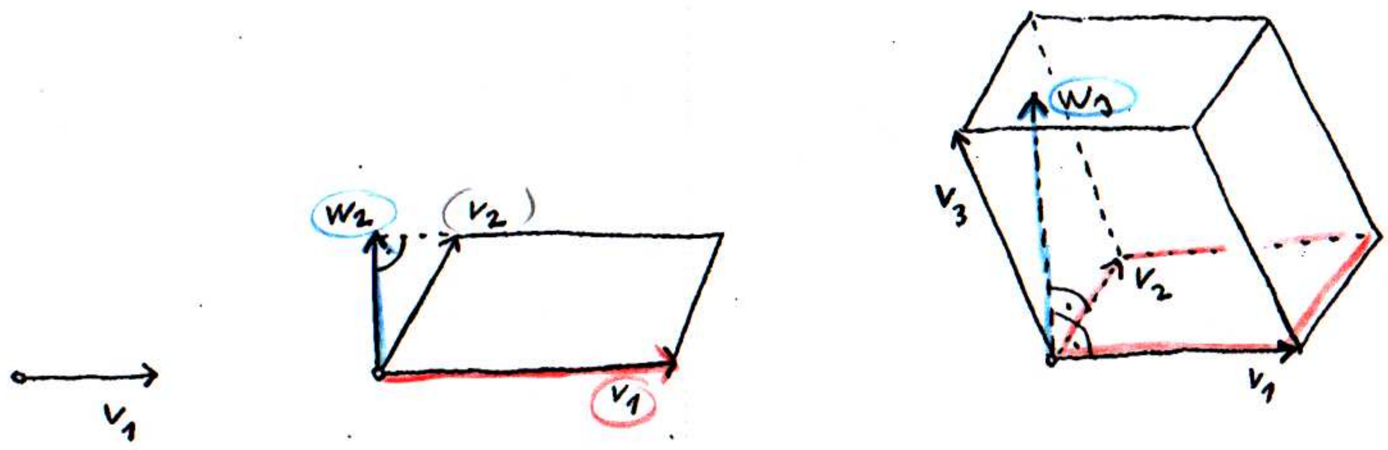
"vzorečky"

Odtud:

- $S = a \cdot v$,
  kde S = obsah rovnoběžníku, a = velikost strany, v = velikost odp. výšky,
- $V = S \cdot w$,
  kde V = objem rovnoběžnostěnu, S = obsah stěny, w = velikost odp. výšky.

"objem = základna · výška"

Obecně pomocí vektorů



Def.

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$, takové, že

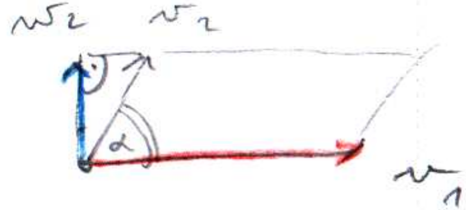
"základna" "výška"

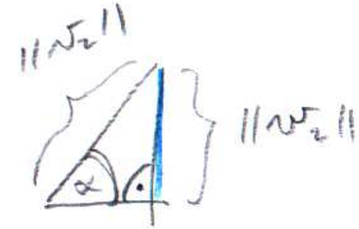
- $V(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$,
  kde $\mathbf{w}_2 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_2$ do $\mathbf{v}_1^\perp$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$,
  kde $\mathbf{w}_3 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_3$ do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- atd...

objem .... $V \times V \times \dots \to \mathbb{R}_+$

118

Počítání





- Pro $k = 2$ např.:

$\|v_2\|$

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, ... (umíme) ✓

soustava lin. rovnic (umíme) ✓

- Pro obecné k např.:
  – podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu,
  – podle vlastností, tj. pomocí **determinantu**, vektorového součinu, apod. ...

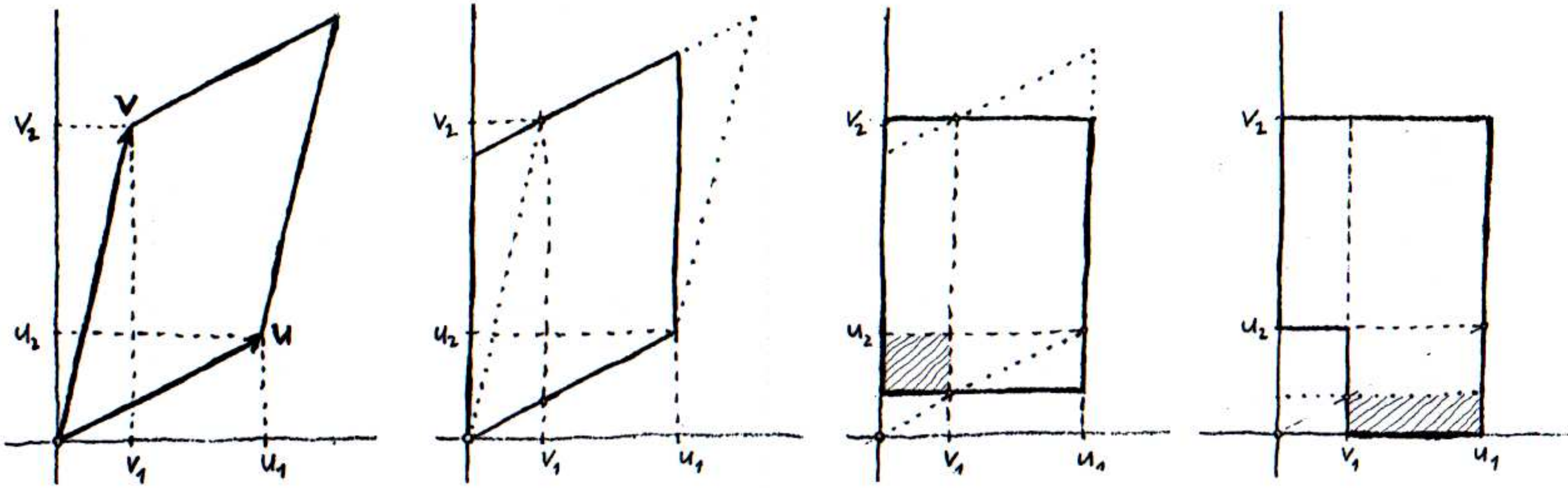
(částečně umíme) ✓ (naučíme) při- !

