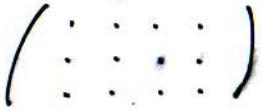
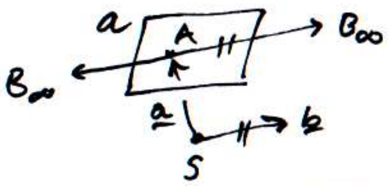
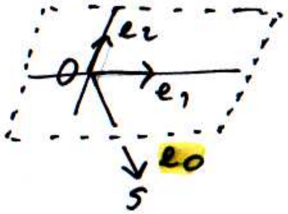
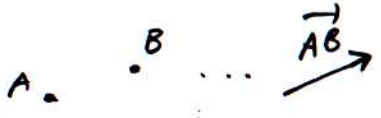
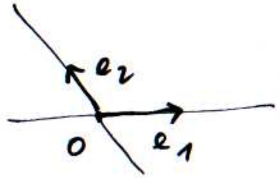
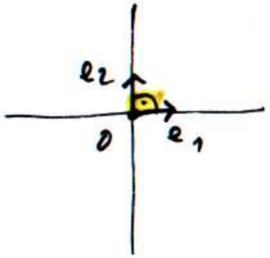
ÚVOD, PŘEHLED

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEM.
PŘEDMĚT	geometrie	totéž
CÍLE	opakování, rozšíření a organizace poznatků	totéž
NÁSTROJE	pravítko a kružítko  	lineární algebra  
PŘEDPOKLADY	$\emptyset$	lineární algebra !
VÝHODY	jednoduchost, představivost apod.	jednotný popis (vzhledem k dim), žádná představivost apod.
TYPICKÉ ÚLOHY	sestrojte - obecný průmět tělesa - průmět řezu - řez ve skutečné velikosti	spočítejte } totéž

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEM.
ZÁKLADNÍ POJMY	bod, přímka, rovina	vektor
ZÁKLADNÍ VZTAHY	incidentnost, rovnoběžnost, shodnost apod.	lineární závislost, resp. nezávislost, skalární součin, apod.
ZÁKLADNÍ ÚLOHY	sestrojitelné veličiny	—
	průnik přímky a roviny	soustava lin. rovnic
	vzdálenost bodů	velikost vektoru
	obsah mnohoúhelníku (kvadratura)	determinant
	apod.	apod.

ZOBRAZENÍ	PROSTORY	ÚLOHY	VYMEZENÍ ALG.	POČÍTÁNÍ
projektivní	projektivní $\mathcal{P}$ ③	polohové	$\mathcal{P} = a \cup \{\infty\}$ pomocí $W \supset V$ 	homogenní souřadnice 
afinní	afinní a ①		$a \times a \to V$  body ... vektor	afinní souř. 
ekvi-afinní podobná shodná	eukleidovské $\mathcal{E}$ ②	metrické	$\mathcal{E} = a +$ skalární součin  ... $u \cdot v$ vektory ... číslo	kartézské souřadnice 

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

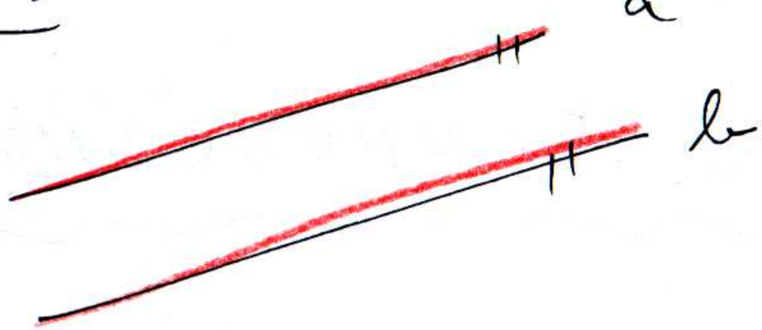
- obecný afinní prostor

OPAKOVÁNÍ

ROVNOBĚŽNOST

← typický afinní pojem

Def

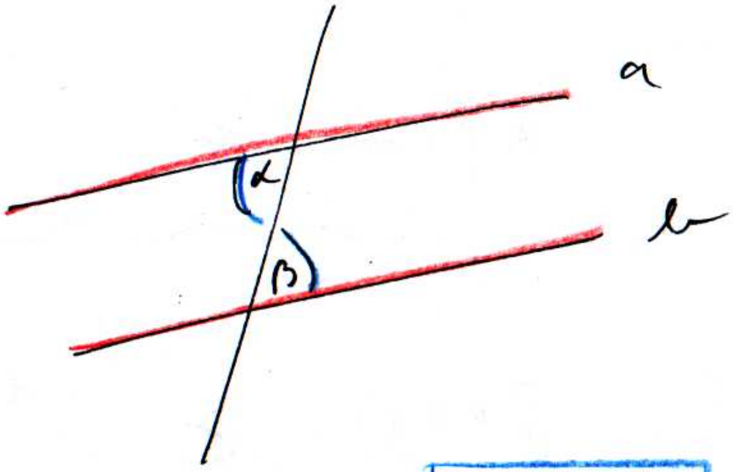


a ∥ b, pokud leží v jedné rovině

$\underbrace{\text{v jedné rovině}}_{\text{eukleid. (afinní)}}$

a $\boxed{a \cap b = \emptyset}$

charakterizace

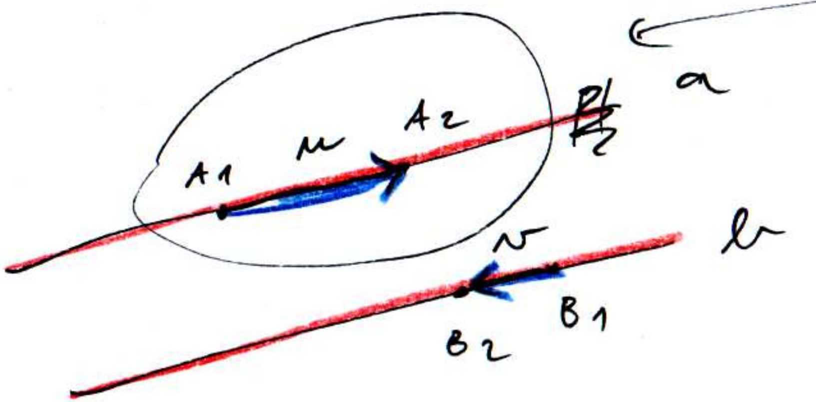


a ∥ b $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\alpha = \beta}$

shodnost úhlů

MOTIVACE

char. bez shodnosti



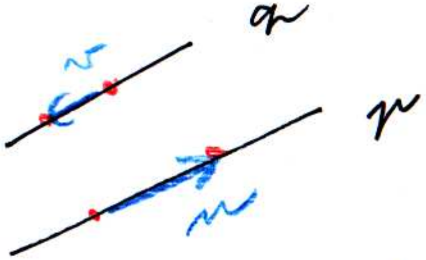
"afinní struktura" ...

$$a \parallel b \iff \boxed{u = \text{násobek} \cdot v}$$

lin. závislost vektorů

AFINNÍ PROSTOR / STRUKTURA

- "názorně"



$p \parallel q \iff u, v$ jsou lin. závislé

⟿ "ROUNOBĚŽNOST"

(... bez jakýchk
odkazů na
SHODN.

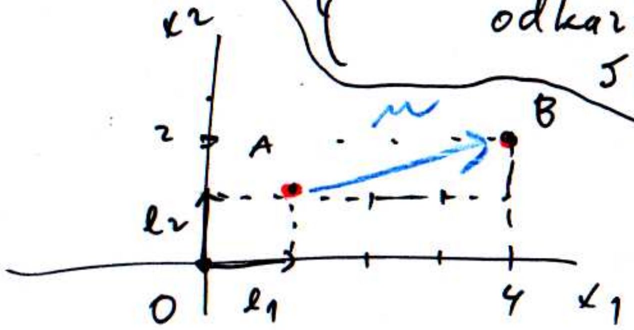
- "početní"

$B = (4,2)$

$A = (1,1)$

$u = (3,1)$

$u =$ "$B - A$"



⟶ POŘÁDNĚ

GEOMETRIE

A B

dva body

⟶

ALGEBRA

$v = \overrightarrow{AB}$

vektor

+ nějaké přirozené požadavky

⟶

→ přiroz. vlastnosti ....

... kompatibilita s vekt. strukturou:

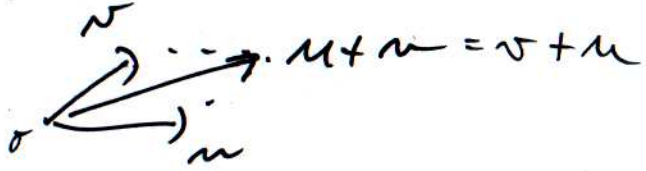
OPAKOVÁNÍ

$(*)$

vekt. prostor V nad tělesem $\mathbb{R}$

" = jenom lin. kombinace "

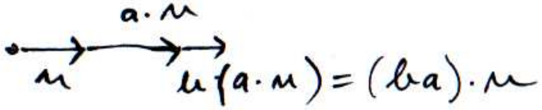
$$\overset{\mathbb{R}}{\underline{a_1}} \cdot \underset{V}{v_1} + \overset{\mathbb{R}}{\underline{a_2}} \cdot \underset{V}{v_2} + \dots$$

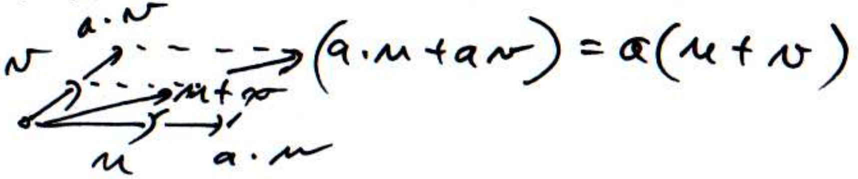


neboli

$+ : V \times V \to V$ ... komutativní grupa

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ ... "násobení skalárem" v souladu



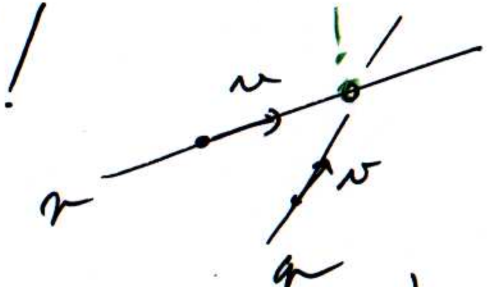


POZNÁMKA

(*) algebraicky totéž pro lib. těleso

pro geometrii potřebujeme **ℝ**,

kvůli spojitosti !!!



aby platilo: $p \parallel q \iff u, v$ lin. závislé

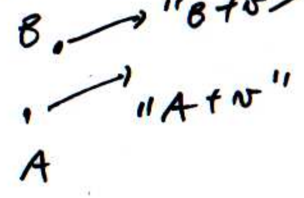
9. DEFINICE

AFINNÍ PROSTOR $\mathcal{A}$ NAD VEKT. PROSTOREM V

= "vekt. prostor V bez význačného prvku o"

= "množina bodů $\mathcal{A}$, na které působí grupa V"

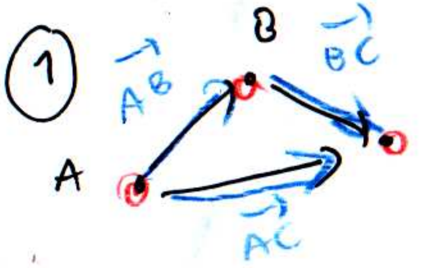
(jakožto posouvání)



= množina bodů $\mathcal{A}$ se zobrazením do V,

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ (.. "dvěma bodům $\longmapsto$ vektor)

které je kompatibilní s vekt. strukturou V:

① 

pro lib. $A, B, C \in \mathcal{A}$:

$\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}}$

② pro lib. $A \in \mathcal{A}$, $v \in V$

"koncový bod" ex. jednoznač

tj. ex! $B \in \mathcal{A}$ ... $\vec{AB} = v$

$A \xrightarrow{v} B = A + v$

DALŠÍ POJMY:

V ... ZAMĚŘENÍ a

ozn. $V = \vec{a}$ $(= z(a) = dir(a)$
$= \dots)$

DIMENZE a = dimenze V

PŘÍKLADY (další)

- $\boxed{\mathcal{A} = \mathbb{R}^n}$ $\quad V = \mathbb{R}^n$ ← std. vekt. pr. dim n

$u = (u_1, u_2, \dots)$

$v = (v_1, v_2, \dots)$

$\underbrace{\qquad\qquad}$

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots)$

$a \cdot u = (au_1, au_2, \dots)$

↑ vše "po složkách"

std. af. struktura:

$A = [a_1, a_2, \dots]$ lib

$B = [b_1, b_2, \dots]$

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} = B - A := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots)}$$

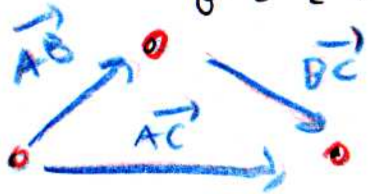
splňují ① a ② → (str. 12)

$\Longrightarrow$ af. prostor dim n

standardní

OVĚŘENÍ

①



$B = [b_1, b_2 \dots\dots]$

$C = [c_1, c_2 \dots]$

$A = [a_1, a_2, \dots]$

$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots)$

$\vec{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, \dots)$

$\vec{AB} + \vec{BC} = (\cancel{b_1} - a_1 + c_1 - \cancel{b_1}, \dots)$

$\vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, \dots)$

OK

②

$u = (u_1, u_2, \dots)$ lib

B ?? tak, aby $\vec{AB} = u$??

$A = [a_1, a_2 \dots]$ lib

ANO, tj. jednoznačně:

$B = [a_1 + u_1, a_2 + u_2, \dots]$

kontrola: $\vec{AB} = B - A =$

$= (\cancel{a_1} + u_1 - \cancel{a_1}, \dots$

$= (u_1, \dots) = u$ ✓

OK

DALŠÍ PŘÍKLAD .... z ALGEBRY

- a = { řešení soustavy **lineárních** (alg.) rovnic $\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{matrix}$ }

pro neznámé x_1, x_2, x_3

$$= \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{matrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

...... **dim 1**

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

partikul. řeš.

ob. řeš. homog. soustavy

$$V = \left\{ \begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\overset{(t_1 = 0)}{\check{r}_1 = \begin{bmatrix}0\\3\\-4\end{bmatrix}}, \quad \overset{(t_2 = 2)}{\check{r}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}} \in a$$

$$\check{r}_2 - \check{r}_1 = \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix} \in V$$

$$(t_2 - t_1)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

OBECNĚ DEF.:

$$\text{PRO } \check{r}_1, \check{r}_2 \in a \rightsquigarrow \underline{\overrightarrow{\check{r}_1\check{r}_2} := \check{r}_2 - \check{r}_1} \in V$$

řešení soust. nehomog. lin. rovnic

"po složkách"

řešení homogenizované soustavy...

DALŠÍ PŘÍKLAD ... Z ANALÝZY

- $\mathcal{A}$ = { primitivní funkce k funkci $f(x)$ }

= { řešení lineární dif. rovnice $y' = f(x)$ }

$$= \{ y = \int f(x)\,dx = F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \}$$

partikulární řešení

obecné řeš. homog. rovnice $y' = 0$

zaměření V

OPĚT :

pro $\check{r}_1, \check{r}_2 \in \mathcal{A} \rightsquigarrow \overrightarrow{\check{r}_1 \check{r}_2} := \check{r}_2 - \check{r}_1 \in V$

rozdíl funkcí

... AFINNÍ PROSTOR dim 1

DALŠÍ OBDOBNÝ PŘÍKLAD !!

