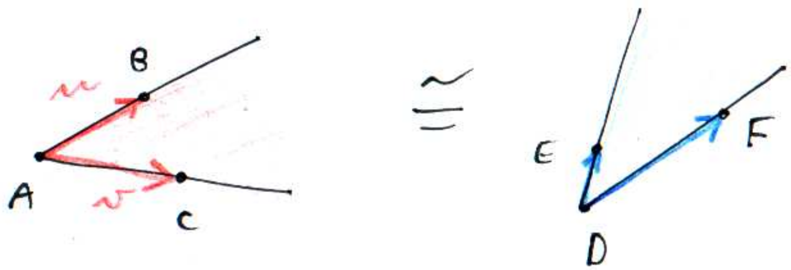
(B) shodnost úhlů pomocí odchylky vektorů



$\sphericalangle(\vec{AB},\vec{AC}) = \sphericalangle(\vec{DE},\vec{DF})$

reálná čísla!

přičemž odchylka vektorů $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v})$ ... ozn. $\alpha \in [0,180°]$

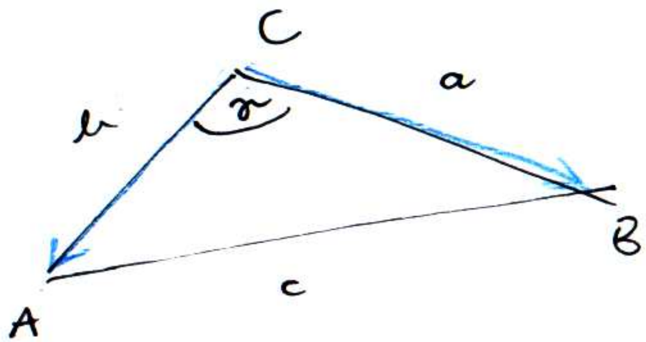
pomocí skal. součinu ... $\boxed{\cos\alpha := \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}}$

- podle Cauchy-nerovnosti: $-1 \leqq \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leqq 1$ ✓
- přičemž extrémy odp... $180° \leqq \alpha \leqq 0°$
- nezávisí na bodech na ramenech úhlů ... $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v}) = \sphericalangle(a\underline{u}, b\underline{v})$ ✓
  $\forall a,b \in \mathbb{R}_+$ ✓
- $\alpha = 90° \iff u \cdot v = 0$ ✓

---

všechno OK, ale jak se na to přišlo???

KOSINOVÁ VĚTA



• bez vektorů

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$\boxed{u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\gamma}$$

• pomocí vektorů:

$u := \overrightarrow{CB}$ ... $a = \|u\|$

$v := \overrightarrow{CA}$ ... $b = \|v\|$

$\overrightarrow{AB} = u - v \Rightarrow c = \|u - v\|$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

NYNÍ: $c^2 = (u - v) \cdot (u - v)$

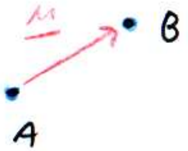
bilinearita $= u \cdot u - u \cdot v - v \cdot u + v \cdot v$

symetric. $= u \cdot u + v \cdot v - 2\, u \cdot v$

$= a^2 + b^2 - 2\, u \cdot v$

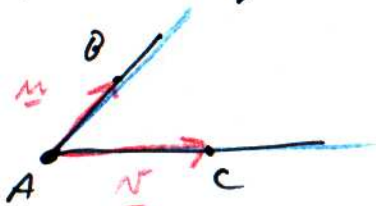
PONAUČENÍ .. na vše stačí SKALÁRNÍ SOUČIN $V \times V \to \mathbb{R}$

(A) VELIKOST ÚSEČKY $|AB|$ $=$ velikost vektoru $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$
(VZDÁLENOST BODŮ)



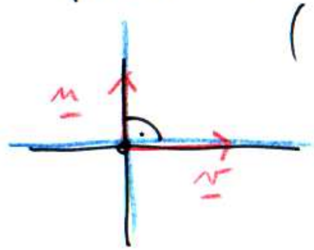
$= \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$ ← Pythagorova věta

(B) VELIKOST ÚHLU $\measuredangle ABC$ $=$ odchylka vektorů $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$
(odchylka ...)



