124

Kouzlo (obecně)

$k = $ lib.!

…tzv. *Gramův determinant*, ozn.

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

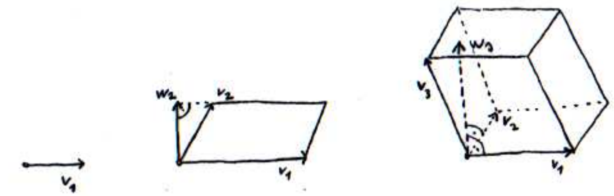
Věta

Pro libovolnou k-tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}.$$

125

Kouzlo (důkaz)



1) Pro navzájem kolmé vektory (kvádr):

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2 = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)^2.$$

(zejména ... $\geqq 0$!)

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$:

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

plyne z vlastností
- skal. součinu
- determinantu !

(s. 121)

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3). \quad \square$$

ÚVOD, PŘEHLED

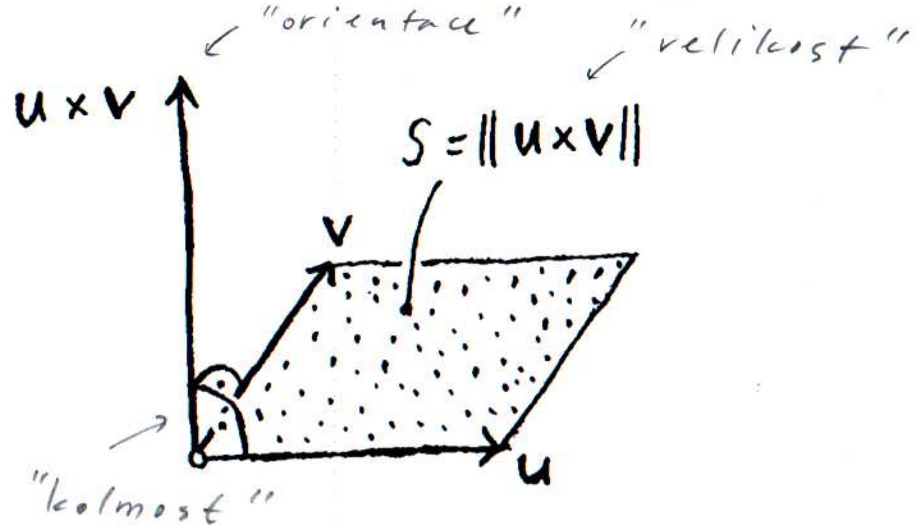
AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů
- obsahy a objemy
- vektorový součin

Vektorový součin ($n = 3$)

Ze SŠ známe jako operaci $V \times V \to V$ s několika užitečnými vlastnostmi. . .



Sice nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

127
Vektorový součin (obecně)

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

lib.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3.$$

$(-1)^{1+3}$ $(-1)^{2+3}$ ...

Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

skalární součin

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{x},$$ [3]

vnější součin vektorový součin

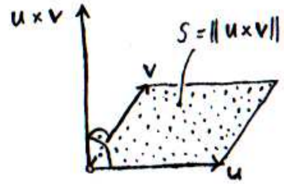
Obecná definice:

> *Vektorovým součinem* $(\boldsymbol{n-1})$-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující
>
> $$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{x}$$
>
> pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

[3] nalevo vnější součin, napravo tzv. smíšený součin

128

Vektorový součin (vlastnosti)



Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

(a) ▸ *Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení* $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \to V$.

(b) ▸ $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně závislé.*

orientace (c) ▸ $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně nezávislé* $\Longrightarrow (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ *je kladná báze.*

kolmost (d) ▸ $\mathbf{w}$ *je kolmý ke všem vektorům* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$.

velikost (e) ▸ $\|\mathbf{w}\| = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$. = objem ....

Důkaz.