"vzorečky"

119

Úvod (naivně)

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ...

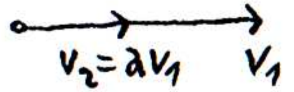


... je roven absolutní hodnotě determinantu $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

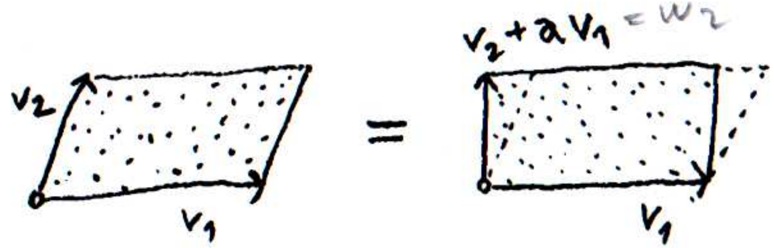
Úvod (koncepčně)

Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:

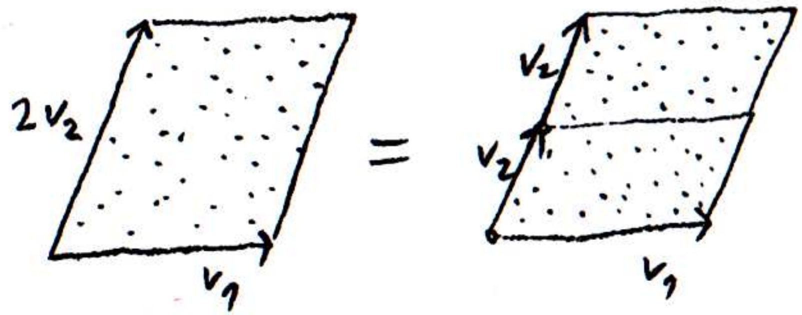


("výška" = 0)

$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$



$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \overset{!}{=} V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \overset{0}{\cancel{V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1)}} = \\ = V(\mathbf{v}_1, \underbrace{\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1}_{w_2})$$



$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = \underset{\geq 0}{|b|} \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

$\boxed{\text{objem} \; \ldots \; V \times V \times \ldots \longrightarrow \mathbb{R}_+}$ ...

121

Determinant

Determinant chápeme

buď $\underbrace{\mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R}}$ nebo $\boxed{\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R}, \quad \text{kde } V = \mathbb{R}^n.}$!!!

Definice ....[1]

Vlastnosti základní:

- **anti-symetrické**

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots)$$

- **multi-lineární**

v každé složce

$$\det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \dots) = b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$$

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$$

Vlastnosti odvozené:

$$\underbrace{\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \dots)}^{\det(v_1, v_2, \dots) + a \cdot \cancel{\det(v_1, v_1, \dots)}^{0}} = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$$

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé}$$

[1] viz algebra (DÚ)

Vnější součin

det : $V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ závisí na souřadnicovém vyjádření vektorů, tj. na zvolené bázi. . . [2]

Pro ortonormální báze je výsledek tentýž:

Def.

Vnějším součinem ***n***-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ v ***n***-rozměrném eukleidovském prostoru je determinant matice tvořené souřadnicemi těchto vektorů vzhledem k nějaké ortonormální bázi; ozn.

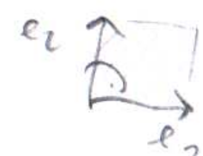
$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

zejména pro lib. ON bázi $(e_1, \dots, e_n)$ je $[e_1, \dots, e_n] = \underline{1}$ = objem jednotkové n-krychle

Z předchozího plyne, že

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ ? & \text{pro } k < n \end{cases}$$

viz dále . . . !



[2] viz matice přechodu a Cauchyova věta (o součinu determinantů) ← $\det(P.M) = \det(P).\det(M)$

123
Kouzlo ($k = 2$)

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

(str. 118)

přičemž

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{(v_1 . v_2)^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2}} = \frac{\sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - (v_1 . v_2)^2}}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cdots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2)^2} \overset{!}{=} \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase determinant, ...