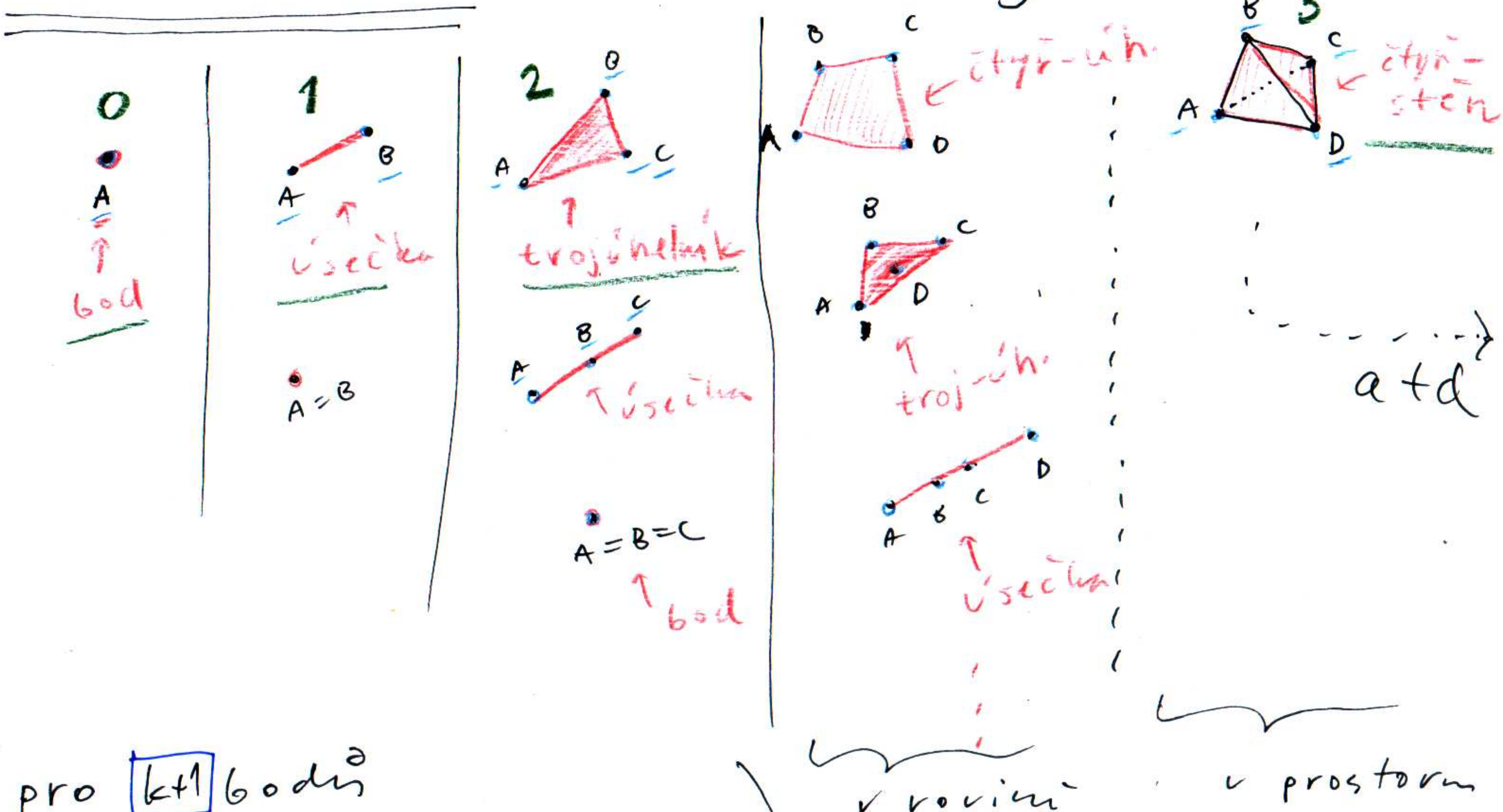
KONVEXNÍ OBAL konečné množiny bodů



(pro $\boxed{k+1}$ bodů
v OBECNÉ POLOZE
⇝ $\boxed{k}$-rozměrný SIMPLEX)