- $\mathcal{A} = \{$ řešení lineární diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 5y = 10 \}$

→ odhalit afinní strukturu $\mathcal{A}$ …

… vyřešit rovnici :

$$\mathcal{A} = \{\, y(x) = 2 + c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,\}$$

partik. řešení

obec. řešení homog. rovnice

$$\underbrace{y'' - 4y' + 5y = 0}$$

zaměření V

… dim 2

OPĚT :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V$$

$$\check{r}_1, \check{r}_2 \longmapsto \check{r}_2 - \check{r}_1$$

rozdíl funkcí

DŮLEŽITÝ POSTŘEH :

$\mathcal{A}$ … vždy umíme ztotožnit se stand. prostorem $\mathbb{R}^2$:

$$\check{\mu} = 2 + \underline{c_1}\,\boxed{e^{2x}\cos x} + \underline{c_2}\,\boxed{e^{2x}\sin x} \in \mathcal{A}$$

$$\Big\downarrow\Big\uparrow \quad 1:1$$

$$[\,\underline{c_1}\,,\ \underline{c_2}\,] \in \mathbb{R}^2$$

"souřadnice vektoru v bázi"

$a \times a \to \check{}$

… a přísluš. přiřazení si odp.!!

(IZOMORFISMUS AF. prostorů)

↳ viz dále …

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor

AFINNÍ PODPROSTOR:

obecný af- prostor $\mathcal{A}$

se zaměřením $\vec{\mathcal{A}} = V$

$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ podmnožina je af. podprostor, pokud je to af. prostor. (vzhledem ku zděděné struktuře)

zúžení $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to V$

- nevyčerpáme celé V (pokud $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$)
- obraz $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to U \subsetneq V$ není obyč. podmnožina

↑vekt. podpr.!

$\mathcal{B} \subseteq a$ af. podpr. je vždy tvaru:

"$\mathcal{B} = B + U$"

dim $\mathcal{B}$:= dim U

partik. prvek $B \in \mathcal{B}$

vekt. podprostor $U \subseteq V$

$$\mathcal{B} = \{ X = B + t_1 u_1 + t_2 u_2 + \dots \mid t_1, t_2 \dots \in \mathbb{R} \}$$

atd.

EKVIVALENTNÍ POPIS PODPROSTORU:

- podmnož. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ je af. podprostor

$\Updownarrow$ def

- $\mathcal{B}$ je af. prostor ...

$\Updownarrow$

- "$\mathcal{B} = B + U$", kde $B \in \mathcal{B}$ a $U \subseteq V$ ... vektorový podpr.

$\Updownarrow$

- $U := \{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathcal{B} \} \subseteq V$ ... vektorový podpr.

$\Updownarrow$

- př. 1.6. $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow$ přímka $AB \subseteq \mathcal{B}$

<u></u>**DODATEK** : $\dim \mathcal{B} := \dim U$

- dim 0 .... "body"
- 1 ... "přímky"
- 2 ... "roviny"

⋮

- $\boxed{\underline{n}-1}$ ... "<u>nad-rovina</u>"; $\underline{n} = \dim \mathcal{A} = \dim V$

↑

max. možný podprostor
(různý od $\mathcal{A}$)

příklady

- z minule $\mathcal{A} = \{$ řešení soustavy lin. rovnic $2x_1+x_2=3$
  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ $\quad 3x_1-x_3=4 \}$

  ↗

  1-dim afinní podprostor
  ve stand. af. prostoru $\mathbb{R}^3 =$
  $= \{(x_1, x_2, x_3)\}$

- z minule $\mathcal{A} = \{$ řešení lin. dif. rovnice
  $y''-4y'+5y=10 \}$

  ↗

  2-dim afinní podprostor
  v "prostoru všech funkcí"
  (∞ - dim)

- dále např.
  $\mathcal{B} = \{$ konstantní řešení $y''-4y'+5y=10 \}$
  $= \{ y=2 \}$ ← 0-dim af. podpr. v $\mathcal{A}$ ↑
  (resp. v 1-dim podprostoru
  konstantních fcí)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

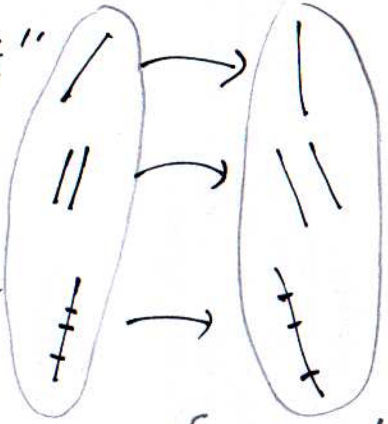
- z loňské geometrie víme:

af. zobr. zachovává

(a) "přímkovitost"

(b) rovnoběžnost

(c) poměry trojic kolin. bodů



$$a \xrightarrow{f} a'$$

(... pokud se zrovna / nezobrazují do •)

- podle obecné logiky čekáme:

af. zobr. zachovává...

∴ AFINNÍ STRUKTURU

tj.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & \times & a \arrow[d, "f"] \arrow[r] & V \arrow[d, dashed, "??"] \\
a' & \times & a' \arrow[r] & V'
\end{tikzcd}$$

co by to jako mělo být

a jak skloubit

s předchozím ?

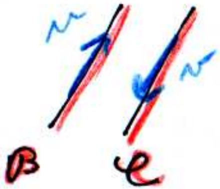
ZA PRVÉ:

- vlastnosti ⓐ – ⓒ rozumíme v OBECNÉM AF. PROSTORU:

ⓐ přímka

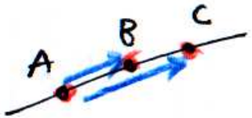
... podpr. dim 1

ⓑ rovnoběžnost



... $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{E}}$

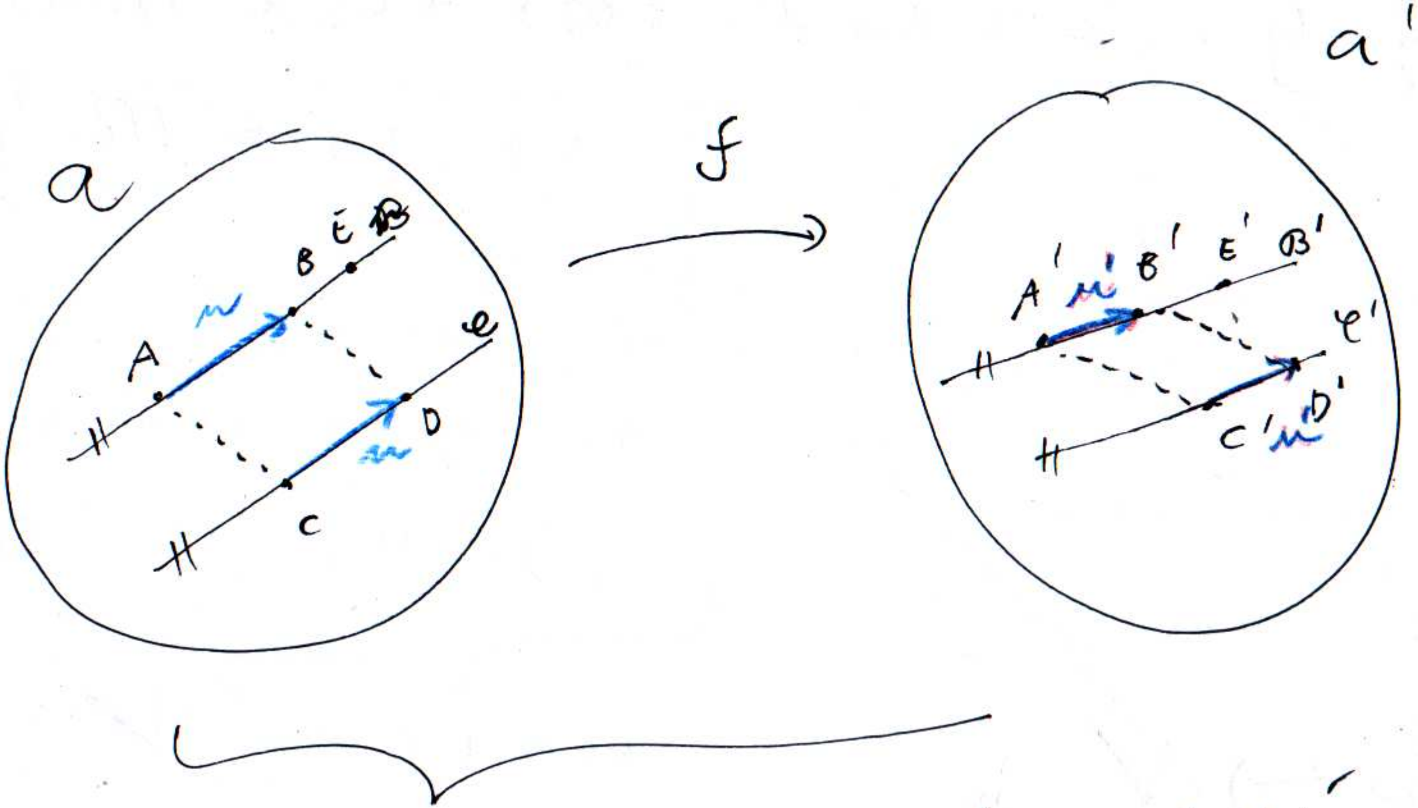
ⓒ poměr



.... $\underset{\in \mathbb{R}}{d} = " \frac{\vec{AC}}{\vec{AB}} "$ .... $\vec{AC} = d \cdot \vec{AB}$

ZA DRUHÉ:

předp… $f: a \to a'$ …… afinní (podle ⓐ-ⓒ)



f …. indukuje zobrazení mezi zaměřeními $\vec{f}: \vec{a} \to \vec{a}'$, které je navíc LINEÁRNÍ!

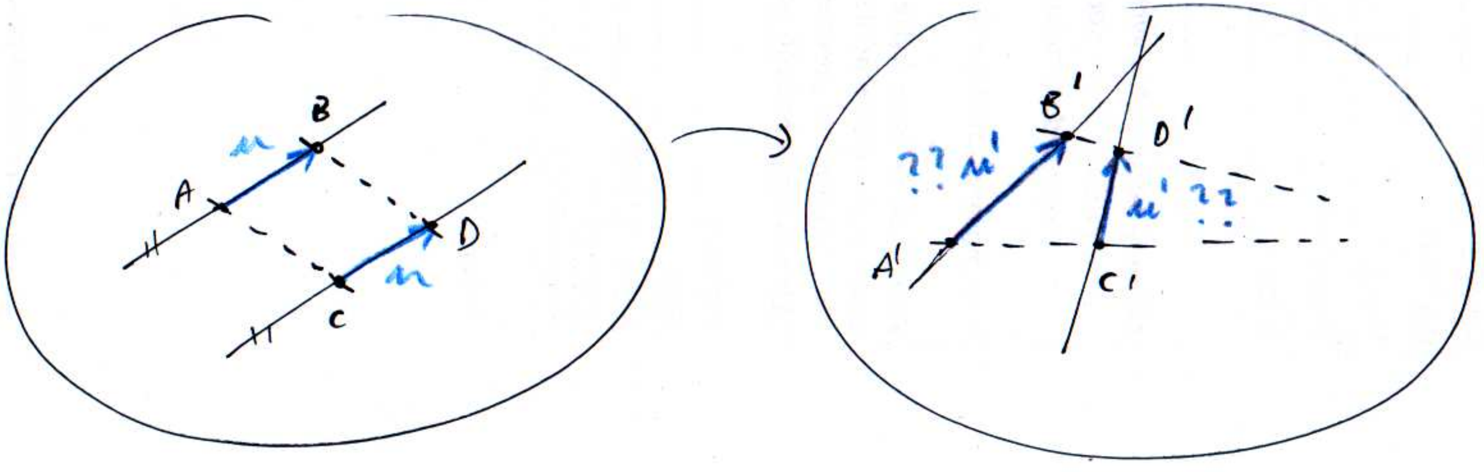
Tj. • $$\begin{tikzcd} & \overrightarrow{AB} \arrow[r, mapsto] & \overrightarrow{A'B'} & \\ u \arrow[ur, phantom, "="] \arrow[dr, phantom, "="] & & & u' \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & \overrightarrow{CD} \arrow[r, mapsto] & \overrightarrow{C'D'} & \end{tikzcd}$$

... dobře def. obraz vektoru (nezávisle na určující dvojici bodů)

- $\overrightarrow{AE} = d \cdot \overrightarrow{AB} \longmapsto \overrightarrow{A'E'} = d \cdot \overrightarrow{A'B'}$
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \longmapsto \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}$

} ... LINEÁRNÍ

Nic z toho nefunguje např. pro obecná PROJĚKTIVNÍ zobr.:



$\underbrace{\text{ZA TŘETÍ:}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

EKVIVALENTNÍ DEF. AF. ZOBR.:

$f : \mathcal{a} \to \mathcal{a}'$ je AFINNÍ, pokud ~~to~~ zachovává afinní strukturu, tj. ex. induk. zobr. $\vec{f} : \vec{\mathcal{a}} \to \vec{\mathcal{a}}'$ LINEÁRNÍ tak, že ...

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{a} \times \mathcal{a} \arrow[r] \arrow[d, "f\ \ f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \vec{\mathcal{a}} = V \arrow[d, dashed, "\vec{f}"] \\
\mathcal{a}' \times \mathcal{a}' \arrow[r] & \vec{\mathcal{a}}' = V'
\end{tikzcd}$$

... komutuje.

konkrétně ... $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$

neboli ... $\boxed{(\overrightarrow{AB})' = \overrightarrow{A'B'}}$

POZNÁMKA

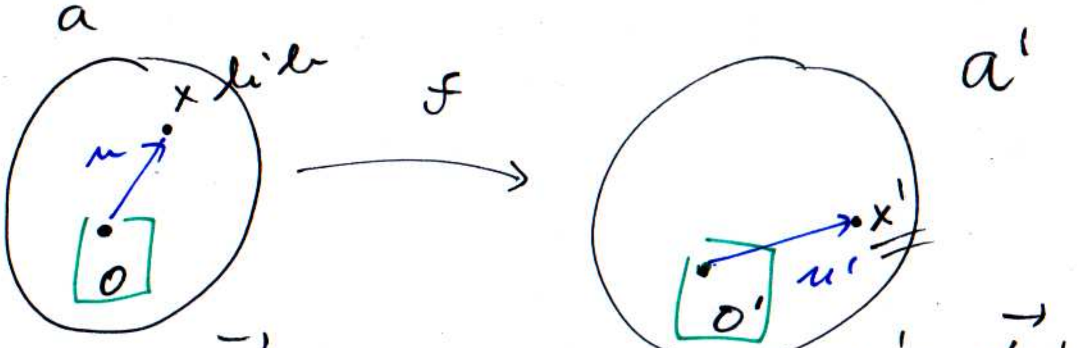
- lin. zobr. $\vec{a} \to \vec{a}'$ NEURČUJE

  af. zobr. $a \to a'$ úplně ...

