74

# OBECNĚ

Pro lib. body $A_1, A_2, \dots$ v lib. af. prostoru (v lib. poloze):

* afinní obal bodů $A_1, A_2, \dots$ =

  $= \{ \text{"}X = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots\text{"} \mid t_1 + t_2 + \dots = 1 \}$

* konvexní obal bodů $A_1, A_2, \dots$ =

  $= \{ \dots$ totéž, navíc podm. $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $\vdots$ $\}$

* TĚŽIŠTĚ hmotné bodové soustavy $A_1, A_2, \dots$ s vahami $m_1, m_2, \dots$

  $= \text{"}t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots\text{"}$

  $t_1 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2+\dots}$, $t_2 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2+\dots}$, $\dots$

# ÚVOD, PŘEHLED

## AFINNÍ GEOMETRIE

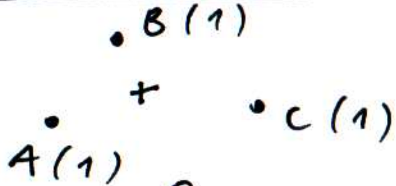
- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů
- vzájemné polohy podprostorů
- příčky
- uspořádání, omezené podpr., konvexní množiny
- barycentrické souřadnice
- poznámky a shrnutí

# POZOR

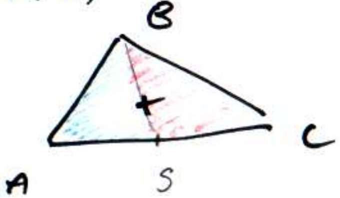
- Těžiště hmotné soustavy (bodové) se stejnými vahami
  **NEMUSÍ BÝT TOTÉŽ CO**
- těžiště konvexního obalu bodů!

---

**ANO**

① Těžiště 

$= \text{"} \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \text{"}$

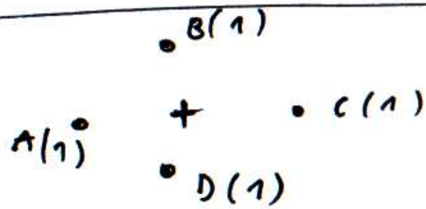
Těžiště 

$= \text{"} \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}S \text{"} = \text{"} \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \text{"}$

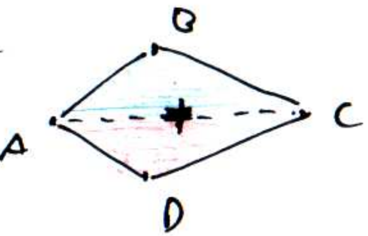
$\text{"} S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C \text{"}$

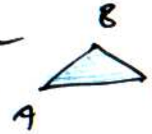
---

**NEMUSÍ**

② Těžiště 

$= \text{"} \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D \text{"}$

Těžiště 

$= \frac{1}{2}$ těžiště 

$+ \frac{1}{2}$ těžiště 


$= \text{"} \frac{1}{6}(A+B+C) + \frac{1}{6}(A+C+D) \text{"}$

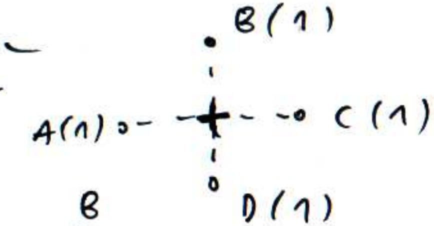
$= \text{"} \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}D \text{"}$

76

(3)

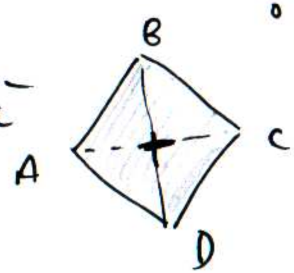
MŮŽE

Těžiště




← čtverec

Těžiště



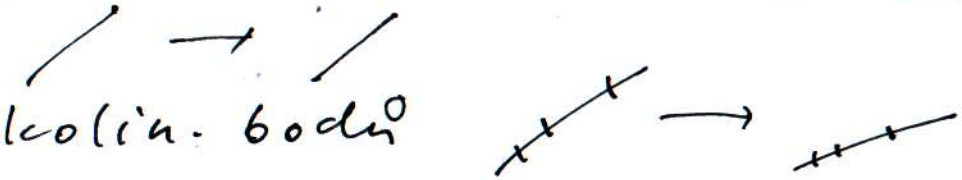

Body v OBECNÉ POLOZE

$\Downarrow$

Těžiště hmot. soust... = Těžiště konvex. obalu...

77 **POZNÁMKA** ← DŮLEŽITÁ!