Všechno plyne z definující rovnosti a vlastností determinantu... □

129 Vlastnosti vekt. součinu — DŮKAZ:

(*) def. rovnost $[v_1, \dots, v_{n-1}, x] = w \cdot x$, kde $x \in V$ lib.

vnější součin (determinant)

skalární součin

(a) vnější součin = anti-sym. + multi-lin. $\Rightarrow$ vektorový součin TAKY

(b) $[v_1, \dots, v_{n-1}, x] = 0 \quad \forall x \in V \overset{\text{det.}}{\Longleftrightarrow} v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. ZÁVISLÉ

$w \cdot x = 0 \quad \forall x \in V \overset{\text{skal. souč.}}{\Longleftrightarrow} w = o$

(c) $v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. NEZÁVISLÉ $\overset{(b)}{\Longrightarrow} w \neq o \Rightarrow \dots$ báze

$[v_1, \dots, v_{n-1}, w] \overset{(*)}{=} w \cdot w \overset{\text{skal. souč.}}{>} 0$

(d) ~~fix~~ $w \cdot v_i \overset{(*)}{=} [v_1, \dots, v_{n-1}, v_i] \overset{\text{det.}}{=} 0$, pro lib. i

(e) $\|w\|^{\cancel{2}} = w \cdot w \overset{(*)}{=} [v_1, \dots, v_{n-1}, w] \overset{(c)}{=} V(v_1, \dots, v_{n-1}, w) \overset{(d)}{=}$

$= \underbrace{V(v_1, \dots, v_{n-1})}_{\text{základna}} \cdot \underbrace{\cancel{\|w\|}}_{\text{výška}}$

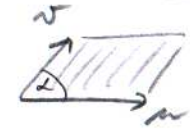
ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů
- obsahy a objemy
- vektorový součin
- poznámky, shrnutí & výhled

Poznámky

obsah 

(viz s. 118)

- K vektorovému součinu pro $n = 3$:

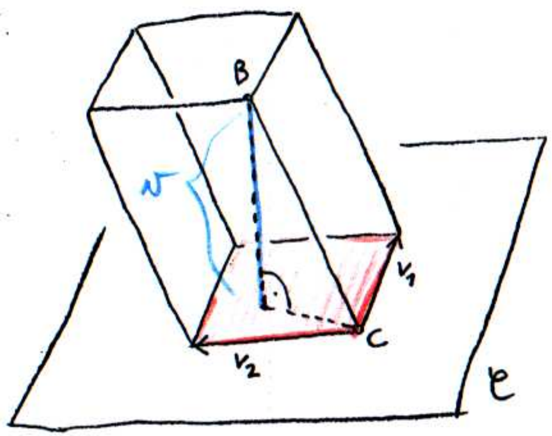
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha,$$

kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

- K aplikacím: vzdálenosti podprostorů bez řešení soustav rovnic. . .

– funguje báječně pro B = bod a $\mathcal{E}$ = cokoliv :

– potřeba drobná ostražitost pokud $\vec{B} \cap \vec{\mathcal{E}} \neq \{o\}$ . . .



objem celého

výška rovnoběžnostěn

$$v(B,C) = \frac{V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{BC})}{V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$$

objem podstavy

(viz s. 104)

131. Ještě pro $n=3$:

vekt. součin $V \times V \to V$ je binární operace na V, která NENÍ asociativní!

- tj. obecně neplatí
$$(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$$

- zato platí tzv. Jacobiho identita:
$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$$

($\rightsquigarrow$ viz tzv. Lieovy algebry)

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE — SHRNUTÍ

- (Těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor V ⇝ ⇝ afinní prostor se zaměřením V ...)
- Navíc SKALÁRNÍ SOUČIN $V \times V \to \mathbb{R}$ ⇝ ⇝ velikost vektoru, kolmost a odchylka vektorů, objem rovnoběžnostěnu, ...

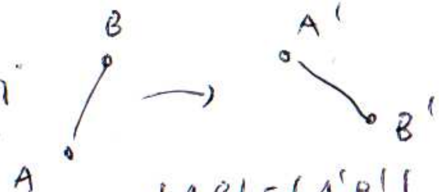
- VZDÁLENOST bodů a obecných podprostorů ⇝ definice, geom. charakterizace, souvislosti, zkratky ...
- OBJEMY rovnoběžnostěnů apod. ⇝ definice, DETERMINANTY (vnější součin, Gramův), vektorový součin, ...
- KOLMOST přímek a obecných podprostorů ⇝ definice, záludnosti, ...
- ODCHYLKA přímek a obecných podprostorů ⇝ definice, geom. charakterizace, zkratky, ...