  (viz napr. posunutí)

- ALE s obrazem jednoho dalšího bodu

ANO:



$u = \vec{OX}$ $\qquad$ $u' = \vec{O'X'}$

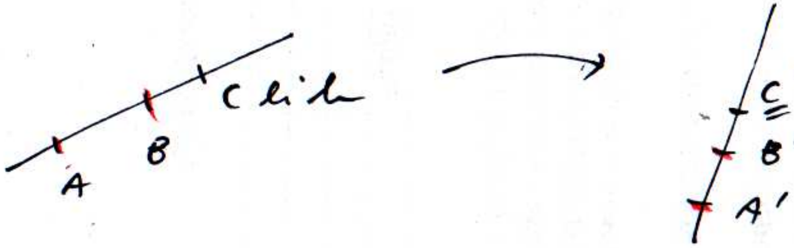
$\vec{f}(\vec{OX}) = \vec{O'X'}$

$$f : \underset{\text{lib}}{X} \longmapsto \boxed{X' = \overset{\text{obraz jednoho bodu}}{\boxed{O'}} + \overset{\text{LIN. ČÁST}}{\boxed{\vec{f}(\vec{OX})}}}$$

VĚTA O URČENOSTI AF. ZOBR.

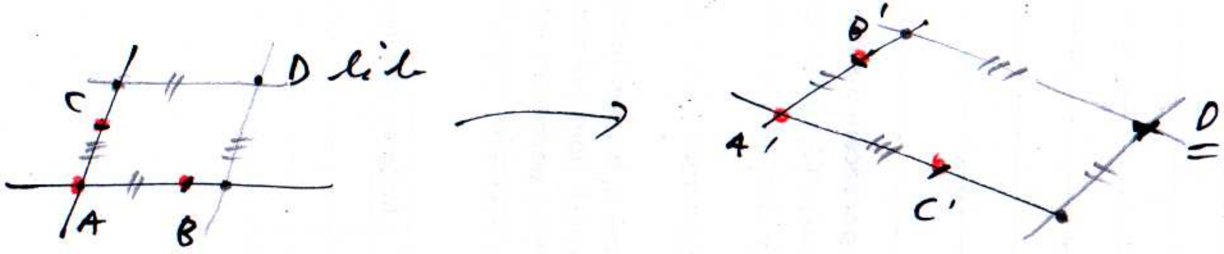
- Vloni ... z vlastností ⓐ – ⓒ plyne ...

$m = \boxed{1}$



... stačí znát obrazy $\boxed{2}$ bodů

$m = \boxed{2}$



... stačí ...

... $\boxed{3}$ bodů

.

.

.

etc.

OBECNĚ:

AFINNÍ ZOBR. $f: a \to a'$

↗ dim $\textcircled{n}$

je určeno obrazy $\textcircled{n+1}$ bodů v obecné poloze.

(**Důkaz** ...

$\vec{f}: \vec{a} \to \vec{a}'$ je určeno obrazem báze, a ta má $\textcircled{n}$ prvků)

POZNÁMKA / VÝHLED

- vlastnosti ⓐ – ⓒ nejsou úplně nezávislé:

Pokud ⓐ, potom ⓑ ⟺ ⓒ.

- ve skutečnosti platí ještě něco mnohem silnějšího:

Pokud bijektivní zobr. zach. ⓐ, potom taky ⓑ a ⓒ !!

tzv. "základní věta afinní geometrie".

(viz časem jako důsledek základní věty projektivní geom...)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody

Důležitý příklad obecného AFINNÍHO IZOMORFIZMU máme na str. 17:

a := { řešení dif. rovnice $y''-4y'+5y=10$ }

$a \times a \to V$ ... "rozdíl funkcí"

$\mathbb{R}^2$ ... std. af. pr.

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ... "po složkách"

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "1:1"'] & \ni & \check{r} = \boxed{2} + \underline{c_1}\, e^{2x}\cos x + \underline{c_2}\, e^{2x}\sin x \arrow[d, mapsto] \\
\mathbb{R}^2 & \ni & [\underline{c_1}, \underline{c_2}]
\end{tikzcd}$$

... SOUŘADNICE $\check{r} \in a$ vzhledem k bázi $(e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x) \in V$ (a "počátku" $\boxed{2} \in a$)

všechno "po složkách"

$\Downarrow$

diagram na str. 27 komutuje ...!

OBECNĚ

- prvky ob. afinního prostoru $\mathcal{A}$ (dim $\textcircled{n}$)

... $P + \underline{c_1}\, e_1 + \underline{c_2}\, e_2 + \dots\dots$

$P \in \mathcal{A}$

báze zaměření $V = \vec{\mathcal{A}}$

koeficienty $\in \mathbb{R}$

1:1 $\updownarrow$

- prvky std. afinního prostoru $\mathbb{R}^{\textcircled{n}}$

... $[\underline{c_1}, \underline{c_2}, \dots]$

= souřadnice vzhledem k SOUŘ. SOUSTAVĚ:

- POČÁTEK $P \in \mathcal{A}$
- BÁZE $(e_1, e_2, \dots) \in V$

ZÁVĚRY

n

- všechny afinní prostory stejné dimenze jsou IZOMORFNÍ . . .
- . . . nikoli však kanonicky . . .
- . . . tato ztotožnění mohou být dána volbou SOUŘ. SOUSTAV :

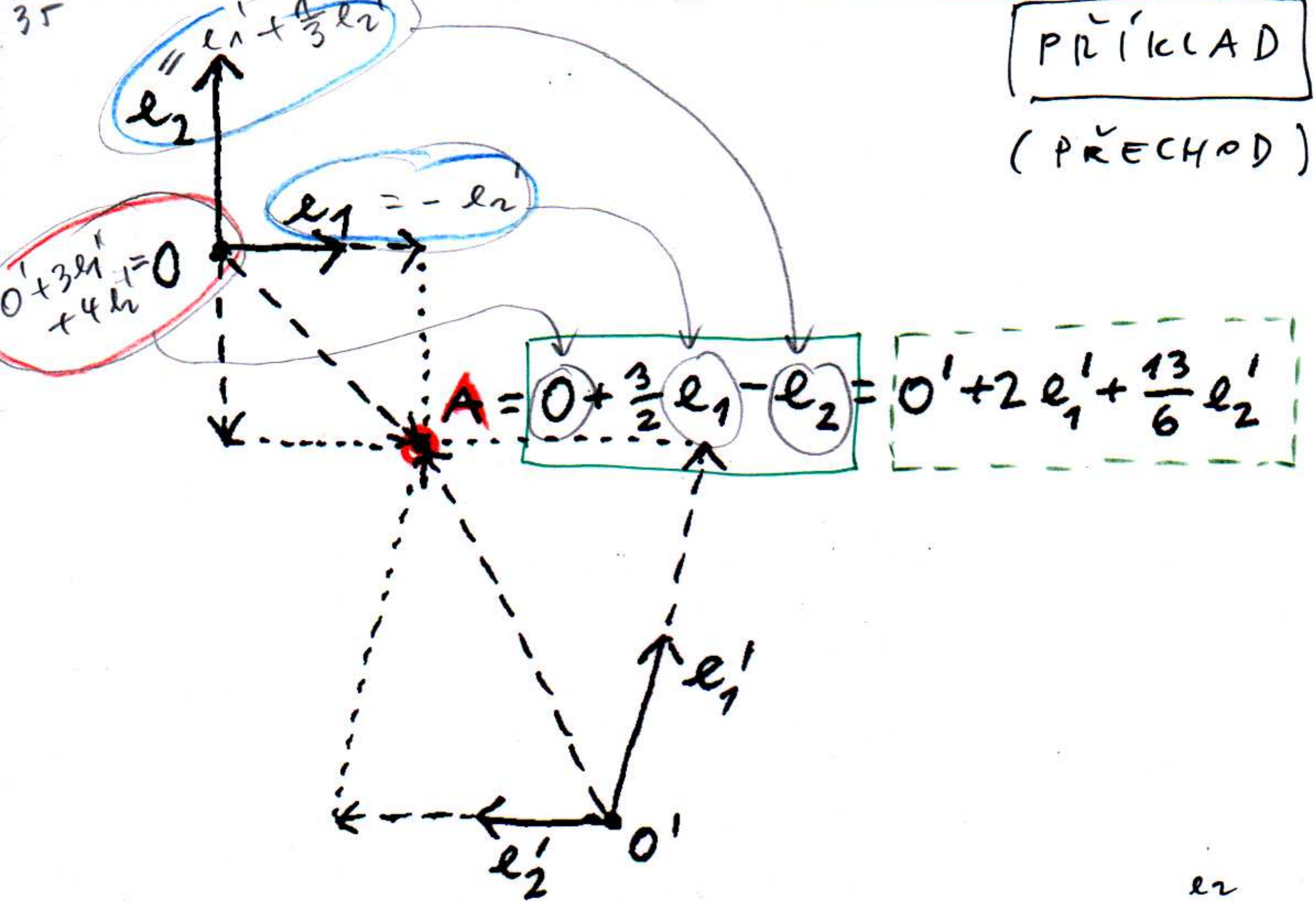
$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, dashed, shift left] \arrow[dr, shift left] & & a' \arrow[ll, dashed, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
& \mathbb{R}^{n} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

- jiná souř. soustava ⟹ jiné SOUŘADNICE

. . . viz následující příklad →

PŘÍKLAD

(PŘECHOD)

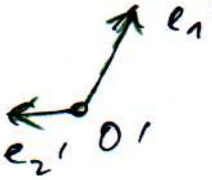


$$A = \boxed{O + \frac{3}{2}e_1 - e_2} = O' + 2e_1' + \frac{13}{6}e_2'$$

- souřadnice bodu A vzhledem

  .... $\boxed{[\frac{3}{2}, -1]}$

- souřadnice bodu A vzhl.



  .... $[2, \frac{13}{6}]$

- přechod ... $\bigcirc\!\!\!\!\!\!\;??$

(jak rozumně popsat?)

$$A = O + \frac{3}{2}e_1 - e_2 = \underbrace{\overbrace{\cdots\cdots}^{O = O' + 3e_1' + 4e_2'}}_{\begin{array}{l} e_1 = 0e_1' - e_2' \\ e_2 = 1e_1' + \frac{1}{3}e_2' \end{array}} = O' + 2e_1' + \frac{13}{6}e_2'$$

Maticově (po složkách)

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}} + \underset{!?}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \right] = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}}$$

matice přechodu "od báze (e_1, e_2) k bázi (e_1', e_2')" (nebo naopak)

souř. vektoru $\overrightarrow{O'O}$ vzhledem k bázi (e_1', e_2')

… takto to funguje obecně!

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů

ÚVODNÍ POSTŘEHY

- afinní prostor $\mathcal{A}$, zaměření $\vec{\mathcal{A}} = V$
- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ … af. podprostory

---

- průnik $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ …

  … je af. podprostor, $\overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$

  (pokud je neprázdný)

  vekt. podprostor!! (lin. algebry) víme z

- sjednocení $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ …

  … obecně není af. podpr (viz např. $\mathcal{B}$ = bod, $\mathcal{C}$ = bod)

  (sjednocení vekt. podpr. není vekt. podpr.!)

- "součet" af. podpr.

  obvyklá definice

  $\mathcal{B} + \mathcal{C} :=$ afinní obal $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$

  = nejmenší af. podpr. obsahující $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$

POZNÁMKY

- Např. B, C .. body $\rightsquigarrow$ $B + C = \begin{cases} \text{bod, pokud } B = C \\ \text{přímka, pokud } B \neq C \end{cases}$

B .. bod, ℓ .. přímka $\rightsquigarrow$ $B + \ell = \begin{cases} \text{přímka, pokud } B \in \ell \\ \text{rovina, } \ldots\ B \notin \ell \end{cases}$

$\mathcal{B}, \ell$ .. přímky $\rightsquigarrow$ $\mathcal{B} + \ell = \begin{cases} \text{přímka, } \ldots\ \mathcal{B} = \ell \\ \text{rovina } \ldots\ \underset{\text{(rovnob.)}}{\mathcal{B} \parallel \ell} \\ \qquad\quad \ddots\ \underset{\text{(různob.)}}{\mathcal{B} \mathbin{X} \ell} \\ \text{nadprostor dim 3 } \ldots\ \underset{\text{(mimob.)}}{\mathcal{B} \times \ell} \end{cases}$

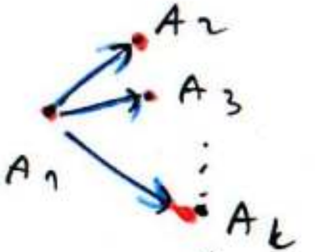
apod ...

- Body $A_1, A_2, \ldots, A_{\boxed{k}}$ v OBECNÉ POLOZE

$$\Updownarrow$$

$$\dim(A_1 + A_2 + \ldots + A_{\boxed{k}}) = \boxed{k-1}$$

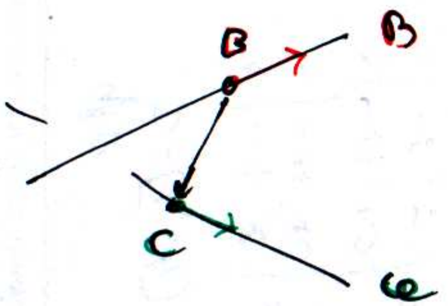
(tj.



lin. nezávislé)

$\boxed{\text{OBECNĚ}}$ … $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ af. podpr.

⇝ součet $\boxed{\mathcal{B}+\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}}$ … af. podpr. se zaměřením



$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \langle \overrightarrow{BC} \rangle}$$

$B \in \mathcal{B}$ $C \in \mathcal{C}$ lib.

$$\Downarrow$$

$\dim(\mathcal{B}+\mathcal{C})$

buď $=$ $\dim \mathcal{B} + \dim \mathcal{C}$

nebo $=$ $\dots +1$

přitom zřejmě

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \\ \Updownarrow \\ \overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \end{array}}$$

alg. vztah mezi vektory..