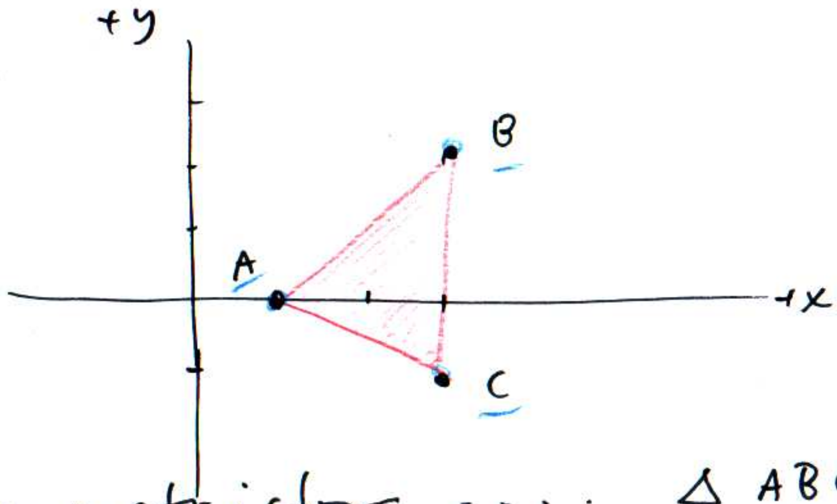
62 JAK POPSAT ANALYTICKY ?

PŘ.

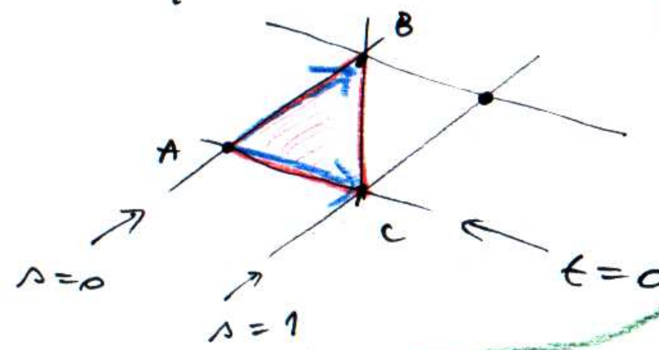
$A = [1, 0]$

$B = [3, 2]$

$C = [3, -1]$



ⓐ parametricky .... $\triangle ABC = \{ X = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \mid t \in [0,1],\ s \in [0,1],\ t+s \in [0,1] \}$!

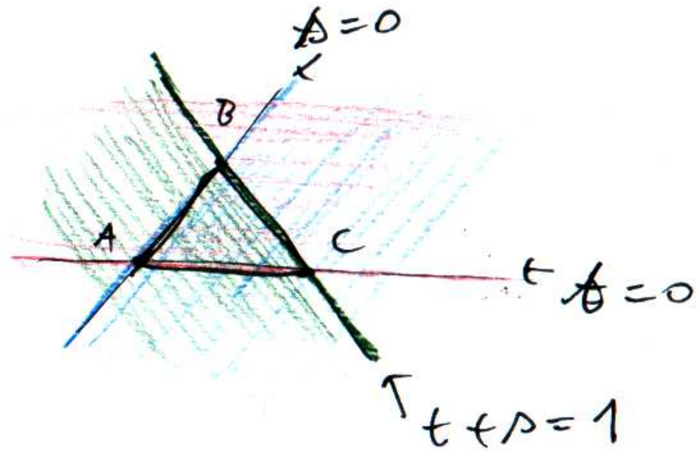


ekvivalentní

$(1 \geq)\ t \geq 0$

$(1 \geq)\ s \geq 0$

$(0 \leq)\ t + s \leq 1$



funguje obecně (stačí dosadit A, B, C)
lib. dim

63 (b) <u>rovnicově</u>

přímka $AB = \{ x - y = 1 \} \rightsquigarrow$ polo-rovina AB obs. $C = \{ x - y \boxed{\geq} 1 \}$