SHODNÁ ZOBRAZENÍ

od jakživa víme, že

SHODNÁ zobr. zachovávají

• vzdálenosti



$|AB| = |A'B'|$

(tj. shodnosti úseček)

shodné

⇓ ⇓

poměry… podobné   objemy ekvi-afinní

⇓ ⇓

afinní

⇓

⋮

letos jsme se naučili, jak algebraicky popsat **AFINNÍ** zobr … (viz s. 27)

Jak v tomto duchu vymezíme shodná (resp. podobná, ekvi-afinní) mezi afinními ??

- **AFINNÍ** ZOBR. ... $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$

obraz jednoho bodu

$$X \mapsto X' = \boxed{O'} + \boxed{\vec{f}(\vec{OX})}$$

(viz s. 28)

indukované lineární zobr.

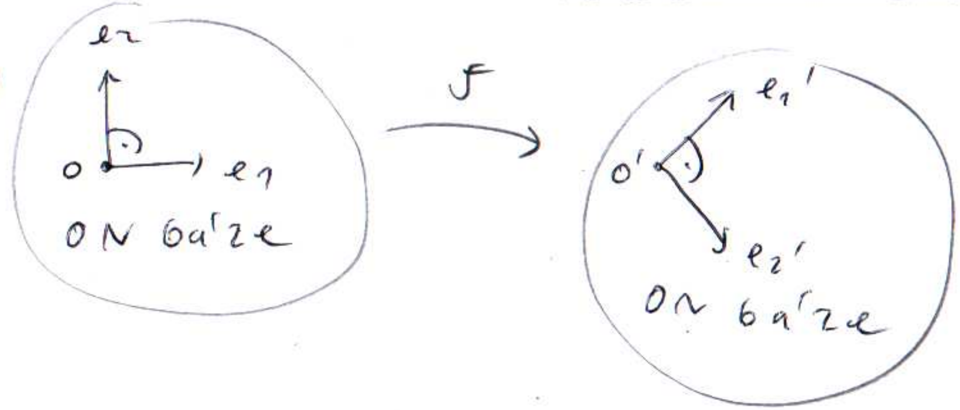
tj. vzhledem k souř. soust.:

$$\underset{X'}{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} = \boxed{\underset{O'}{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}} + \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{e_1'\ e_2' \dots} \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}}$$

matice zobr. $\vec{f}$ ... ozn. D

- předp. vše vyjádřeno vzhledem k ON souř. soust.

- zobr. je **SHODNÉ** $\iff$



$\iff$ $e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots = 1$

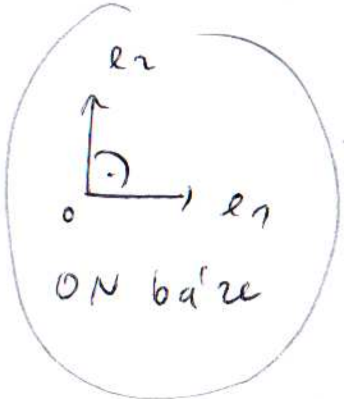
$e_1' \cdot e_2' = \dots = 0$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}_{D^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' & \vline & e_2' & \vline & \dots \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{E}$$