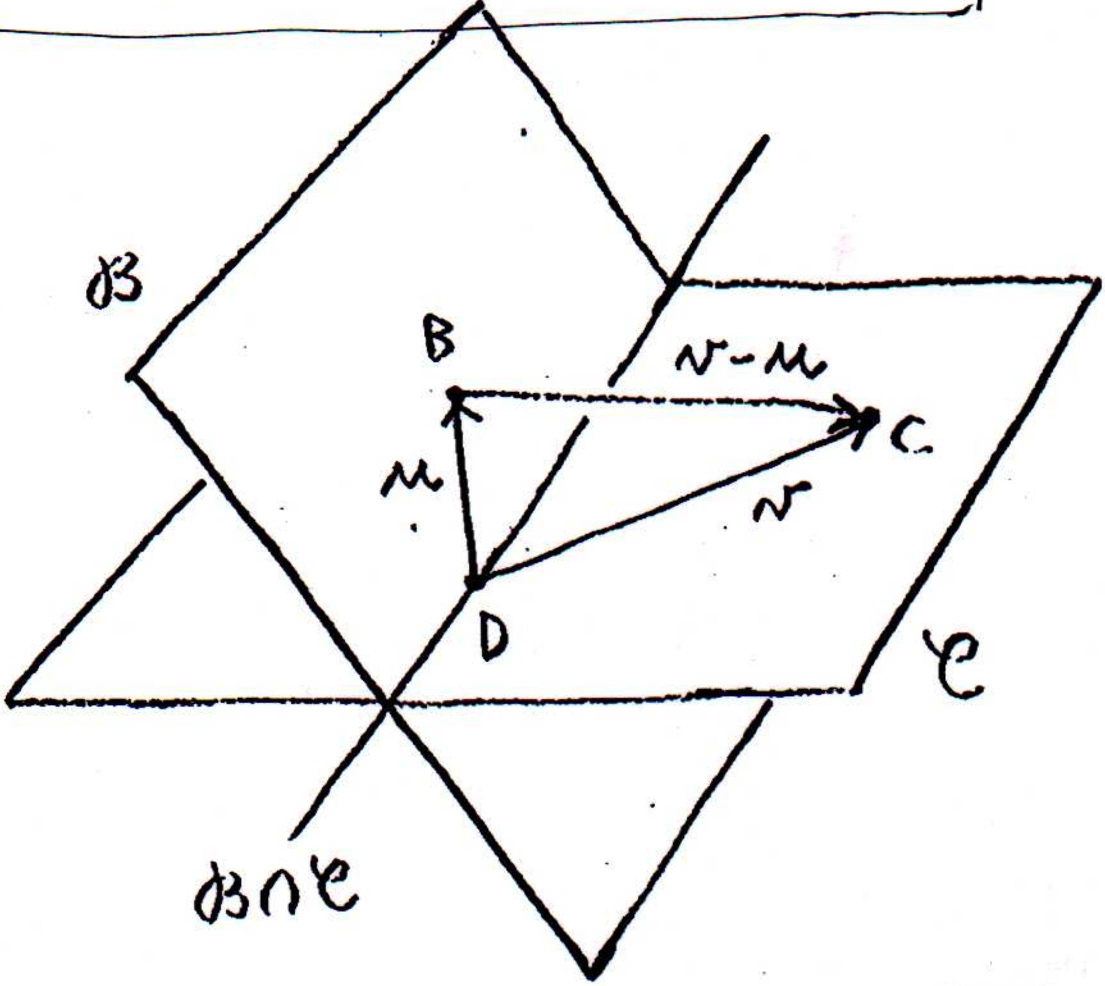
Ukážeme, že obecně

⋮

$\Updownarrow$

$\boxed{\mathcal{B} \text{ a } \mathcal{C} \text{ se protínají}}$

geom. vztah mezi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$



platí →

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

pro lib. $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$

41 **Důkaz** : $\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} \xRightarrow{??} \vec{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

$\Downarrow$

ať. $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, tj. $D \in \mathcal{B}$ a $D \in \mathcal{C}$

$\Downarrow$

$\vec{DB} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{DC} \in \vec{\mathcal{C}}$ pro lib. $B \in \mathcal{B}$
$C \in \mathcal{C}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{BC} = \vec{BD} + \vec{DC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}}$$

opačně $\boxed{\vec{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}} \xRightarrow{??} \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$\vec{BC} = u + v$, kde $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}$

$\vec{BC} = C - B$

$\Downarrow$

$\underbrace{C - v}_{\vec{\mathcal{C}}} = \underbrace{B + u}_{\in \mathcal{B}}$ $\boxed{\text{... spol. bod } \mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$

☑

CVIČENÍ (alt. důkaz věty na s. 40)

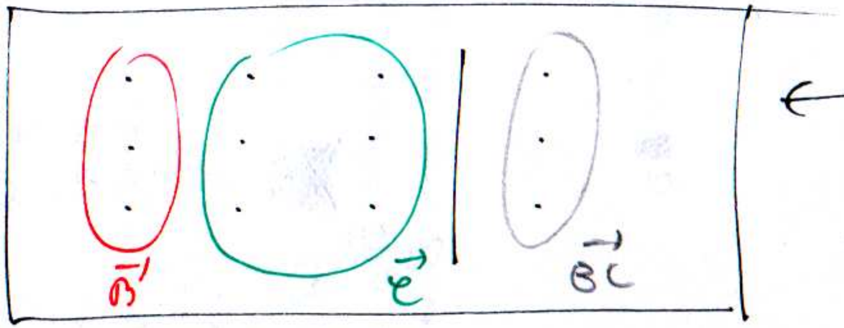
$$\mathcal{B} = \{B + t\,\underline{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C} = \{C + s_1\underline{v}_1 + s_2\underline{v}_2 \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ .. $B + t\,\underline{u} = C + s_1\underline{v}_1 + s_2\underline{v}_2$

$$t\,\underline{u} - s_1\underline{v}_1 - s_2\underline{v}_2 = \overrightarrow{BC}$$

(*)



$$\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset}$$

$\Updownarrow$

← soustava má řešení

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{BC}$ = lin. kombinace $\underline{u}, \underline{v}_1, \underline{v}_2$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}}$$

(viz též Frobeniova věta) →

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

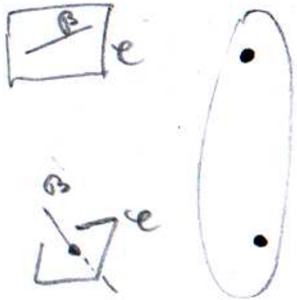
- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů
- vzájemné polohy podprostorů

VZÁJEMNÉ POLOHY OBECNĚ

- $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ … af. podpr. … $\mathcal{A}$ ← $\boxed{\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}}$
- $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ … zaměření

---

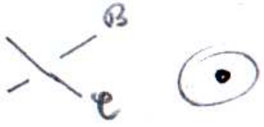
zde stačí obyč. množiny



INCIDENTNÍ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B}$ ← max. možný

RŮZNOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ … $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, ale ne maximální

ROVNOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$ … $\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset \\ \text{a } \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}} \end{array}}$ ← zde potřeba af. struktura



MIMOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$ … jinak

(tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$
a $\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{C}}$)

POZNÁMKY

* předchozí obecná definice zahrnuje (jako obvykle) jisté triviální případy :

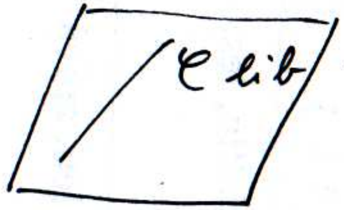
$\mathcal{B}$ = bod

$\mathcal{B} \in \mathcal{E}$ ... INCIDENTNÍ

$\mathcal{E}$ lib $\quad \mathcal{B} \notin \mathcal{E}$ .. ROVNOBĚŽNÉ

$(\vec{\mathcal{B}} = \{o\} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$ lib)

$\mathcal{B} = \mathcal{A}$



vždy ... INCIDENTNÍ

* pro MIMOBĚŽNÉ podpr. se může stát, že sice $\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{E}}$, ale $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}} \neq \{o\}$ ... mají nějaké společné vektory

ani $\vec{\mathcal{B}} \not\supseteq \vec{\mathcal{E}}$

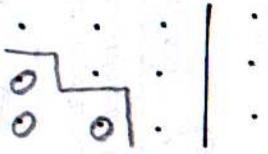
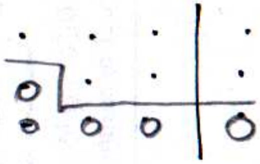
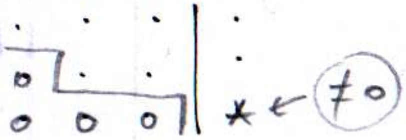
↳ ČÁSTEČNĚ ROVNOBĚŽNÉ

(do dim $\mathcal{A} = 3$ takový příklad nenajdeme)

PŘÍKLAD à la 5.42

$\mathcal{B}, e \subset a$

dim 1 dim 2 dim 3

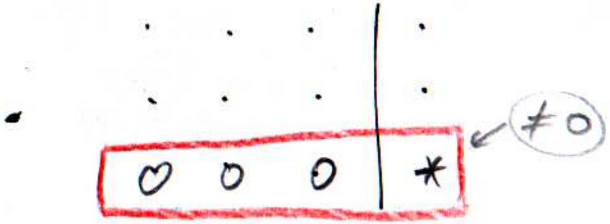
SOUSTAVA ⊛	ŘEŠENÍ $(\mathcal{B} \cap e)$	VZÁJEMNÁ POLOHA
	1 (bod)	$\mathcal{B} \times e$
	∞ (přímka)	$\mathcal{B} \subset e$
	0	$\mathcal{B} \parallel e$
jiný schod. tvar NENÍ možný	$\Longrightarrow$	na mimoběžnost v 3-dim prostoru NENÍ místo !

*

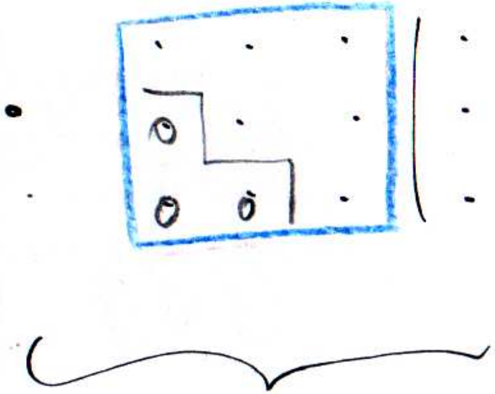
DODATEK K MIMOBĚŽNOSTI *

dim 3

potřebovali bychom současně



aby $\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset}$

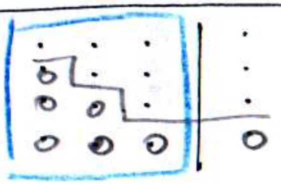
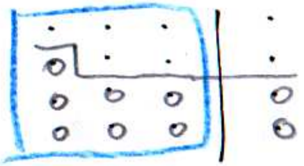
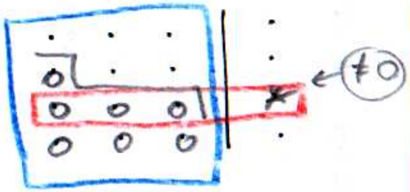
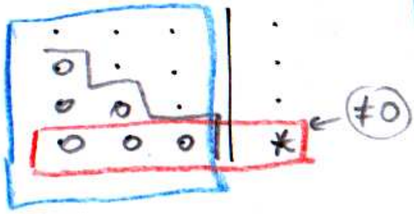


aby $\boxed{\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{C}}}$

NELZE

PŘÍKLAD à la s. 45

$\underset{\text{dim } 1}{\mathcal{B}},\ \underset{\text{dim } \underline{2}}{e} \subset \underset{\text{dim } \underline{4}}{a}$

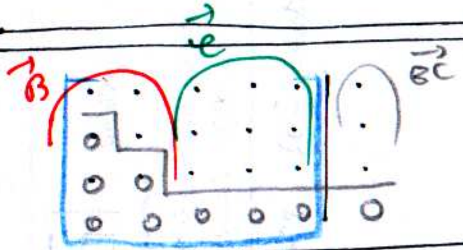
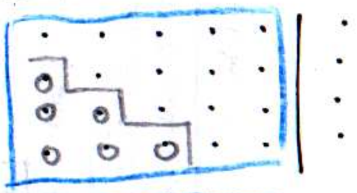
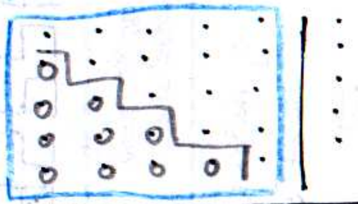
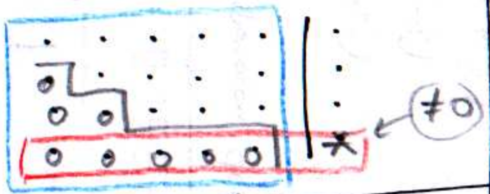
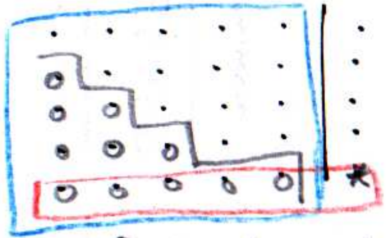
soustava $\circledast$	ŘEŠENÍ	VZÁJEMNÁ POLOHA
	1	$\mathcal{B} \times e$ $\mathcal{B} \cap e \neq 0$ a $\vec{\mathcal{B}} \not\subset \vec{e}$
	∞	$\mathcal{B} \subset e$ $\mathcal{B} \cap e \neq \emptyset$ a $\vec{\mathcal{B}} \subset \vec{e}$
	0	$\mathcal{B} \parallel e$ $\boxed{\mathcal{B} \cap e = \emptyset}$ a $\boxed{\vec{\mathcal{B}} \subset \vec{e}}$
	0	$\mathcal{B} \not\times e$ $\boxed{\mathcal{B} \cap e = \emptyset}$ a $\boxed{\vec{\mathcal{B}} \not\subset \vec{e}}$

hodnost ☐
nemůže být
menší než $\underline{2}$ (= dim e)

DALŠÍ PŘÍKLAD

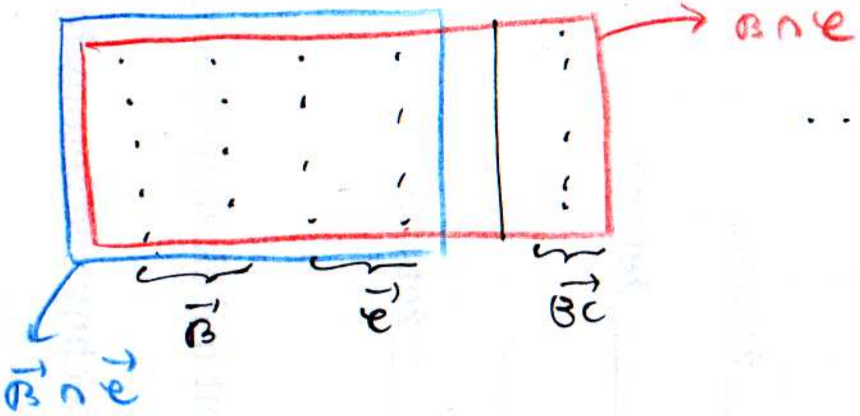
$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ⊂ $\mathcal{A}$

dim 2   dim 3   dim $n \geq 3$

SOUSTAVA (*)	ŘEŠENÍ ($\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$)	VZÁJEMNÁ POLOHA	
	∞^2 (rovina)	$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$	$n \geq 3$
	∞^1 (přímka)	$\mathcal{B}$ X $\mathcal{C}$	$n \geq 4$
	1 (bod)	$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$n \geq 5$
	0	$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$	$n \geq 4$
	0	$\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$	$\underline{\underline{n \geq 5}}$

↑ hodnost □ nemůže být < 3 = dim $\mathcal{C}$

OBECNÉ ZÁVĚRY

- $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \iff \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ … max
- $\vec{\mathfrak{B}} \subseteq \vec{\mathfrak{C}} \iff \vec{\mathfrak{B}} \cap \vec{\mathfrak{C}} = \vec{\mathfrak{B}}$ … max
- 

… $\boxed{\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset \iff \vec{BC} \in \vec{\mathfrak{B}} + \vec{\mathfrak{C}}}$
- MOŽNOSTI …

$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ \ $\vec{\mathfrak{B}} \cap \vec{\mathfrak{C}}$	je max	není max
$\neq \emptyset$	$\subseteq$	X
$= \emptyset$	//	

... TOTÉŽ .... pomocí HODNOSTÍ ...

- hodnost 🟥 $= \dim(\vec{\beta} + \vec{\varepsilon} + \overrightarrow{\sigma c})$
  $= \dim(\overrightarrow{\beta + \varepsilon})$ ... ozn. σ
- hodnost 🟦 $= \dim(\vec{\beta} + \vec{\varepsilon})$ ... ozn. n
- $\max(\dim \vec{\beta}, \dim \vec{\varepsilon})$ ..... ozn. m

- zřejmě platí:

$$\boxed{m \boxed{\leq} n \boxed{\leq} \sigma}$$

- přičemž:

$$\boxed{m \boxed{=} n \iff \boxed{\vec{\beta} \subseteq \vec{\varepsilon}}}$$

nebo $\vec{\beta} \supseteq \vec{\varepsilon}$

$$\boxed{n \boxed{=} \sigma \iff \boxed{\beta \cap \varepsilon \neq \emptyset}}$$

- TEDY

$\beta \cap \varepsilon$ \ $\vec{\beta} \cap \vec{\varepsilon}$	$m = n$	$m < n$
$n = \sigma$	$\subseteq$	X
$n < \sigma$	//	X

DODATKY

$(\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq a$ af. podpr.$)$

① $m \le n \le \sigma \le \dim a$

$m+1$ $m+2$

aby $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, musí být $m \boxed{<} n \boxed{<} \sigma \boxed{\le} \dim a$

TEDY … $\boxed{\mathcal{B} \times \mathcal{C} \Rightarrow m \le \boxed{\dim a - 2}}$

(zejména NADROVINA nemůže být s ničím MIMOBĚŽNÁ)

② předp. $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{a}$ KOMPLEMENTÁRNÍ (doplňkové),

tj. $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} = \vec{a}$ a $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{0\}$

potom $m \boxed{=} \sigma \boxed{=} \dim \vec{a}$ a $\overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{0\}$

TEDY … $\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \boxed{\neq \emptyset} \text{ a je to } \boxed{\text{BOD.}}}$

③ apod.