— // — $BC = \{ x = 3 \} \rightsquigarrow \dots\dots \{ x \boxed{\leq} 3 \}$

— // — $AC = \{ x + 2y = 1 \} \rightsquigarrow \dots\dots \{ x + 2y \boxed{\geq} 1 \}$

$$\triangle ABC = \left\{ \begin{array}{r} x - y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 1 \end{array} \right\}$$

takto pouze v <u>rovině</u> (přímka na hranici popsána jednou rovnicí..)

c) pomocí tzv. BARYCENTRICKÝCH souřadnic

$$\triangle ABC = \left\{ \text{"}X = t_A A + t_B B + t_C C\text{"} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_A + t_B + t_C = 1 \\ t_A \geqq 0 \\ t_B \geqq 0 \\ t_C \geqq 0 \end{array} \right\}$$

VELMI UNIVERZÁLNÍ POPIS!

(pro lib. konvexní obal bodů
v lib. prostoru)

.... viz DÁLE

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů
- vzájemné polohy podprostorů
- příčky
- uspořádání, omezené podpr., konvexní množiny
- barycentrické souřadnice

BARYCENTRICKÉ SOUŘADNICE

~> BARYCENTRUM = TĚŽIŠTĚ

pro body na přímce AB:

$$\text{"}\, X = \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} B \,\text{"}$$

$t_A \qquad t_B$

$\boxed{t_A + t_B = 1}$!!

což znamená:

$$\boxed{X = P + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}, \text{ pro lib. } P}$$

$t_A \qquad t_B$

dosaď $P = A$

$$\boxed{X = A + \cancel{\tfrac{1}{3}\, o} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$

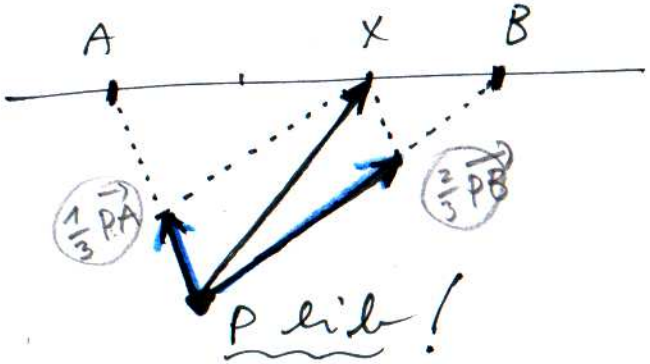
... std. parametrické vyjádření

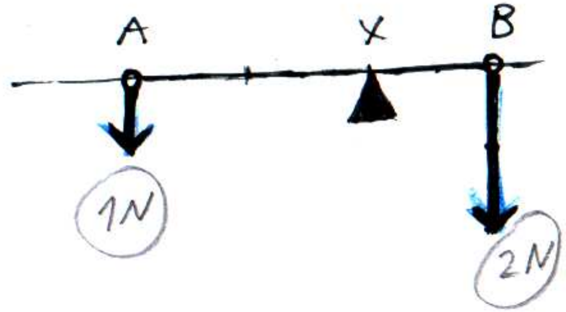
dosaď $P = X$

$$\boxed{o = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{XA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{XB}} \quad / \cdot 3$$

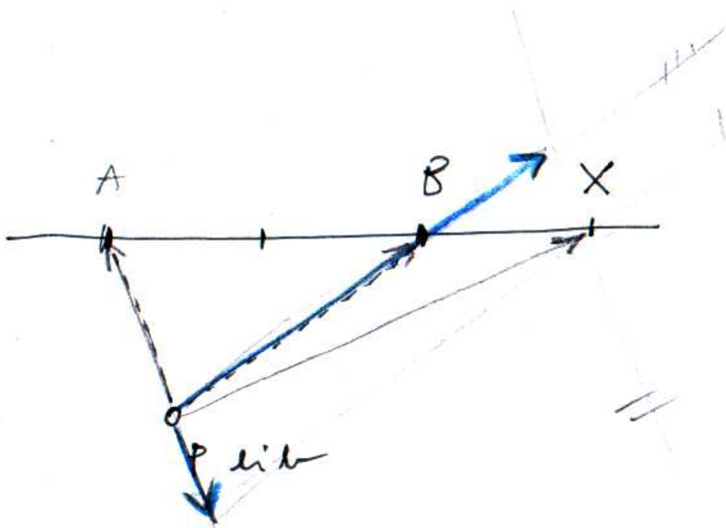
... "rovnováha na PÁCE"

