# EKVIVALENTNÍ POPIS PODPROSTORU:

- podmnož. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ je af. podprostor

$\Updownarrow$ def

- $\mathcal{B}$ je af. prostor ...

$\Updownarrow$

- "$\mathcal{B} = B + U$", kde $B \in \mathcal{B}$ a $U \subseteq V$ ... vektorový podpr.

$\Updownarrow$

- $U := \{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathcal{B} \} \subseteq V$ ... vektorový podpr.

$\Updownarrow$

- pr. 1.6. $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow$ priamka $AB \subseteq \mathcal{B}$

DODATEK : $\dim \mathcal{B} := \dim U$

- $\dim$ 0 .... "body"
- 1 .... "přímky"
- 2 .... "roviny"

$\vdots$

- $n-1$ .... "nad-rovina"; $n = \dim \mathcal{A} = \dim V$

max. možný podprostor (různý od $\mathcal{A}$)

# příklady

- z minule $\mathcal{A} = \{$ řešení soustavy <u>lin.</u> rovnic $2x_1 + x_2 = 3$, $3x_1 - x_3 = 4$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

  ↑ 1-dim <u>afinní podprostor</u> ve stand. af. prostoru $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$

- z minule $\mathcal{A} = \{$ řešení <u>lin.</u> dif. rovnice $y'' - 4y' + 5y = 10\}$

  ↑ 2-dim <u>afinní podprostor</u> v "prostoru všech funkcí" ($\infty$ - dim)

- dále např.

  $\mathcal{B} = \{$ <u>konstantní</u> řešení $y'' - 4y' + 5y = 10\}$

  $= \{y = 2\}$ ← 0-dim af. podpr. v $\mathcal{A}$ ↑ (resp. v 1-dim podprostoru konstantních fcí)

# ÚVOD, PŘEHLED

# AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení

# AFINNÍ ZOBRAZENÍ

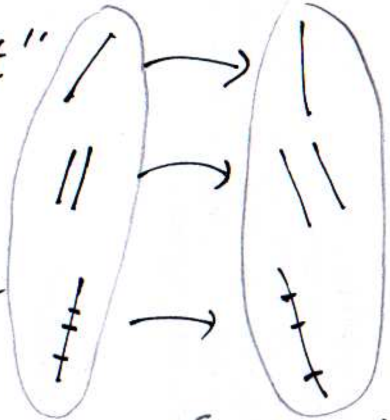
- z loňské geometrie víme:

af. zobr. zachovává

(a) "přímkovitost"

(b) rovnoběžnost

(c) poměry trojic kolin. bodů



$$a \xrightarrow{f} a'$$

(... pokud se zrovna / nezobrazují do • )

- podle obecné logiky čekáme:

af. zobr. zachovává ...

... AFINNÍ STRUKTURU

tj.:

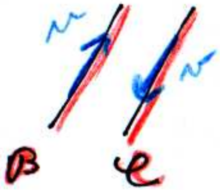
$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & \times & a \arrow[d, "f"] \arrow[r] & V \arrow[d, dashed, "??"] \\ a' & \times & a' \arrow[r] & V' \end{tikzcd}$$

co by to jako mělo být a jak skloubit s předchozím ?

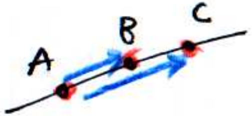
## ZA PRVÉ:

- vlastnostem (a) – (c) rozumíme v OBECNÉM AF. PROSTORU:

(a) přímka  ... podpr. dim 1

(b) rovnoběžnost  ... $\vec{B} = \vec{C}$

(c) poměr

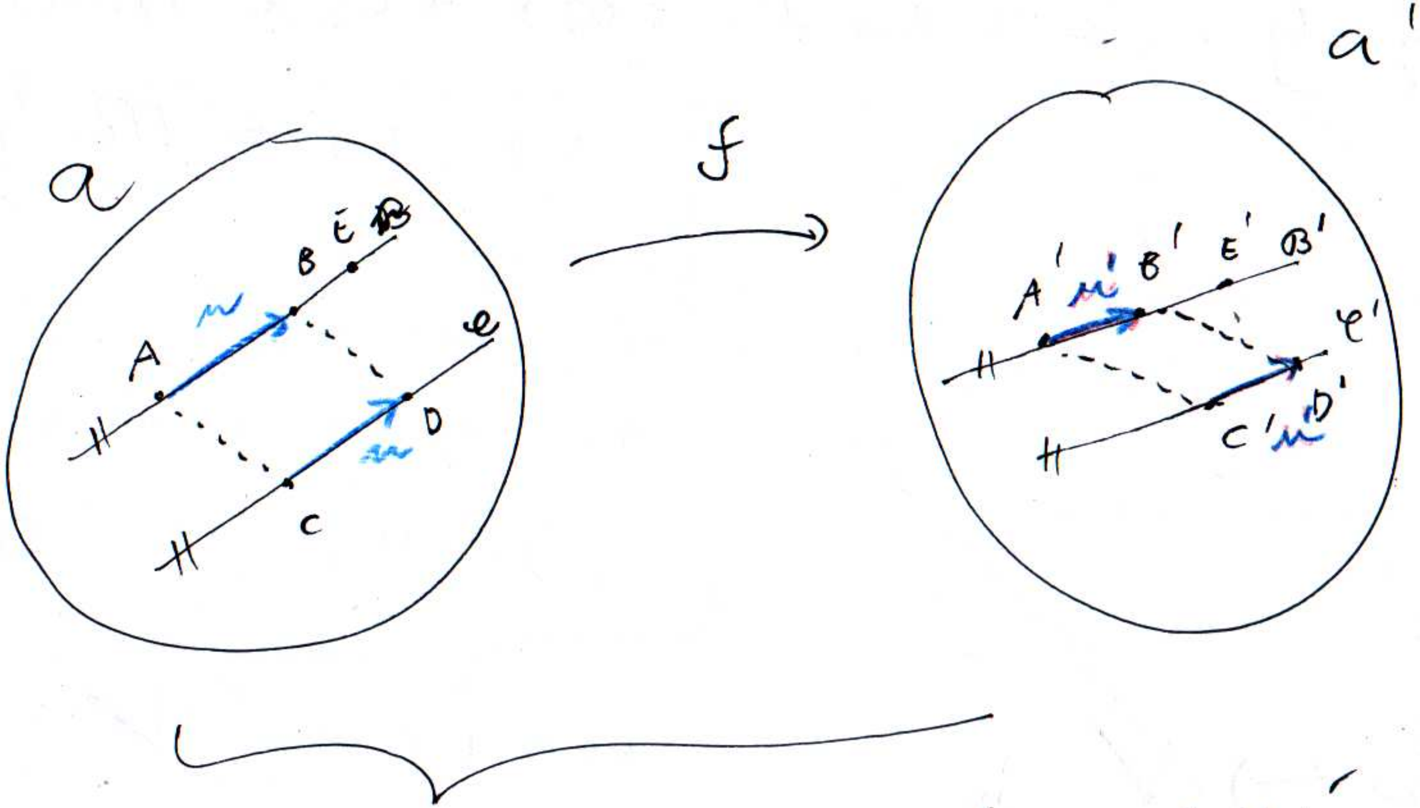



... $d = $ " $\frac{\vec{AC}}{\vec{AB}}$ " .... $\vec{AC} = d \cdot \vec{AB}$

$\in \mathbb{R}$

ZA DRUHÉ:

předp... $f : \mathcal{a} \to \mathcal{a}'$ ...... afinní (podle a)-c))




$f$ ..... indukuje zobrazení mezi zaměřeními $\vec{f} : \vec{\mathcal{a}} \to \vec{\mathcal{a}}'$,

které je navíc LINEÁRNÍ!