ÚVOD, PŘEHLED

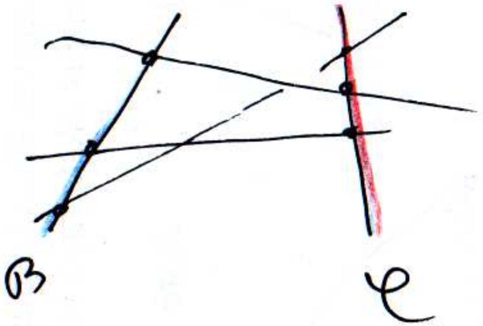
AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů
- vzájemné polohy podprostorů
- příčky

PŘÍČKY

$\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, $\dim \mathcal{B} =: k$, $\dim \mathcal{C} =: l$

$\rightsquigarrow$ af. podprostory (obecněji také jiné podmnožiny)



všechny příčky $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou popsány $(k+l)$ volnými parametry

* obvyklé omezující podmínky: ($\rightsquigarrow$ jednoznačnost)

- příčka procházející daným bodem
- — || — rovnoběžná s daným vektorem
- — || — nejkratší možná ($\rightsquigarrow$ vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$)

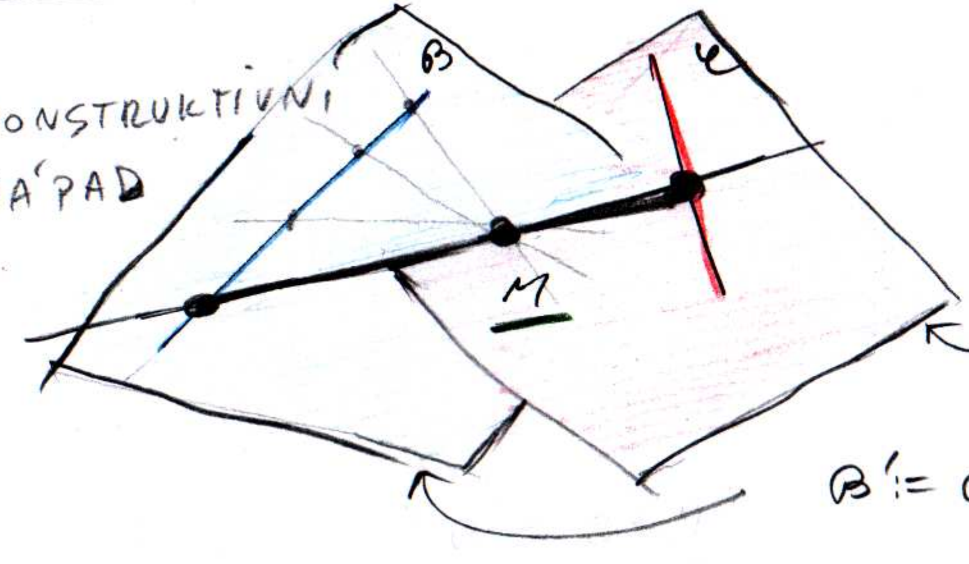
časem

53

* obvyklé nápady jak řešit ....

Ⓐ KONSTRUKTIVNÍ NÁPAD

např. příčku $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jdoucí bodem M ?



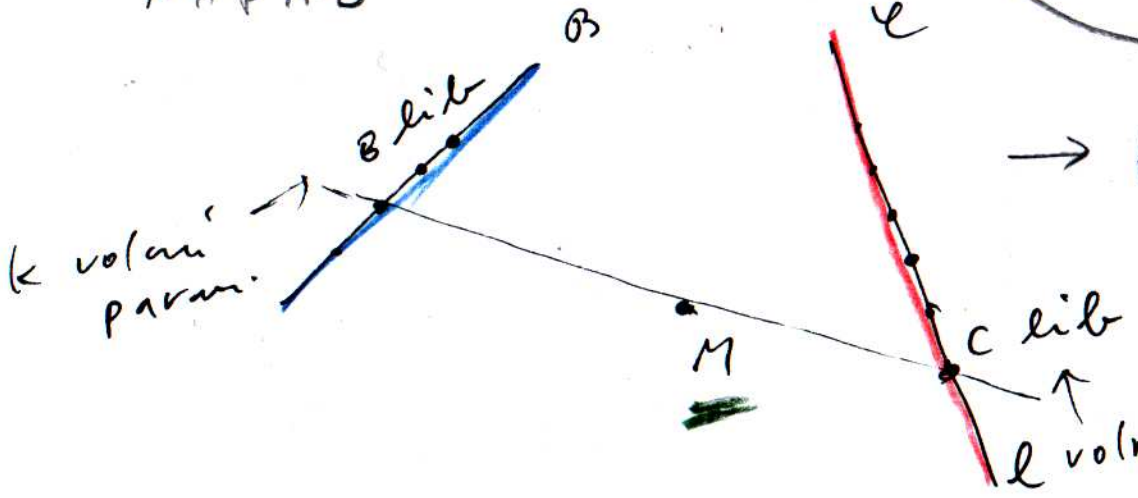
$\mathcal{C}' := \mathcal{C} + M$

$\mathcal{B}' := \mathcal{B} + M$

příčka je určená průnikem $\boxed{\mathcal{B}' \cap \mathcal{C}'}$

(resp. $\mathcal{B}' \cap \mathcal{C}$ = = koncový bod na $\mathcal{C}$)

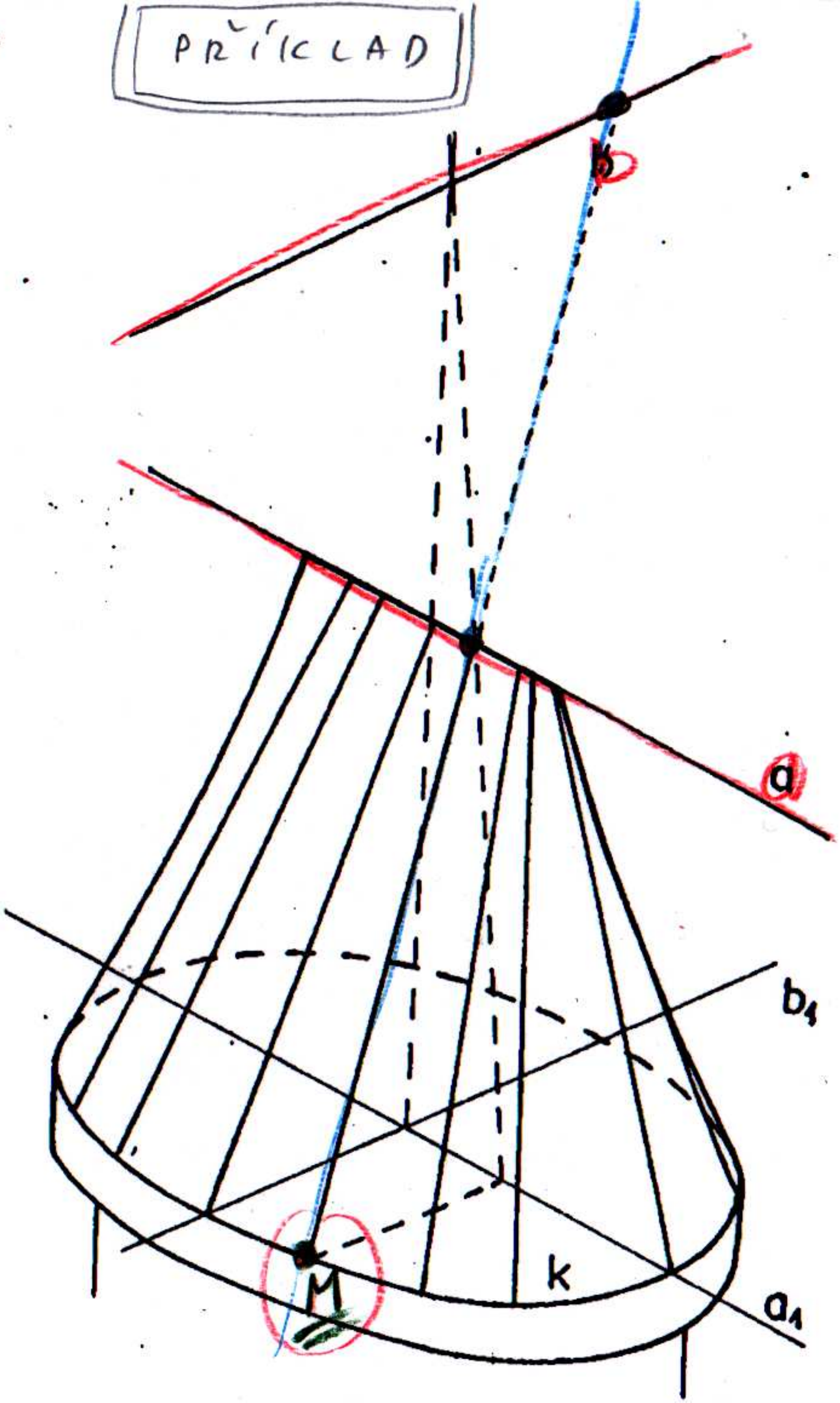
Ⓑ ANALYTICKÝ NÁPAD



→ hledáme $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$ tak, aby $\boxed{M \in \text{přímce } BC}$

(tj. $\overrightarrow{MB}$ a $\overrightarrow{MC}$ lin. závislé)

PRÍKLAD



ŠTRAMERSKÁ TRÚBA

||

spec. PRÍMKOVÁ PLOCHA
(RULED SURFACE)

||

SYSTÉM
PRÍČEK
mimob. a, b
s. dodat.
podm. $M \in k$

↑
kružnica

ÚVOD, PŘEHLED

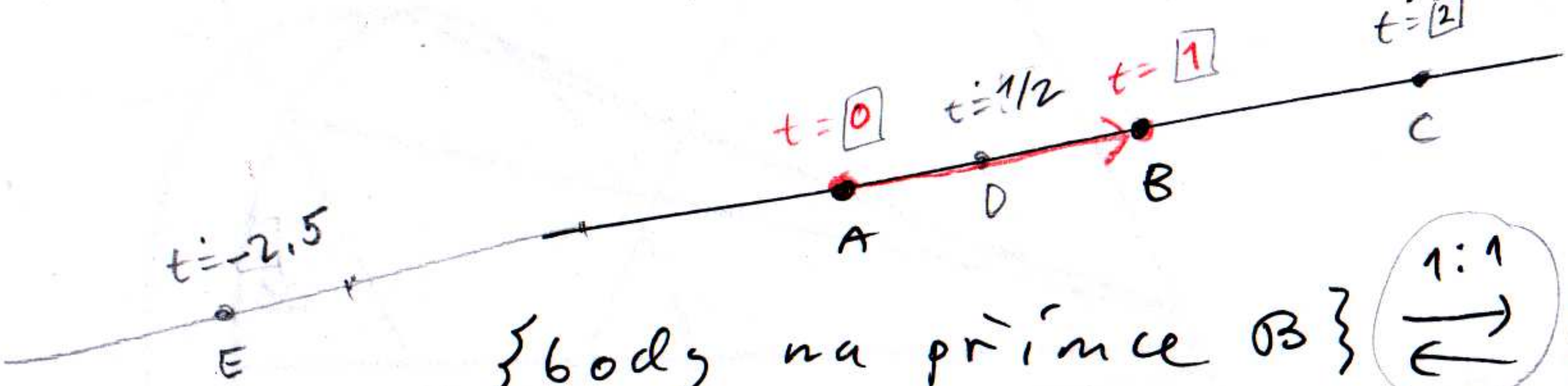
AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů
- vzájemné polohy podprostorů
- příčky
- uspořádání, omezené podpr., konvexní množiny

USPOŘÁDÁNÍ

* UMÍME

dim 1 … afinní přímka parametricky: $\mathcal{B} = \{ X = A + t\vec{AB} \mid t \in \mathbb{R} \}$



$$\{\text{body na přímce } \mathcal{B}\} \overset{1:1}{\rightleftarrows} \{\text{reálná čísla } \mathbb{R}\}$$

určeno lib. param.

* uspořádání ℝ ⇝ "uspoř." bodů na přímce

$1 \leq 2$ ⇝ "$B \leq C$"

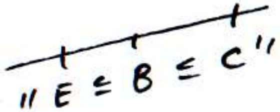
$-2{,}5 \leq 1$ ⇝ "$E \leq B$"

… def. nezávisí na určujícím vektoru $\vec{AB}$, ale pouze na jeho ORIENTACI.

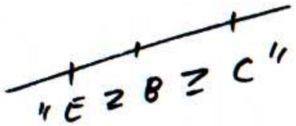
(afinní)

MOŽNÁ "USPOŘ." bodů na přímce jsou DVĚ:

buď


"E ≤ B ≤ C"

nebo

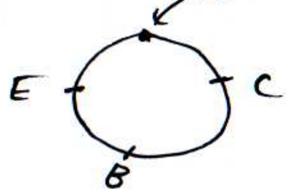

"E ≥ B ≥ C"

("E=B" ⟺ E=B .. body splývají)

* Bod "B je MEZI E a C",
pokud "E ≤ B ≤ C" nebo "E ≥ B ≥ C"

* ÚSEČKA AB = { všechny body na přímce AB,
které jsou MEZI A a B }
(tj. včetně krajních bodů)

⇛ vzpomeňme rozdíl mezi
afinní (eukleid.) přímkou a projektivní přímkou



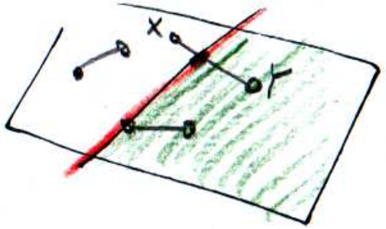
ODVOZENÉ POJMY

dim 1 .. POLO-PŘÍMKA

* POLO-PROSTOR

(dim n)

dim 2 .. POLO-ROVINA



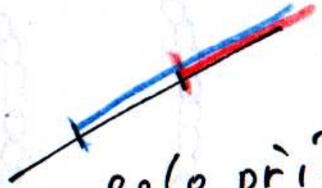
- hraniční podpr. = nadrovina (dim n-1)
- rozděluje afinní prostor na DVA polo-prostory:

body X a Y leží v OPAČNÝCH polo-prostorech, pokud průnik XY s hraniční nadrovinou je vnitřním bodem ÚSEČKY XY.