· AFINNÍ ZOBRAZENÍ zachovávají: str. 23



def
- * kolin. bodů
- * poměry trojic kolin. bodů
- * rovnoběžnost

alg. char. → * indukuje zobr. mezi vekt. prostory ..... ← str. 27
LINEÁRNÍ

- zach. lib. podprostory
- ... lib. polo-prostory
- zach. ÚSEČKY
- ... KONVEXNÍ množiny!

alt. char. → * ... BARYC. SOUŘADNICE!
(tj. těžiště bodových hmot. soustav)

# AFINNÍ GEOMETRIE — SHRNUTÍ

- ( těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor $V$ ⇝ )
- Afinní prostor $\mathcal{A}$ a podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$
- jeden podpr. .... analytická vyjádření
- dva podpr. .... vzájemné polohy
- více podpr. .... příčky
- omezené podpr. .... polo-prostory, konvexní obaly, ... úsečky

... dosud pouze INCIDENCE, ROVNOBĚŽNOST, USPOŘÁDÁNÍ, SPOJITOST

za chvíli navíc $\boxed{\textbf{SHODNOST}}$ ....

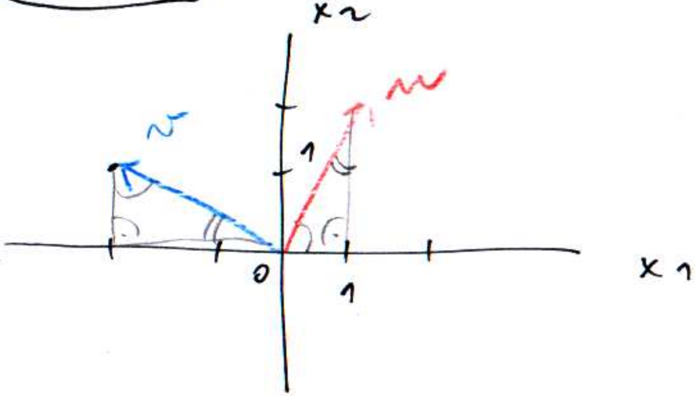
# ÚVOD, PŘEHLED

# AFINNÍ GEOMETRIE

# EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů

## ZE ŠKOLY (STŘEDNÍ) ZNÁME



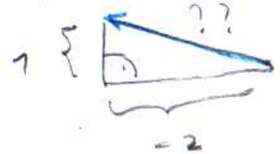

vzhledem ke kartézské souř. soust.

$v = (-2, 1)$ ... vektor ($V$)

$\|v\| \overset{!}{=} \sqrt{(-2)^2 + 1^2}$ ... velikost ($\mathbb{R}$)

$= \sqrt{5}$

pyth. věta




---

$u = (1, 2)$ ... vektor

? $u \perp v$ ... $u \cdot v \overset{!}{=} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1$

$= -2 + 2 = 0$

podobné $\Delta$


## Obecně

$u = (u_1, u_2, \dots), \quad v = (v_1, v_2, \dots)$

norma

(a) $\|v\| \overset{!}{=} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \dots} = \sqrt{v \cdot v}$

(b) $u \cdot v \overset{!}{=} u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots$

skal. součin $u$ a $v$

Z VYSOKÉ ŠKOLY ZNÁME

algebra II

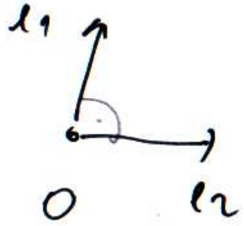
SKALÁRNÍ SOUČIN ... $V \times V \to \mathbb{R}$

- SYMETRICKÉ ... tj. $u \bullet v = v \bullet u$
- BI-LINEÁRNÍ = LINEÁRNÍ V KAŽDÉ SLOŽCE !!!
  ... tj. $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$
  a $u \bullet (\underset{\uparrow \, \mathbb{R}}{k} v) = k \cdot (u \bullet v)$ ...
- "POZITIVNÍ DEFINITNOST" ... tj. $u \neq o \Rightarrow \boxed{u \bullet u > 0}$

POZN. * v souřadnicích počítáme jako v (b), pouze když KARTÉZSKÁ SOUŘ. SOUST.!