$= \arccos \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}$ ← kosinová věta

spec. PRAVÝ ÚHEL (KOLMOST) $\iff$ $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$



DEF.

$\boxed{\text{EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR } \mathcal{E} = \text{afinní prostor se skalárním součinem (na zaměření } V = \overrightarrow{\mathcal{E}})}$

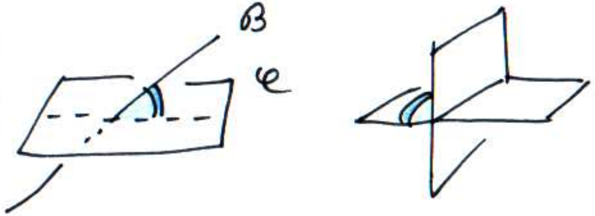
CO NÁS JEŠTĚ ČEKÁ ??

.... zobecnění všech předchozích pojmů

(A) VZDÁLENOST PODPROSTORŮ

....

(B) ODCHYLKA A KOLMOST PODPR.



....

(C) OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU

(SIMPLEXU ...)

apod.

....

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

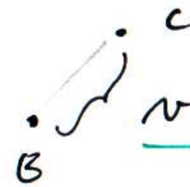
EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů

89

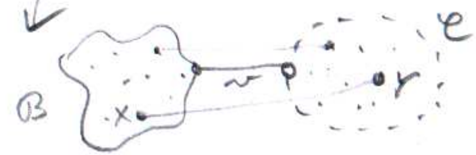
VZDÁLENOSTI ... DEFINICE

lib. metrický prostor



- základ ... vzdál. dvou bodů $r \in \mathbb{R}$
- pro lib. podmnožiny $\mathcal{B}, \mathcal{C}$:

  vzdálenost $r(\mathcal{B},\mathcal{C}) := \inf\{|XY|, \text{ kde } X \in \mathcal{B} \text{ a } Y \in \mathcal{C}\}$



min nemusí ex.
inf vždy ANO

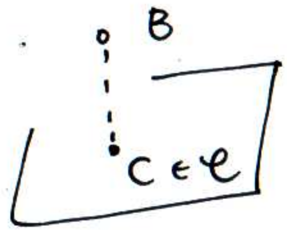
- pro lib. podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$: $\boxed{\inf = \min}$

- $r(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 0 \Leftarrow \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

- výpočty podle definice ...

  ... globální minimum funkce více proměnných

90 VZDÁL. BODU OD PODPROSTORU ... GEOM. CHARAKTERIZACE



$\mathcal{E}$ .. lib. podpr. eukleid. prostoru

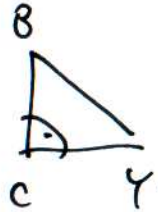
tj. $\rho(B, \mathcal{E}) = |BC|$

věta $\boxed{|BC| = \min \iff \vec{BC} \perp \mathcal{E}}$

extrémální problém ...

soustava lin. rovnic ...

Důkaz .. Pythagorova věta:

"$\Leftarrow$" přímo: předp. 

$\Rightarrow \; |BY|^2 = |BC|^2 + \underbrace{|CY|^2}_{\geq 0}$

$|BY|^{*} \geq |BC|$

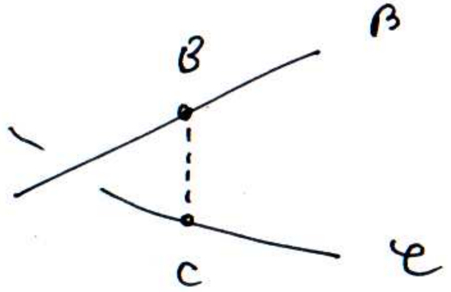
"$\Rightarrow$" nepřímo: předp. 