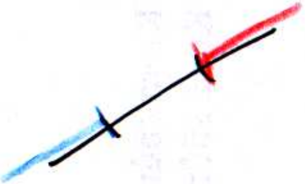
(* z def. ⇝ hraniční nadrovina patří do obou polo-prostorů)

PRŮNIKY POLO-PROSTORŮ

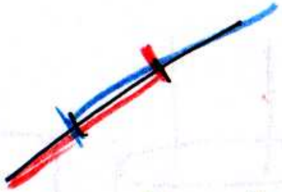
dim 1



polopřímka



∅

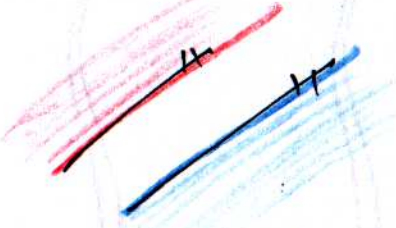


úsečka

dim 2

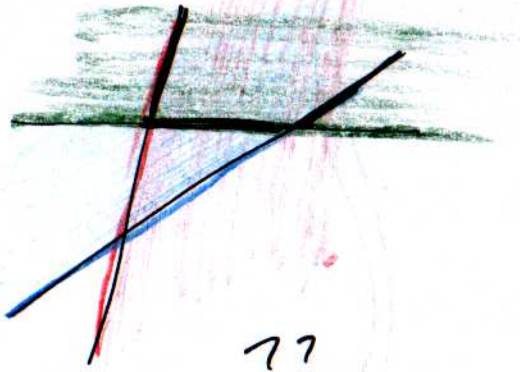
úhel

pás



∅

trojúhelník

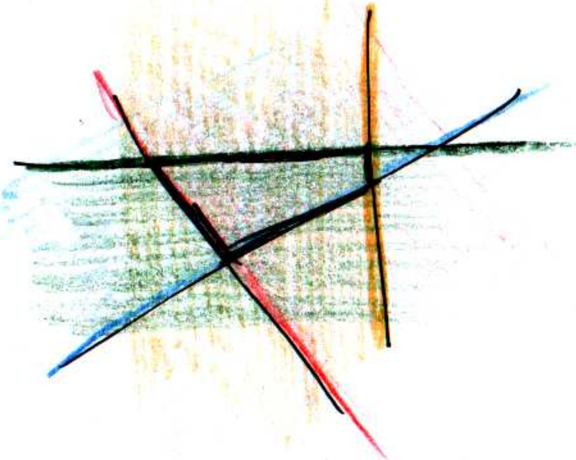


??

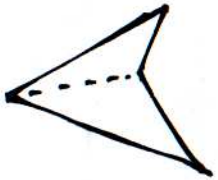
. . . atd.

J9

dim 2 ... čtyři (a více) polo-rovin i



← pokud je průnikem MNOHOÚHELNÍK, pak jedině KONVEXNÍ!

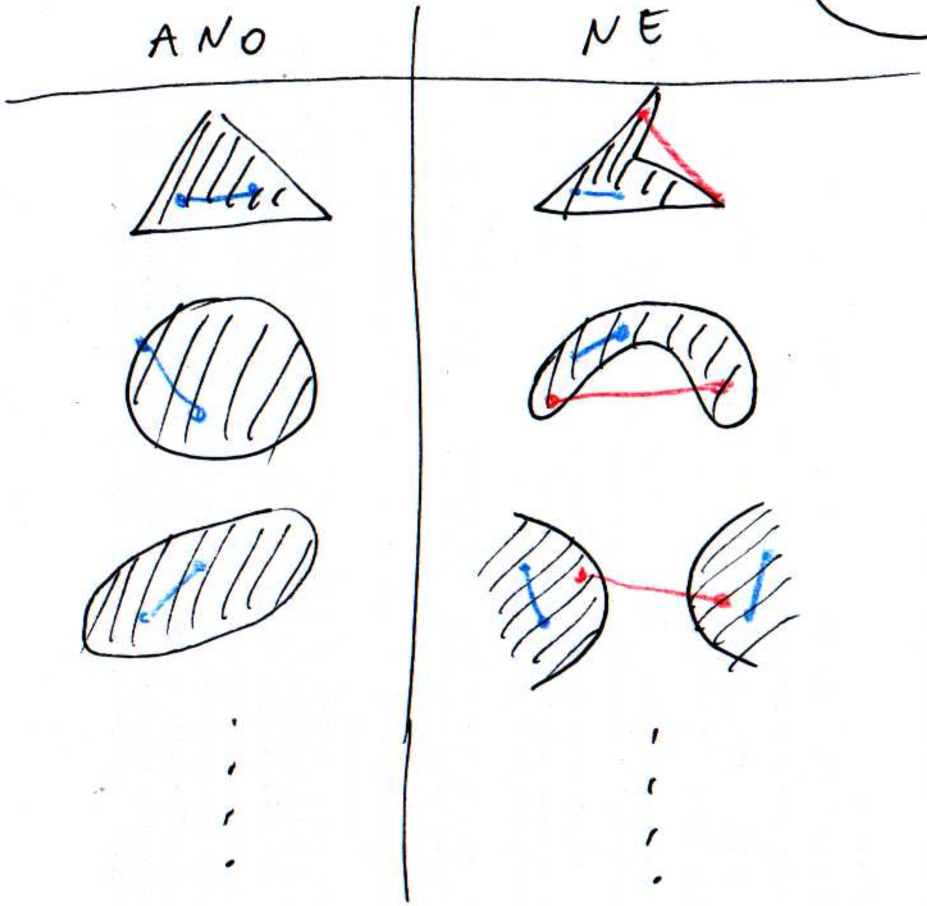
( NEKONVEXNÍ = sjednocení Δ)

dim 3

... prostorový úhel, mnohostěny, ...

KONVEXNÍ MNOŽINA

PODMNOŽINA AFINNÍHO PR.



- DEF .. PODMOŽINA $M \subseteq a$ taková, že pro lib $X, Y \in M$ také celá ÚSEČKA XY patří do M.

- POSTŘEHY

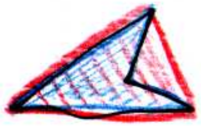
  M, N ... KONVEXNÍ

  $\Rightarrow$ $M \cap N$ KONVEXNÍ

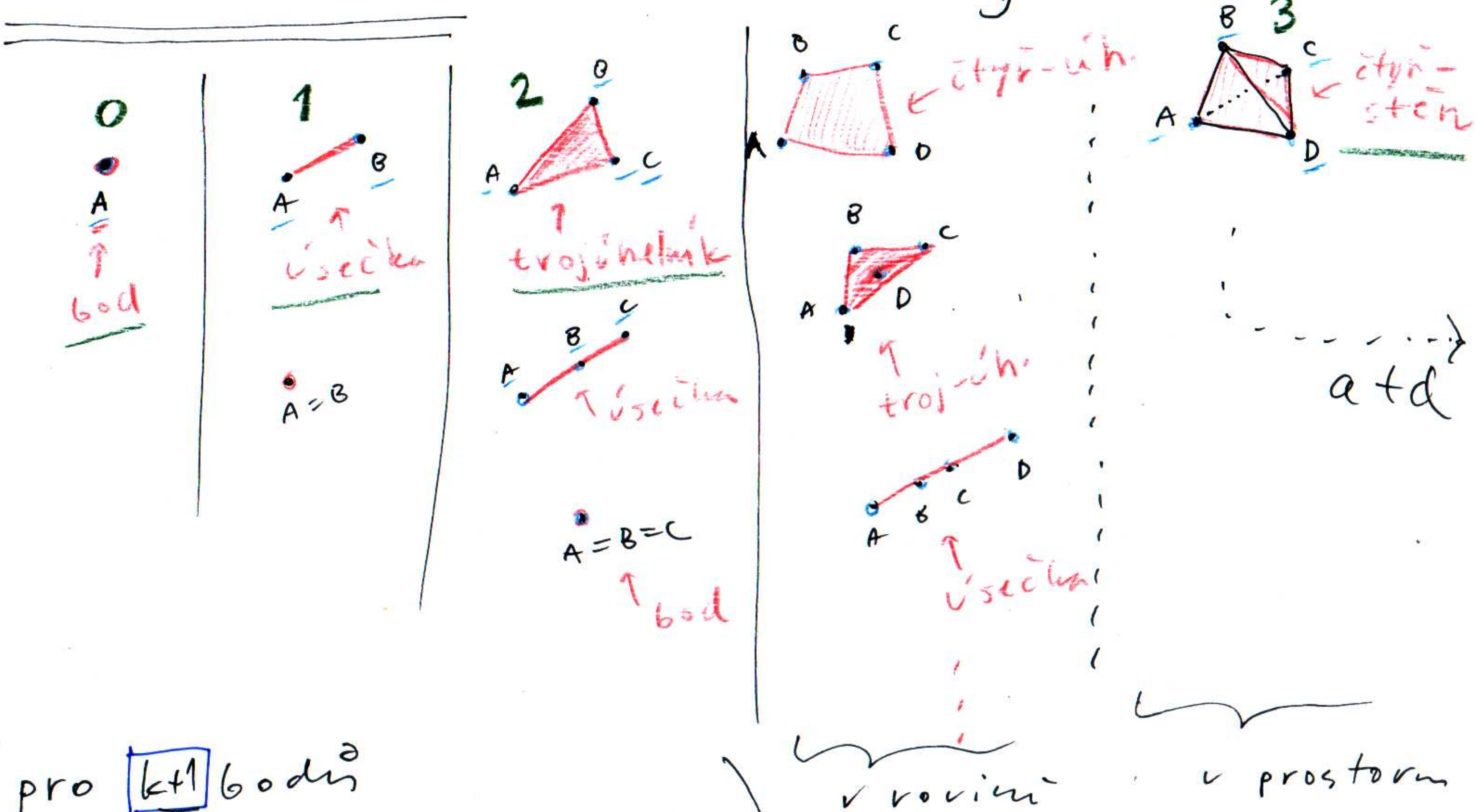
  ale $M \cup N$ NEMUSÍ být konvexní

- KONV. OBAL množiny $M \subseteq a$

  = nejmenší [redacted] konvexní nadmnožina M



KONVEXNÍ OBAL konečné množiny bodů

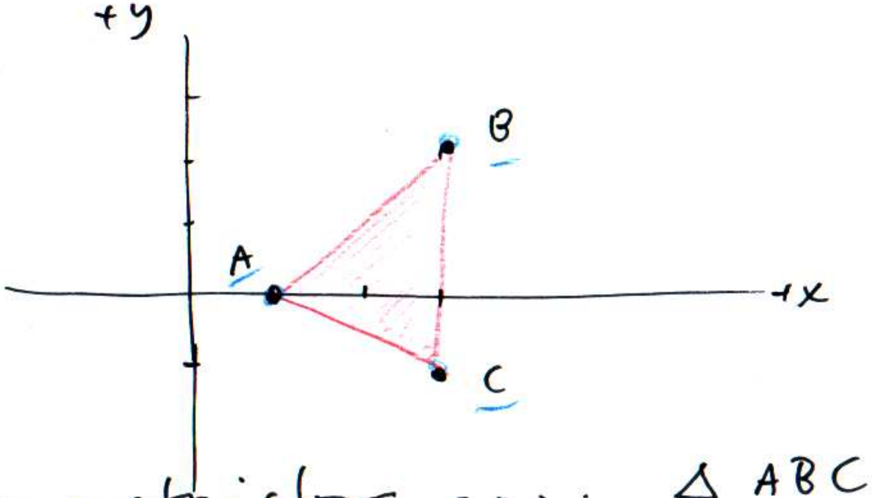


(pro $\boxed{k+1}$ bodů
v OBECNÉ POLOZE
⟶ $\boxed{k}$-rozměrný SIMPLEX)

62 JAK POPSAT ANALYTICKY ?

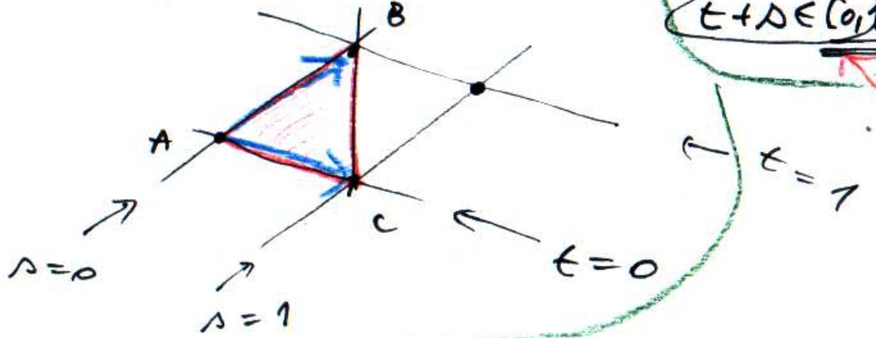
PŘ.

A = [1,0]
B = [3,2]
C = [3,−1]



ⓐ parametricky .... $\triangle ABC = \{ X = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \mid t \in [0,1],\ s \in [0,1],\ t+s \in [0,1] \}$!

✓

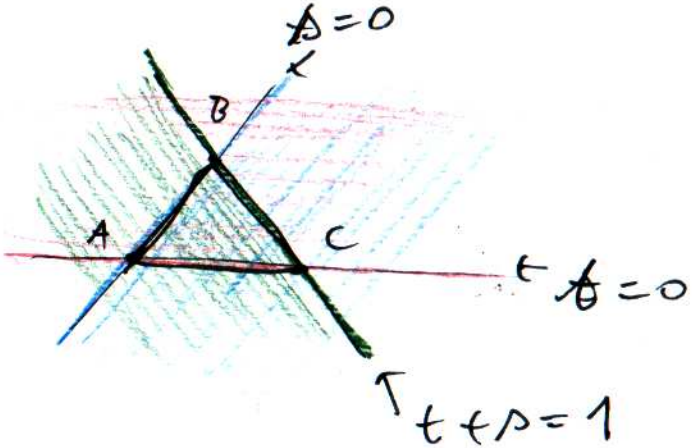


ekvivalentní

$(1 \geq)\ t \geq 0$

$(1 \geq)\ s \geq 0$

$(0 \leq)\ t+s \leq 1$



→ Funguje obecně (stačí dosadit A, B, C)
lib. dim

ⓑ <u>rovnicově</u>

přímka $AB = \{x-y=1\} \rightsquigarrow$ polo-rovina AB obs. $C = \{\underline{x-y \boxed{\geq} 1}\}$

—″— $BC = \{x=3\} \rightsquigarrow$ .... $\{\underline{x \boxed{\leq} 3}\}$

—″— $AC = \{x+2y=1\} \rightsquigarrow$ .... $\{\underline{x+2y \boxed{\geq} 1}\}$

$$\triangle ABC = \left\{ \begin{array}{r} x-y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x+2y \geq 1 \end{array} \right\}$$

↗

takto pouze v <u>rovině</u> (přímka na hranici popsána jednou rovnicí..)

ⓒ, pomocí tzv. BARYCENTRICKÝCH souřadnic

$$\triangle ABC = \left\{ "X = t_A A + t_B B + t_C C" \;\middle|\; \begin{array}{c} t_A + t_B + t_C = 1 \\ \boxed{\begin{array}{c} t_A \geqq 0 \\ t_B \geqq 0 \\ t_C \geqq 0 \end{array}} \end{array} \right\}$$

VELMI UNIVERZÁLNÍ POPIS !