Tj. • $u = \overrightarrow{AB} \longmapsto \overrightarrow{A'B'} = u'$ ... dobře def. obraz
$u = \overrightarrow{CD} \longmapsto \overrightarrow{C'D'} = u'$ **vektoru** (nezávisle na určující dvojici **bodů**)

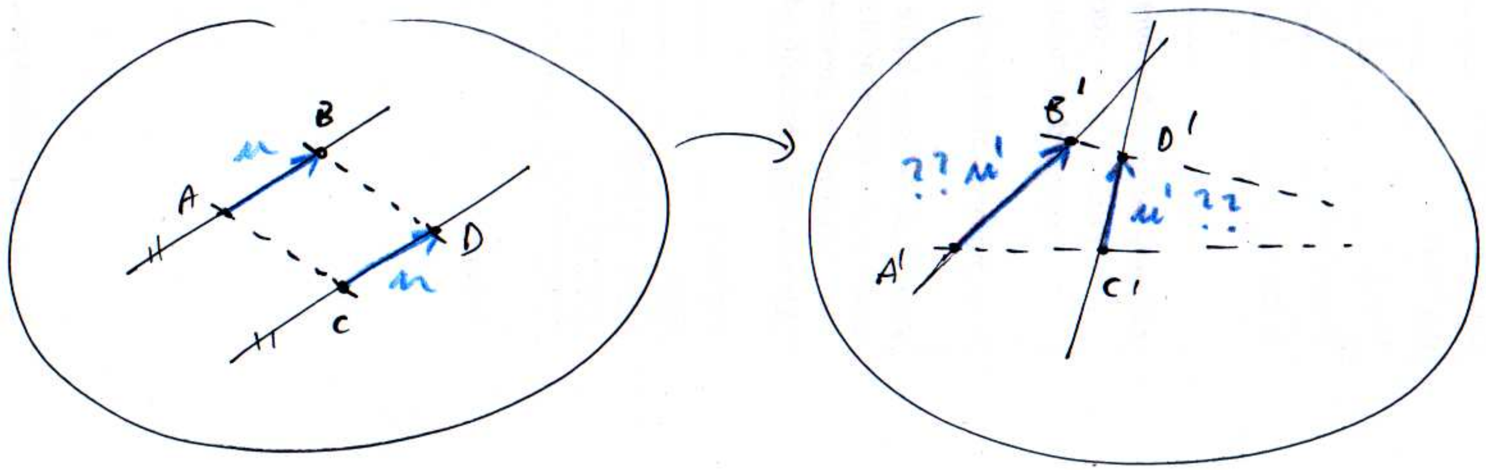
• $\overrightarrow{AE} = d \cdot \overrightarrow{AB} \longmapsto \overrightarrow{A'E'} = d \cdot \overrightarrow{A'B'}$

• $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \longmapsto \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}$

$\Big\}$ ... LINEÁRNÍ

---

Nic z toho nefunguje např. pro obecná PROJEKTIVNÍ zobr.:



27 ZA TŘETÍ:

EKVIVALENTNÍ DEF. AF. ZOBR:

$f : a \to a'$ je AFINNÍ, pokud ~~to~~ zachovává afinní strukturu, tj. ex. induk. zobr. LINEÁRNÍ $\vec{f} : \vec{a} \to \vec{a}'$ tak, že

$$\begin{tikzcd} a \times a \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[d, shift left=8ex, "f"] & \vec{a} = V \arrow[d, dashed, "\vec{f}"] \\ a' \times a' \arrow[r] & \vec{a}' = V' \end{tikzcd}$$

... komutuje.

konkrétně ... $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$

neboli ... $(\overrightarrow{AB})' = \overrightarrow{A'B'}$

**POZNÁMKA**

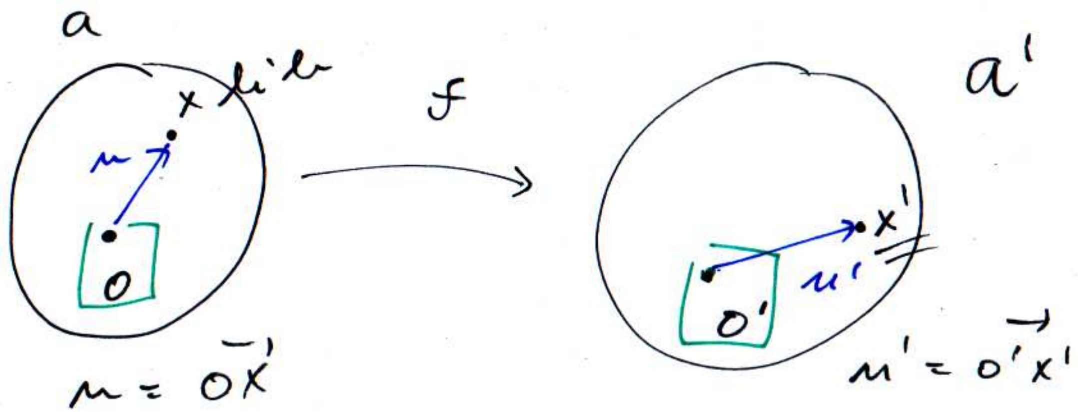
- lin. zobr. $\vec{a} \to \vec{a}'$ NEURČUJE