$o = 1 \cdot \overrightarrow{XA} + 2 \cdot \overrightarrow{XB}$

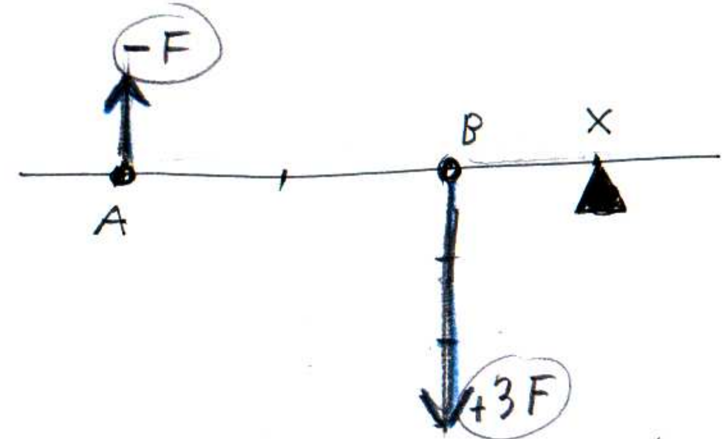




66 obdobné cvičení:



$$X = P + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{PA} + \tfrac{3}{2}\,\overrightarrow{PB}$$



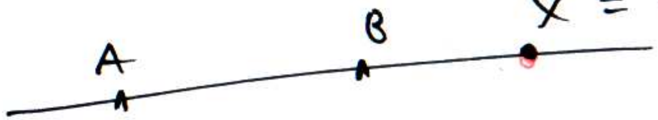
$$o = -1\,\overrightarrow{XA} + 3\,\overrightarrow{XB} \quad \Big/ : (-1+3).$$

$$o = -\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{XA} + \tfrac{3}{2}\,\overrightarrow{XB}$$

$$\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 1\right)$$

$$\text{"}X = -\tfrac{1}{2}A + \tfrac{3}{2}B\text{"}$$

67 $\boxed{\text{TEDY}}$



"$X = t_A A + t_B B$", $t_A + t_B = 1$

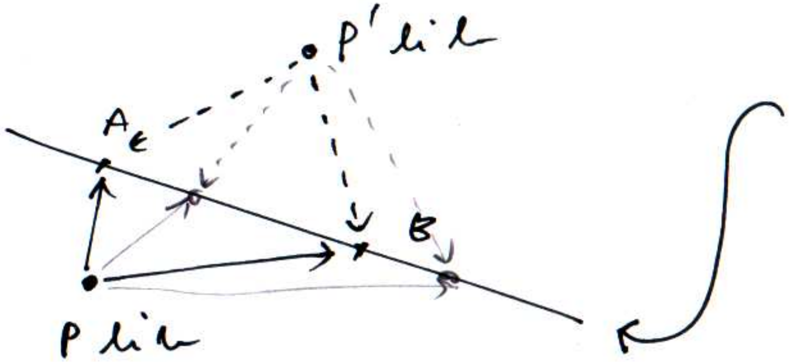
na přímce AB

DEF: * t_A, t_B ... BARYCENTRICKÉ SOUŘ. bodu X vzhledem k bodům A, B

//

(obyč.) souřadnice vektoru $\overrightarrow{PX}$ vzhledem k bázi $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ pro lib. P

POZN *



pro lib. $P \notin AB$ je přímka AB vskutku popsána podmínkou $t_A + t_B = 1$ ... !