(pro lib. konvexní obal bodů)
v lib. prostoru

.... viz DÁLE

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů
- vzájemné polohy podprostorů
- příčky
- uspořádání, omezené podpr., konvexní množiny
- barycentrické souřadnice

BARYCENTRICKÉ SOUŘADNICE

~> BARYCENTRUM = TĚŽIŠTĚ

pro body na přímce AB:

$$"X = \underbrace{\frac{1}{3}}_{t_A} A + \underbrace{\frac{2}{3}}_{t_B} B"$$

$\boxed{t_A + t_B = 1}$!!

což znamená:

$$\boxed{X = P + \underbrace{\frac{1}{3}}_{t_A}\overrightarrow{PA} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{t_B}\overrightarrow{PB}, \text{ pro lib. } P}$$

dosaď P = A

$$\boxed{X = A + \cancel{\frac{1}{3}\,o} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$

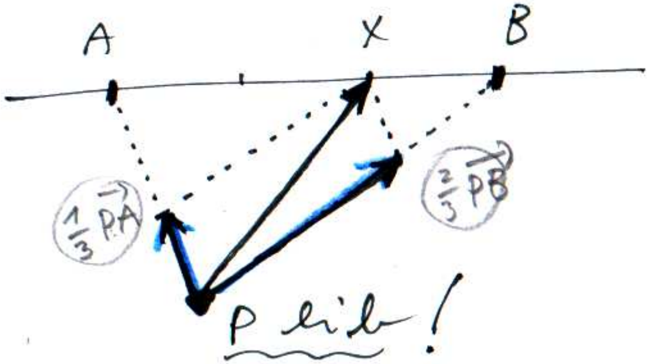
... std. parametrické vyjádření

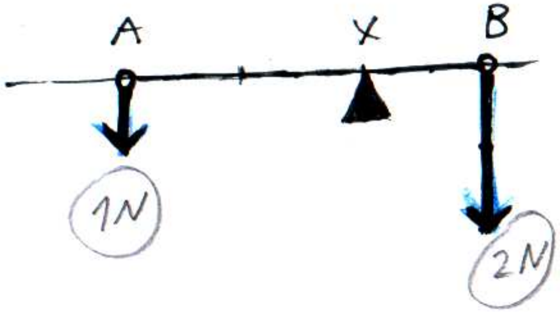
dosaď P = X

$$\boxed{o = \frac{1}{3}\overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XB}} \quad / \cdot 3$$

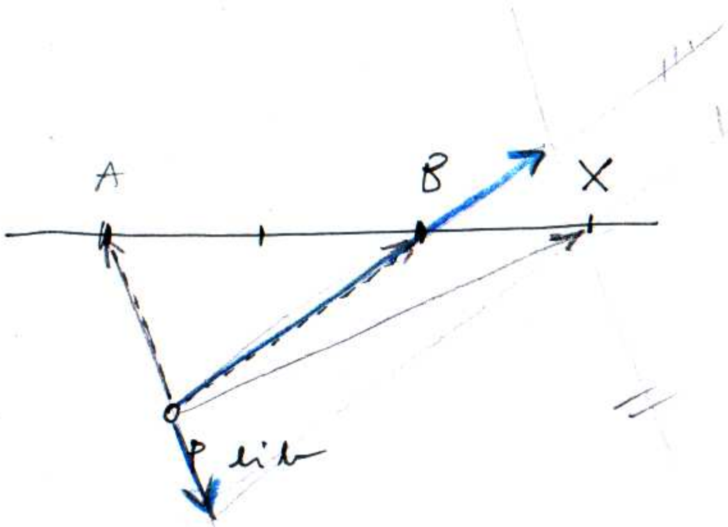
... "rovnováha na PÁCE"

$o = 1 \cdot \overrightarrow{XA} + 2 \cdot \overrightarrow{XB}$

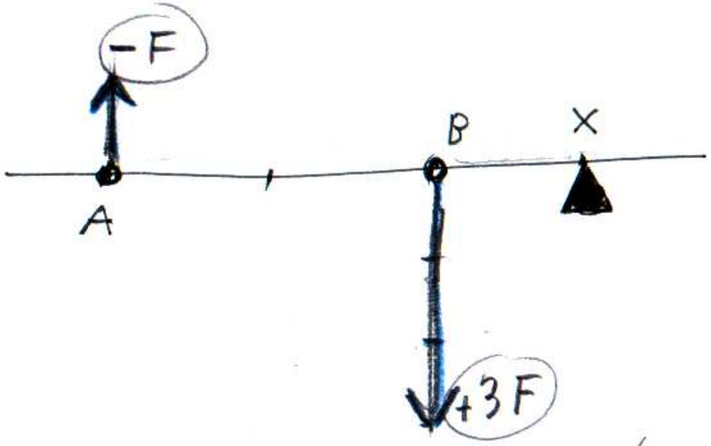




obdobné cvičení:



$$X = P + \boxed{-\tfrac{1}{2}}\,\overrightarrow{PA} + \boxed{\tfrac{3}{2}}\,\overrightarrow{PB}$$



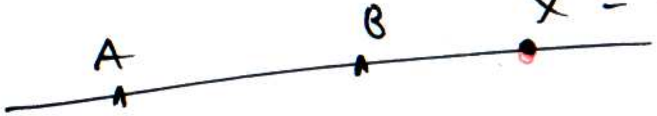
$$o = \boxed{-1}\,\overrightarrow{XA} + \boxed{3}\,\overrightarrow{XB} \quad \Big/ : (-1+3).$$

$$o = \boxed{-\tfrac{1}{2}}\,\overrightarrow{XA} + \boxed{\tfrac{3}{2}}\,\overrightarrow{XB}$$

$$\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 1\right)$$

$$\text{"}X = \boxed{-\tfrac{1}{2}}\,A + \boxed{\tfrac{3}{2}}\,B\text{"}$$

TEDY



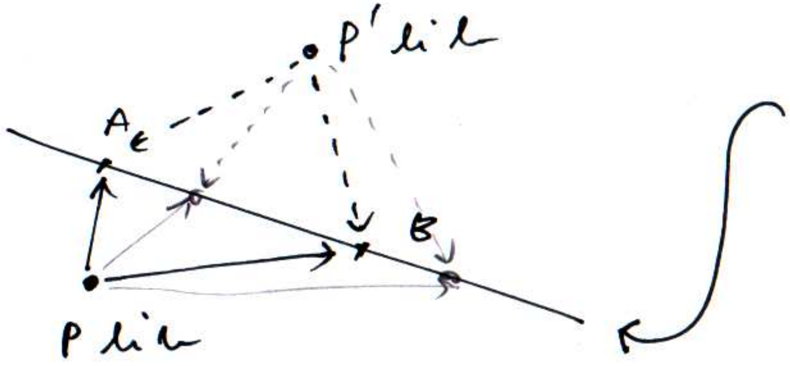
"$X = t_A A + t_B B$", $t_A + t_B = 1$

DEF: * t_A, t_B … BARYCENTRICKÉ SOUŘ. bodu X – na přímce AB
vzhledem k bodům A, B

//

(obyč.) souřadnice vektoru $\overrightarrow{PX}$ vzhledem k bázi $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ pro lib. P

POZN *



pro lib. $P \notin AB$ je přímka AB vskutku popsána podmínkou $t_A + t_B = 1$ … !

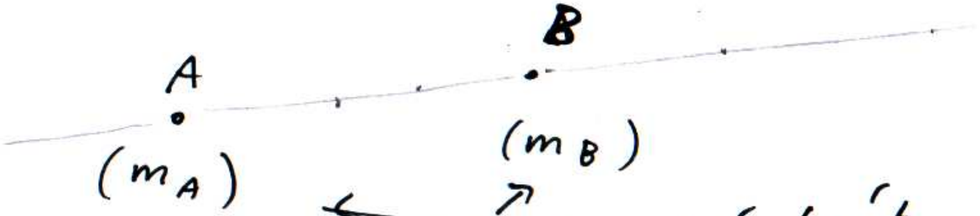
68 DALŠÍ POZN.:

* "$X = t_A A + t_B B$", $t_A + t_B = 1$

$\Updownarrow$

X = TĚŽIŠTĚ hmotné soustavy s vahami t_A, t_B v bodech A, B

* OBECNĚJI ....

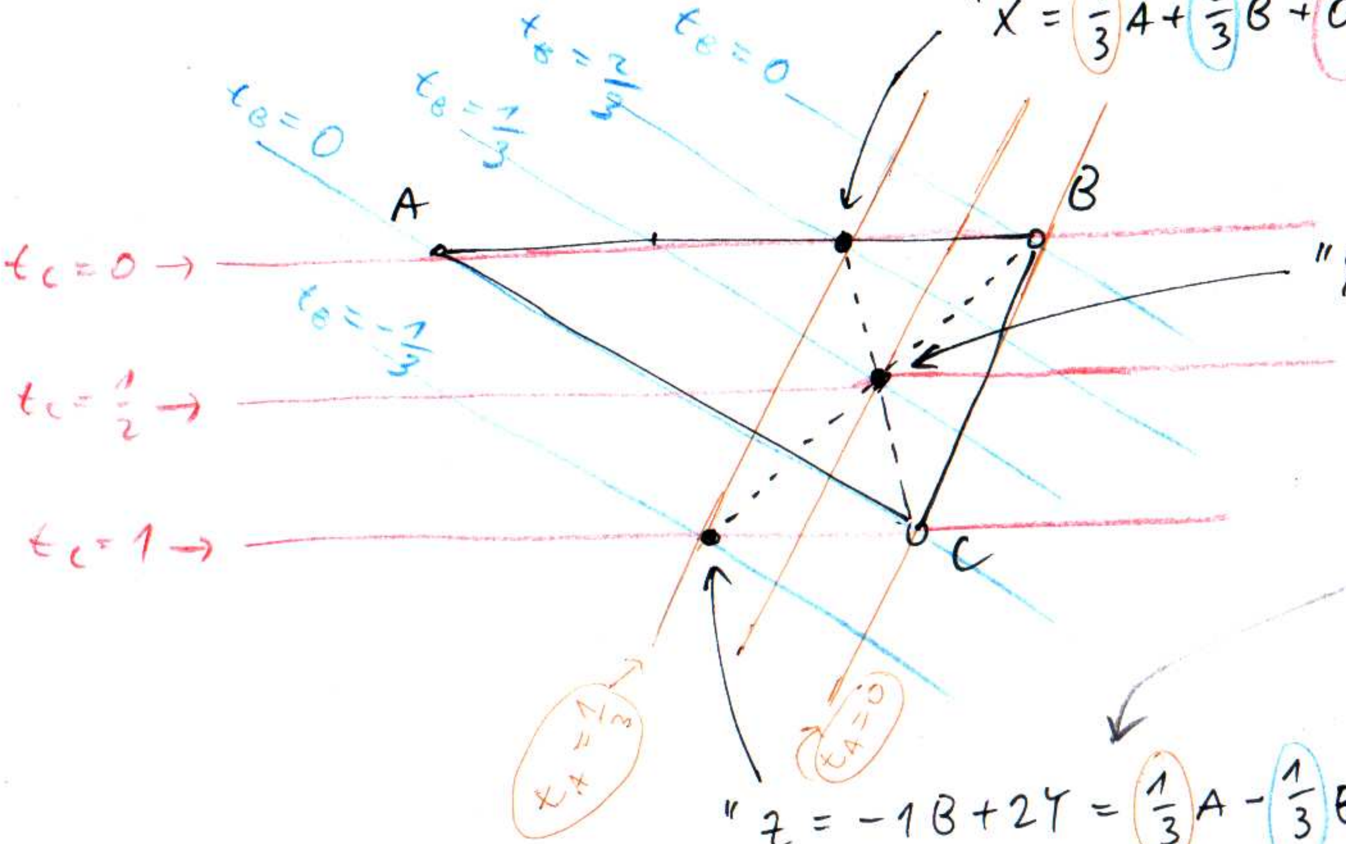


nemusí být $m_A + m_B = 1$
(těžiště určeno poměrem ...)

Baryc. souř. TĚŽIŠTĚ:

$$\text{"}X = \underbrace{\frac{m_A}{m_A + m_B}}_{t_A} A + \underbrace{\frac{m_B}{m_A + m_B}}_{t_B} B\text{"} \longrightarrow t_A + t_B = 1$$

69 BARYC. SOUŘ. pro body v rovině ABC:



$$"X = \overset{t_A}{\frac{1}{3}}A + \overset{t_B}{\frac{2}{3}}B + \overset{t_C}{0}C"$$

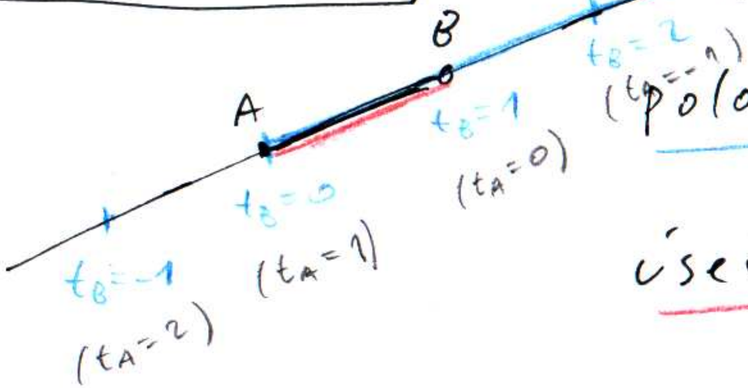
$$"Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}C = \underset{t_A}{\frac{1}{6}}A + \underset{t_B}{\frac{1}{3}}B + \underset{t_C}{\frac{1}{2}}C"$$

$$"Z = -1B + 2Y = \underset{t_A}{\frac{1}{3}}A - \underset{t_B}{\frac{1}{3}}B + \underset{t_C}{1}C"$$

všude $\boxed{t_A + t_B + t_C = 1}$

✓

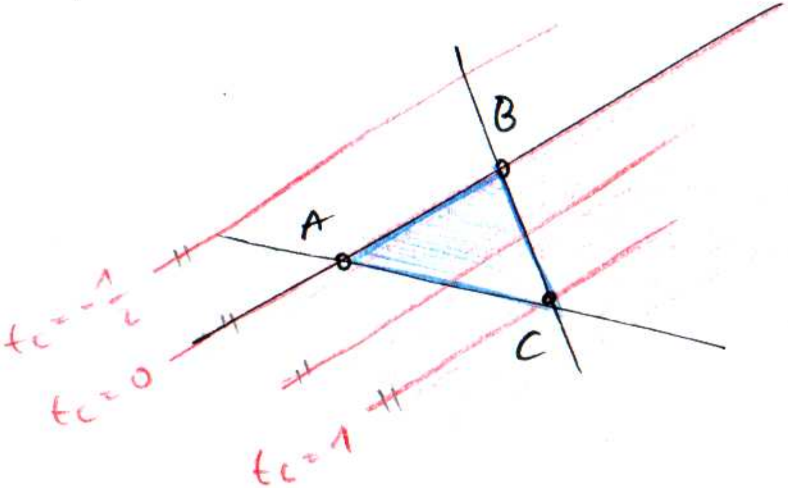
SHRNUTÍ



přímka $AB = \{ \text{"} X = t_A A + t_B B \text{"} \mid \underline{t_A + t_B = 1} \}$

polo-přímka $AB = \{ \text{—//—} \mid \underline{t_A + t_B = 1} \; t_B \geq 0 \}$

úsečka $AB = \{ \text{—//—} \mid \underline{t_A + t_B = 1} \; t_A \geq 0, t_B \geq 0 \}$



rovina $ABC = \{ \text{"} X = t_A A + t_B B + t_C C \text{"} \mid \underline{t_A + t_B + t_C = 1} \}$

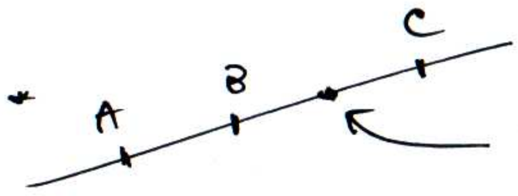
polo-rovina AB obs. C $= \{ \ldots$ navíc $\underline{t_C \geq 0} \}$

$\triangle ABC = \{ \ldots$ navíc $t_A \geq 0, \; t_B \geq 0 \}$

(zde A, B, C v obecné poloze)

71 CO KDYŽ BODY A, B, C NEJSOU V OBECNÉ POLOZE ?

*

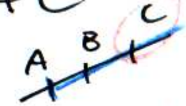


$$\text{"}X = -A + 2B = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{2}{3}C =$$
$$\underbrace{= \tfrac{1}{6}A + \tfrac{1}{4}B + \tfrac{7}{12}C = \ldots\ldots\text{"}}_{\text{BARYC. SOUŘADNICE NEJSOU URČENY JEDNOZNAČNĚ!}}$$

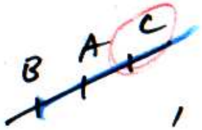
* AVŠAK STÁLE PLATÍ (!!!):

$\{\text{"}X = t_A A + t_B B + t_C C\text{"} \mid t_A + t_B + t_C = 1\}$ = přímka AB
(= př. BC = př. AC)

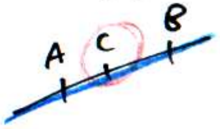
$\{$ —"— , navíc $t_C \geq 0\}$ = polopřímka AC



(resp.