  af. zobr $a \to a'$ úplně ...

  (viz např. posunutí)

- ALE s obrazem jednoho dalšího bodu

ANO:




$$\vec{f}(\vec{OX}) = \vec{O'X'}$$

obraz jednoho bodu

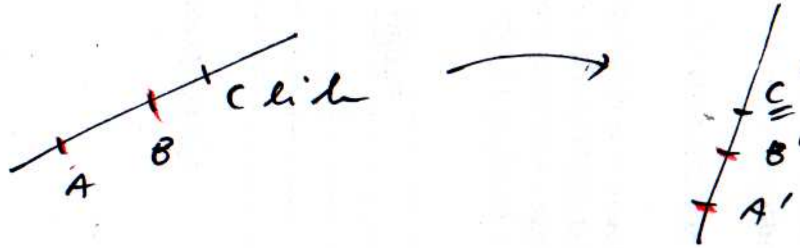
LIN. ČÁST

$$f : \underset{\text{lib}}{X} \longmapsto \boxed{X' = \boxed{O'} + \boxed{\vec{f}(\vec{OX})}}$$

# VĚTA O URČENOSTI AF. 208R.

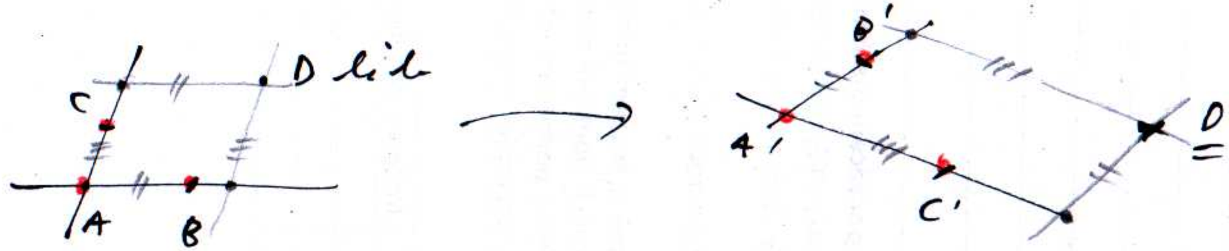
• Vloni ... z vlastností (a) – (c) plyne ...

$m = \boxed{1}$




... stačí znát obrazy $\boxed{2}$ bodů

$m = \boxed{2}$




... stačí ...
... $\boxed{3}$ bodů

.
.
.

etc.

OBECNĚ:

AFINNÍ ZOBR. $f: a \to a'$

dim $n$

je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

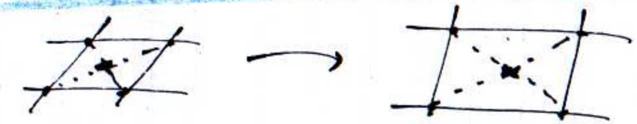
(Důkaz ...


$\vec{f}: \vec{a} \to \vec{a}'$ je určeno obrazem báze, a ta má $n$ prvků)

# POZNÁMKA / VÝHLED

- vlastnosti (a) – (c) nejsou úplně nezávislé:

  $\boxed{\text{Pokud (a), potom (b)} \Longleftrightarrow \text{(c)}.}$

  (  )

- ve skutečnosti platí ještě něco mnohem silnějšího:

  Pokud bijektivní zobr. zach. (a), potom taky (b) a (c) !!

Tzv. "základní věta afinní geometrie".
( viz časem jako důsledek základní věty projektivní geom... )