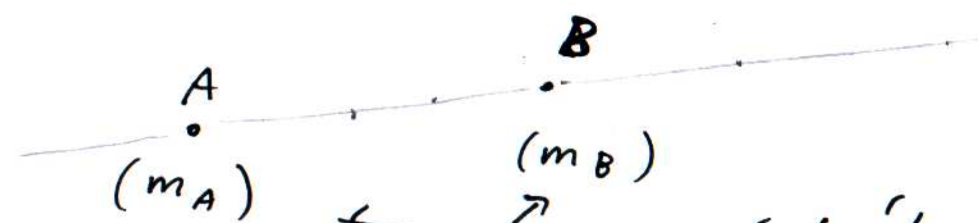
68 DALŠÍ POZN:

* "$X = t_A A + t_B B$", $t_A + t_B = 1$

$\Updownarrow$

X = TĚŽIŠTĚ hmotné soustavy s vahami t_A, t_B v bodech A, B

* OBECNĚJI ....



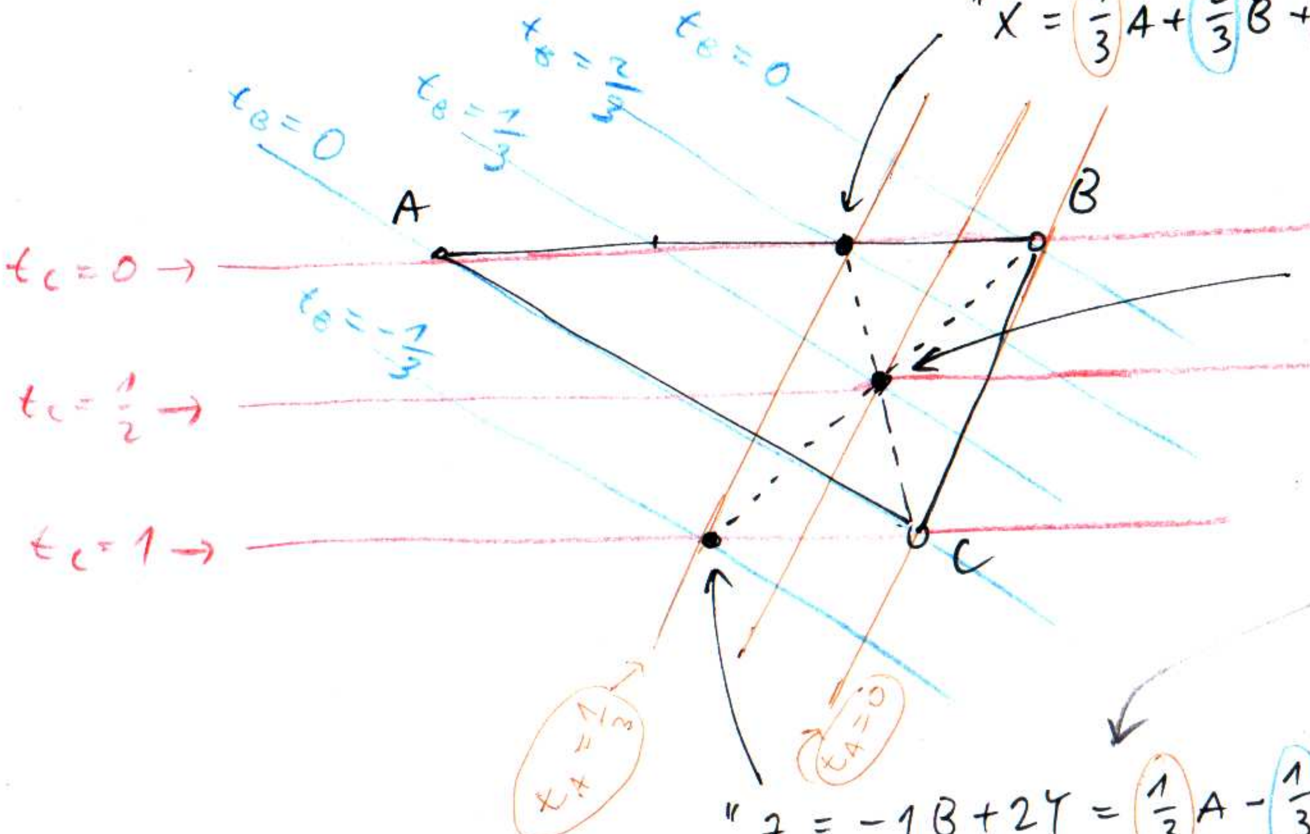
nemusí být $m_A + m_B = 1$
(těžiště určeno poměrem ...)