* POZITIVNÍ DEF. $\Longrightarrow$ každý $v \in V$ má dobře def. velikost $\|v\| = \sqrt{v \bullet v}$

(a)




KARTÉZSKÁ SOUŘ. SOUST =

$= \text{báze } (e_1, e_2, \dots) \text{ je}$ ORTO-NORMÁLNÍ

tj. $e_i \bullet e_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$

VSKUTKU:

$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + \dots$

$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + \dots$

BI-LINEARITA

$\underline{u} \bullet \underline{v} = u_1 v_1 \overbrace{(\underline{e}_1 \bullet \underline{e}_1)}^{1} + u_1 v_2 \overbrace{(\underline{e}_1 \bullet \underline{e}_2)}^{0} + \dots$

$+ u_2 v_1 \underbrace{(\underline{e}_2 \bullet \underline{e}_1)}_{0} + u_2 v_2 \underbrace{(\underline{e}_2 \bullet \underline{e}_2)}_{1} + \dots$

$+ \dots$

$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$

# ZÁKLADNÍ NEROVNOSTI

POZITIVNÍ DEFINITNOST:

* $u \cdot u \boxed{\geq} 0$, přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u = o}$.

$$\Downarrow$$

* Cauchyho - Schwarzova nerovnost:

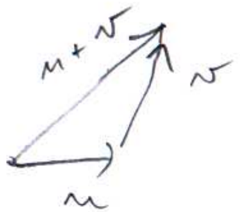
lin. závislé

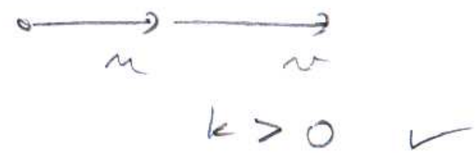
$|u \cdot v| \boxed{\leq} \|u\| \cdot \|v\|$, přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u = kv}$

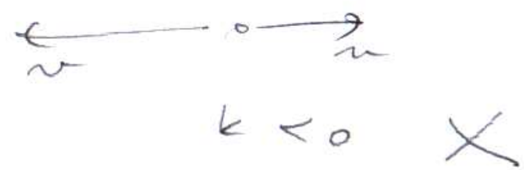
$$\Downarrow$$

* Trojúhelníková nerovnost:

$\|u + v\| \boxed{\leq} \|u\| + \|v\|$, přičemž $\boxed{=}$, pouze když $\boxed{u = kv}$



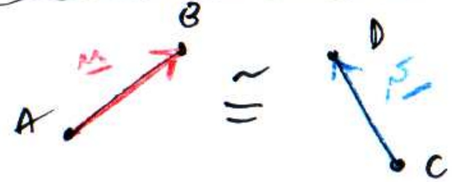



... DOSUD ALGEBRA

$$\boxed{\text{NYNÍ GEOMETRIE: ..... JAK POJEM. SHODNOSTI ?}}$$

(A) shodnost úseček




pomocí vzdálenosti bodů

$|AB| = |CD|$

↖ reálná čísla!

pomocí velikosti vektorů

$$\boxed{|AB| := \sqrt{u \cdot u}} \qquad \vec{u} = \vec{AB}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN

POZN:

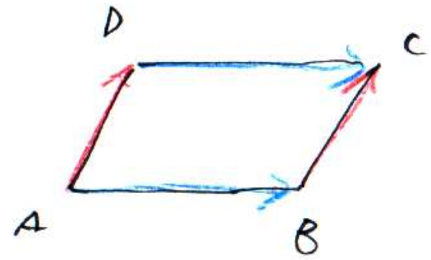
takto def. vzdálenosti určuje METRIKU ...

... dvěma bodům $\mapsto$ číslo :

* $|AB| \geq 0$, přičemž $|AB| = 0 \iff A = B$
* $|AB| = |BA|$
* $|AC| \leq |AB| + |BC|$

84 Naše METRIKA je navíc EUKLEIDOVSKÁ, tzn. kompatibilní s afinní strukturou, tedy s (hlavně) ROVNOBĚŽNOSTÍ ...

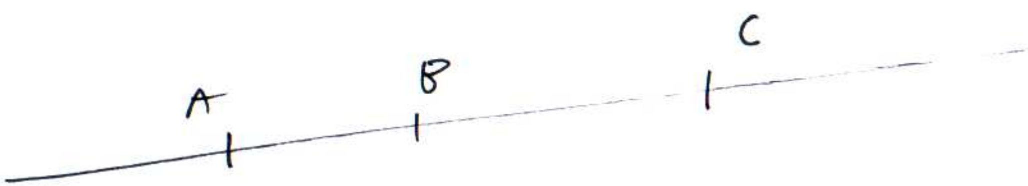
. . . . .




$\parallel \quad \vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow |AD| = |BC|$

---

POZN: USPOŘÁDÁNÍ (bodů na přímce) pomocí metriky:




B mezi A a C $\Leftrightarrow$ $|AB| + |BC| \overset{!}{=} |AC|$