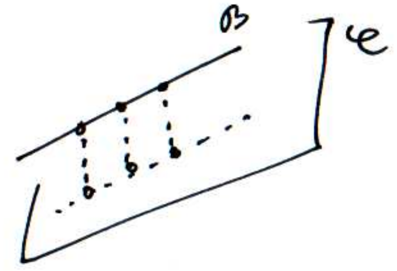
$\Rightarrow \; \dots \; |BC| \geq |BY|$ ↯

$\vec{BC} \not\perp \mathcal{E}$ "pata kolmice"

∎

VZDÁLENOST LIB. PODPROSTORŮ





Věta $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$:

① $|BC| = \min \iff \vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$

② dvojice B, C je určena jednoznačně $\iff \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$

Důkaz ① ... plyne z Pyth. věty ...

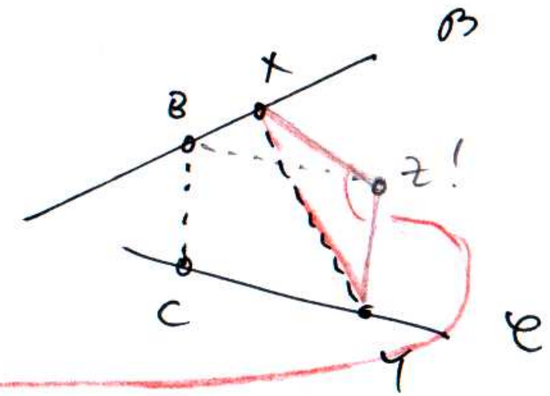
② .... "obdélníčky" ...

① **Detaily:**

92 • pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, tak $v(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 0$

dvojice $B \equiv C$, tj. $\vec{BC} = \vec{o} \perp$ ke všem ✓

• pro $v(\mathcal{B},\mathcal{C}) \neq 0$:



„$\Rightarrow$" $|BC| = \min \Rightarrow \vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$

... plyne z předchozího ✓

„$\Leftarrow$" předp. $\vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$:

chceme ... $|XY| \geq |BC|$ pro lib. $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C}$

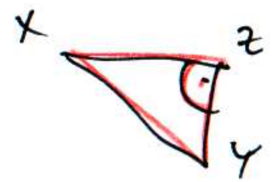
tady chceme ukázat 90°

! - Z ... tak, aby $\vec{BC} = \vec{ZY}$

(tj. $BCYZ$ rovnoběžník)

- předp. $\Rightarrow$ $\vec{ZY} = \vec{BC} \perp$ k lib. lin. kombinaci vektorů z $\vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{C}}$

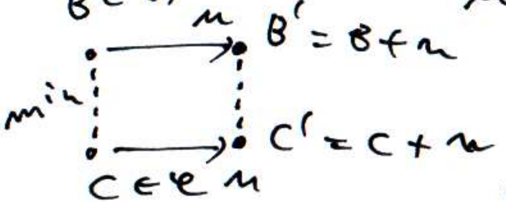
tedy zejména $\vec{ZY} = \vec{BC} \perp \vec{ZX} = \underbrace{\vec{ZB}}_{\vec{\mathcal{C}}} + \underbrace{\vec{BX}}_{\vec{\mathcal{B}}}$!



- ... Pyth. věta $|XY| \geq \overset{\boxed{n}}{|ZY|} = |BC|$ ✓

② **Detail:**

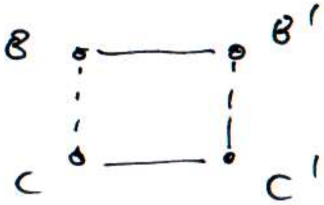
"$\Rightarrow$" nepřímo



$u \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ spol. vektor

BCC'B' je pravoúhelník
tedy $|BC| = |B'C'|$

"$\Leftarrow$" nepřímo



BCC'B' je pravoúh.
tedy $\underset{\mathcal{B}}{\vec{BB'}} = \underset{\mathcal{C}}{\vec{CC'}}$

tj. $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \{o\}$ $\square$