Baryc. souř. TĚŽIŠTĚ:

"$X = \underbrace{\frac{m_A}{m_A+m_B}}_{t_A} A + \underbrace{\frac{m_B}{m_A+m_B}}_{t_B} B$" $\longrightarrow$ $t_A + t_B = 1$

69 BARYC. SOUŘ. pro body v rovině ABC:

$$\text{"}X = \underset{t_A}{\frac{1}{3}}A + \underset{t_B}{\frac{2}{3}}B + \underset{t_C}{0}\,C\text{"}$$



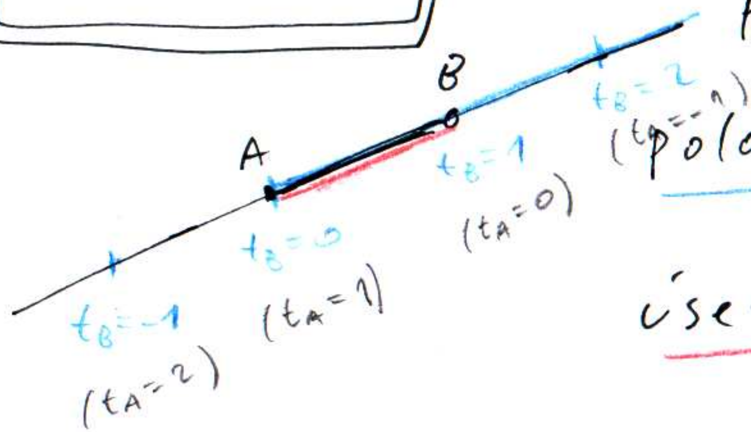
$$\text{"}Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}C = \underset{t_A}{\frac{1}{6}}A + \underset{t_B}{\frac{1}{3}}B + \underset{t_C}{\frac{1}{2}}C\text{"}$$

$$\text{"}Z = -1B + 2Y = \underset{t_A}{\frac{1}{3}}A - \underset{t_B}{\frac{1}{3}}B + \underset{t_C}{1}\,C\text{"}$$