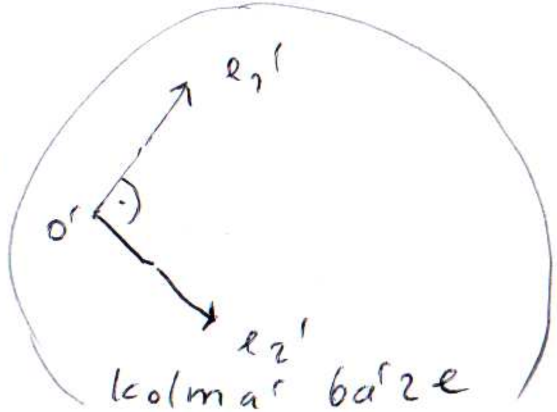
$$\boxed{D^T \cdot D = E}$$

135 PODOBNÉ:

- zobr. je **PODOBNÉ** $\Leftrightarrow$



$\xrightarrow{f}$



$\|e_1'\| = \|e_2'\| =: k$

koeficient podobnosti

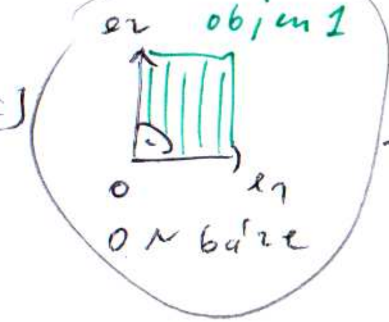
$\Leftrightarrow \; e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots = k^2$

$e_1' \cdot e_2' = \dots\dots = 0$

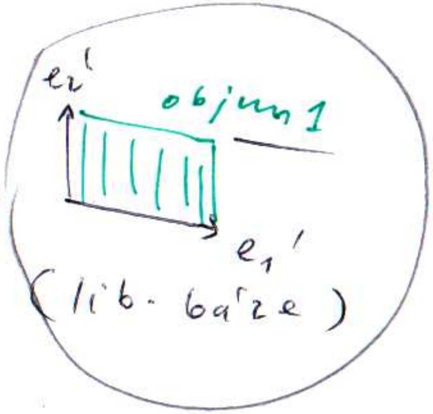
$$\Leftrightarrow \; \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}_{D^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \,|\, e_2' \,|\, \dots \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} k^2 & 0 & \dots \\ 0 & k^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{k^2 E}$$

$$\boxed{D^T \cdot D = k^2 E}$$

- zobr. je **EKVI-AFINNÍ** $\Leftrightarrow$



$\xrightarrow{f}$



$$\Leftrightarrow \; \det \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \cdot e_1' & e_1' \cdot e_2' & \dots \\ e_2' \cdot e_1' & e_2' \cdot e_2' & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice}} = 1$$

$$\text{Gramova matice} = \begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' \,|\, e_2' \,|\, \dots \end{pmatrix} = D^T \cdot D \;\checkmark$$

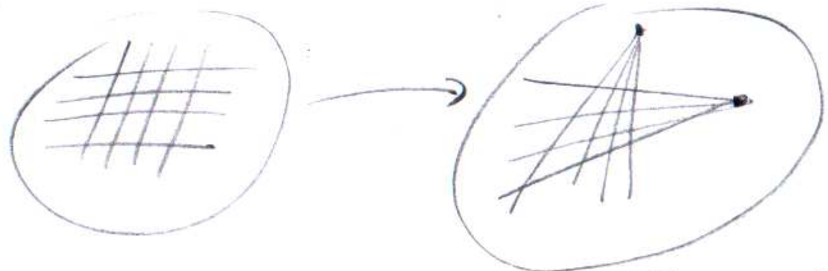
$$\Leftrightarrow \; \boxed{\det(D^T \cdot D) = 1}$$

VÝHLED

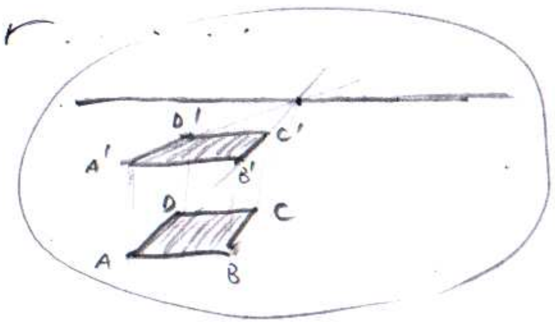
... tady budeme navazovat příští semestr.

... zejména se naučíme alg. popis:

- PROJEKTIVNÍHO rozšíření af. prostoru a odpovídající popis PROJEKTIVNÍCH zobrazení ...



- vymezení AFINNÍCH zobr. v tomto rámci ...
- rozpoznávat základní zobr. ...



- apod. ...