všude $\boxed{t_A + t_B + t_C = 1}$

✓

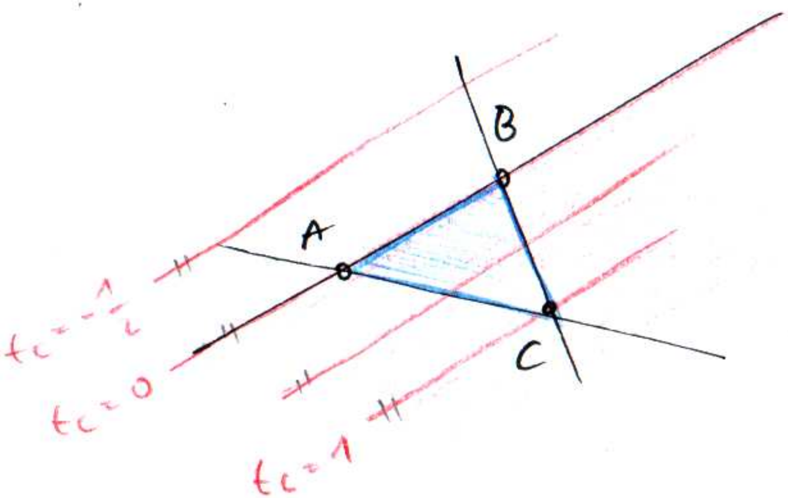
SHRNUTÍ



přímka $AB = \{\, \text{"}X = t_A A + t_B B\text{"} \mid t_A + t_B = 1 \,\}$

polo-přímka $AB = \{\, \text{—//—} \mid t_A + t_B = 1,\ t_B \geq 0 \,\}$

úsečka $AB = \{\, \text{—//—} \mid t_A + t_B = 1,\ t_A \geq 0,\ t_B \geq 0 \,\}$



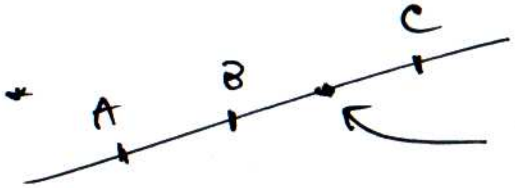
rovina $ABC = \{\, \text{"}X = t_A A + t_B B + t_C C\text{"} \mid t_A + t_B + t_C = 1 \,\}$

polo-rovina AB obs. C = { ... navíc $t_C \geq 0$ }

$\triangle ABC$ = { ... navíc $t_A \geq 0$, $t_B \geq 0$ }

(zde A, B, C v obecné poloze)

71 CO KDYŽ BODY A, B, C NEJSOU V OBECNÉ POLOZE?

* 

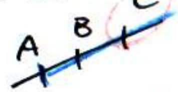
"$X = -A + 2B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C =$

$= \frac{1}{6}A + \frac{1}{4}B + \frac{7}{12}C = \ldots\ldots$"

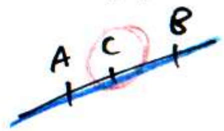
BARYC. SOUŘADNICE NEJSOU URČENY JEDNOZNAČNĚ!

* AVŠAK STÁLE PLATÍ (!!!):

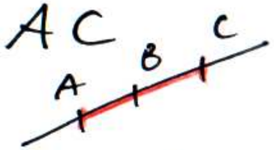
$\{$ "$X = t_A A + t_B B + t_C C$" $|\ t_A + t_B + t_C = 1 \}$ = přímka AB (= př. BC = př. AC)

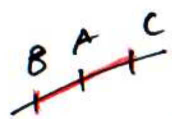
$\{$ —"— , navíc $t_C \geq 0 \}$ = polopřímka AC 

(resp. 

, 

)

$\{$ —"— , navíc $t_A, t_B, t_C \geq 0 \}$ = úsečka AC 

(resp. 

, 

)

OBECNĚ

Pro lib. body $A_1, A_2, \dots$ v lib. af. prostoru (v lib. poloze):

* afinní obal bodů $A_1, A_2, \dots$ =
  $= \{ \text{"}X = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots\text{"} \mid t_1 + t_2 + \dots = 1 \}$

* konvexní obal bodů $A_1, A_2, \dots$ =
  $= \{ \dots$ totéž, navíc podm. $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $\vdots$ $\}$

* TĚŽIŠTĚ hmotné bodové soustavy $A_1, A_2, \dots$ s vahami $m_1, m_2, \dots$
  $= \text{"} t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots \text{"}$
  $t_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2+\dots}$, $t_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2+\dots}$, ...

72 **TYPICKÝ PŘÍKLAD** (.. kromě těžiště ...)

... "3 JUG PUZZLE"

plná →

8l 5l 3l

nádoby bez rysek

¿¿ Jak naměřit právě 4l ??

STAVY

$\left(\boxed{8}, 0, 0\right)$ ... START

(3, 5, 0)   (5, 0, 3)

(3, 2, 3)

⋮

$\left(\boxed{4}, ?, ?\right)$ nebo $\left(?, \boxed{4}, ?\right)$ ... cíl

CESTA V ORIENT. GRAFU

⋮

VŠUDE

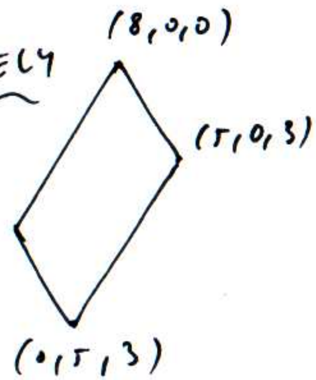
(a, b, c)

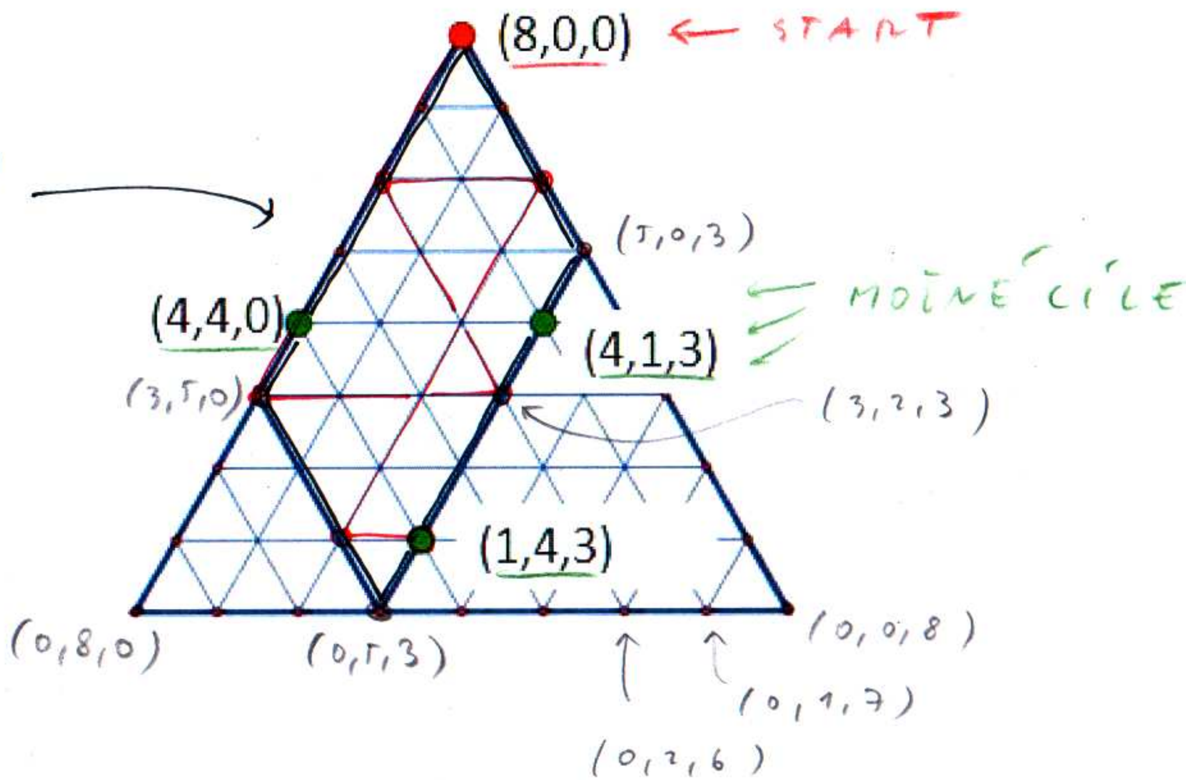
$\boxed{a+b+c = 8}$

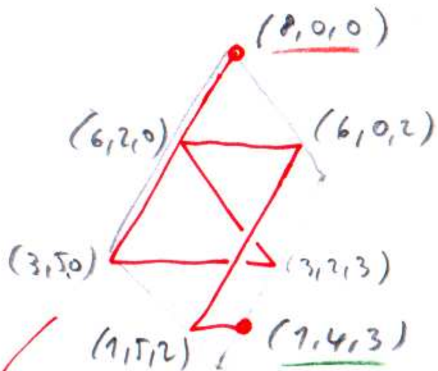
... KONST!

TYPICKÉ ŘEŠENÍ

MANTINELY







MOŽNÁ CESTA
(... KULEČNÍK ...)