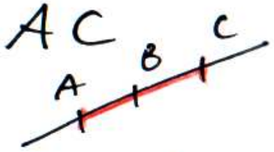


,

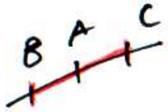


)

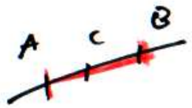
$\{$ —"— , navíc $t_A, t_B, t_C \geq 0\}$ = úsečka AC



(resp.



,



)

OBECNE

Pro lib. body $A_1, A_2, \ldots$ v lib. af. prostoru (v lib. poloze):

- afinní obal bodů $A_1, A_2, \ldots$ =

$$= \{ \text{"}X = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \ldots\text{"} \mid t_1 + t_2 + \ldots = 1. \}$$

- konvexní obal bodů $A_1, A_2, \ldots$ =

$$= \{ \ldots \text{totéž, navíc podm. } \begin{matrix} t_1 \geq 0 \\ t_2 \geq 0 \\ \vdots \end{matrix} \}$$

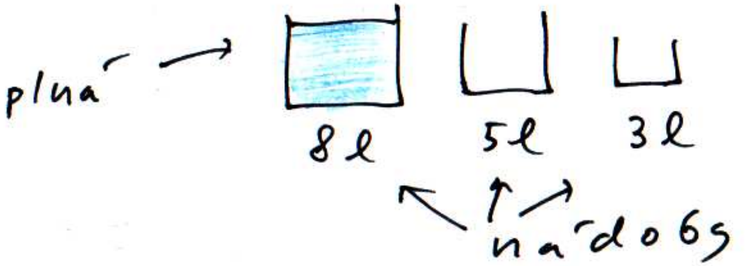
- TĚŽIŠTĚ hmotné bodové soustavy $A_1, A_2, \ldots$ s vahami $m_1, m_2, \ldots$

$$= \text{"} \underset{\frac{m_1}{m_1+m_2+\ldots}}{\boxed{t_1}} A_1 + \underset{\frac{m_2}{m_1+m_2+\ldots}}{\boxed{t_2}} A_2 + \ldots \text{"} \quad \ldots$$

TYPICKÝ PŘÍKLAD

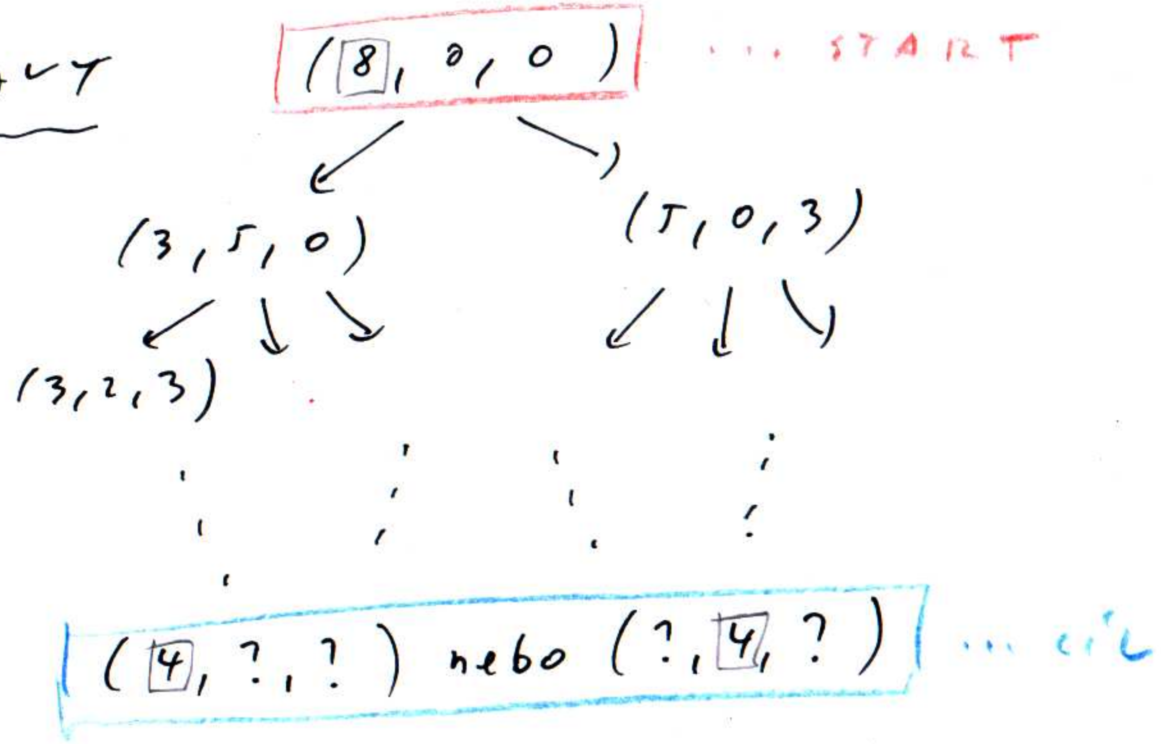
(.. kromě těžišť ...)

... "3 JUG PUZZLE"



¿¿ Jak naměřit právě 4l ??

STAVY



CESTA V ORIENT. GRAFU

⋮

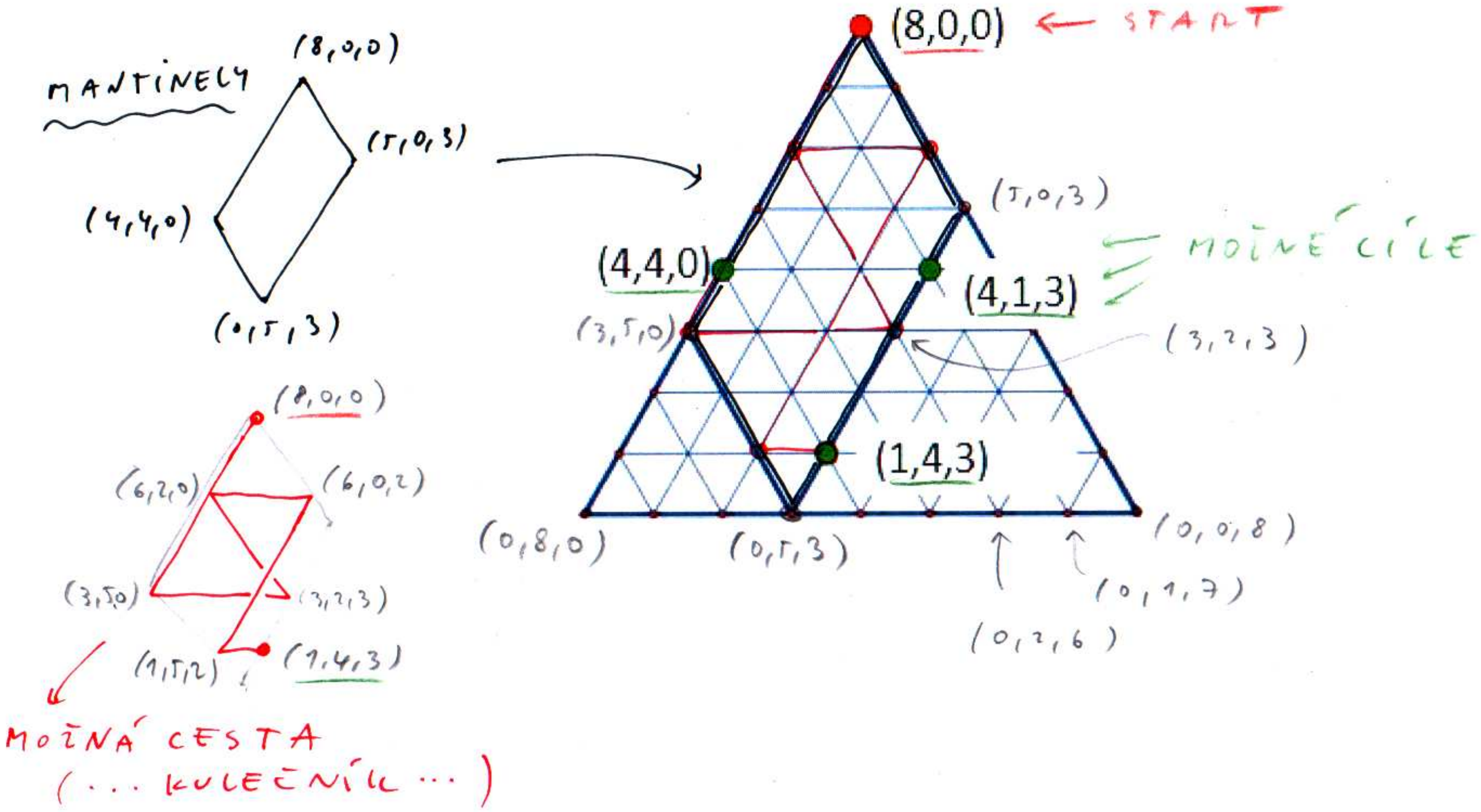
VŠUDE

(a, b, c)

$\boxed{a+b+c = 8}$

... KONST!

TYPICKÉ ŘEŠENÍ



OBECNE

Pro lib. body $A_1, A_2, \ldots$ v lib. af. prostoru (v lib. poloze):

- afinní obal bodů $A_1, A_2, \ldots$ =

  $$= \{\ \text{"}X = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \ldots\text{"} \mid t_1 + t_2 + \ldots = 1.\ \}$$

- konvexní obal bodů $A_1, A_2, \ldots$ =

  $$= \{\ \ldots \text{totéž, navíc podm. } \begin{matrix} t_1 \geq 0 \\ t_2 \geq 0 \\ \vdots \end{matrix}\ \}$$

- TĚŽIŠTĚ hmotné bodové soustavy $A_1, A_2, \ldots$ s vahami $m_1, m_2, \ldots$

  $$= \text{"}\ \underbrace{t_1}_{\frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots}} A_1 + \underbrace{t_2}_{\frac{m_2}{m_1+m_2+\cdots}} A_2 + \ldots\ \text{"}\quad \ldots$$

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

- obecný afinní prostor
- afinní podprostor
- afinní zobrazení
- souřadnice, přechody
- průnik, sjednocení, součet podprostorů
- vzájemné polohy podprostorů
- příčky
- uspořádání, omezené podpr., konvexní množiny
- barycentrické souřadnice
- poznámky a shrnutí

POZOR

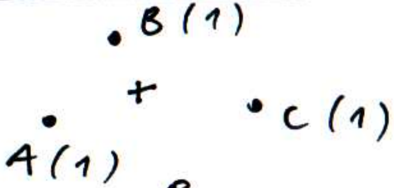
- Těžiště hmotné $\overbrace{}^{\text{bodové}}$ soustavy se stejnými vahami

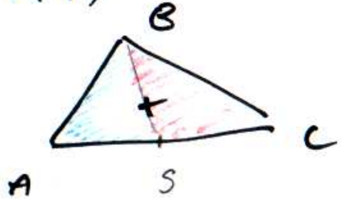
NEMUSÍ BÝT TOTÉŽ CO

- těžiště konvexního obalu bodů!

---

① ANO

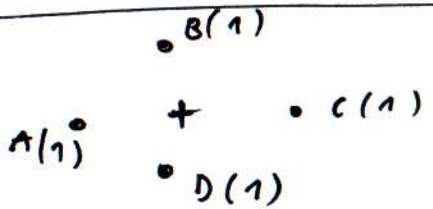
Těžiště  = "$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$"

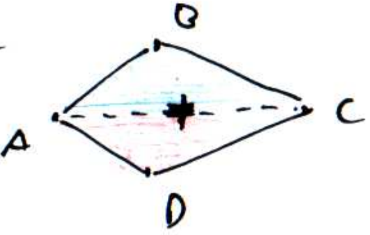
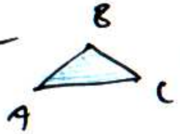
Těžiště  = "$\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}S$" $=$ "$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$"

"$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$"

---

② NEMUSÍ

Těžiště  = "$\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$"

Těžiště  = $\frac{1}{2}$ těžiště  + $\frac{1}{2}$ těžiště 

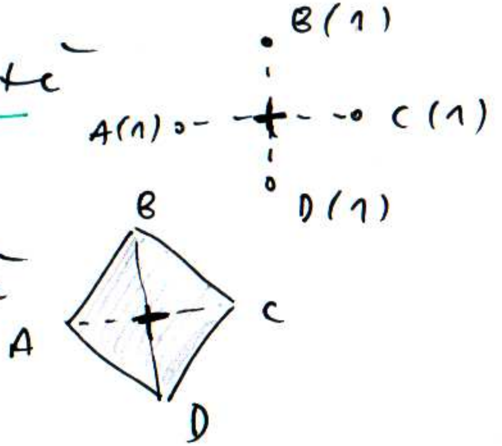
= "$\frac{1}{6}(A+B+C) + \frac{1}{6}(A+C+D)$"

= "$\frac{1}{3}A + \frac{1}{6}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}D$"

③ může

Těžiště

Těžiště



čtverec

Body v OBECNÉ POLOZE

⇓

Těžiště hmot. soust... = Těžiště konvex. obalu...

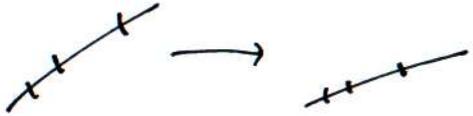
POZNÁMKA ← DŮLEŽITÁ!

str. 23

· AFINNÍ ZOBRAZENÍ zachovávají:

def
- * kolin. bodů

- * poměry trojic kolin. bodů



- * rovnoběžnost

alg. char. → * indukuje zobr. mezi vekt. prostory
LINEÁRNÍ .... ← str. 27

- zach. lib. podprostory
- ... lib. polo-prostory
- zach. úsečky
- ... KONVEXNÍ množiny!

alt. char. → * ... BARYC. SOUŘADNICE!
(tj. těžiště bodových hmot. soustav)

AFINNÍ GEOMETRIE — SHRNUTÍ

- (těleso $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ vektorový prostor V $\rightsquigarrow$)
- Afinní prostor $\mathcal{A}$ a podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$
- jeden podpr. .... analytická vyjádření
- dva podpr. .... vzájemné polohy
- více podpr. .... příčky
- omezené podpr. .... polo-prostory, konvexní obaly, ...
  úsečky

... dosud pouze INCIDENCE, ROVNOBĚŽNOST,
USPOŘÁDÁNÍ, SPOJITOST

---

za chvíli navíc **SHODNOST** ....

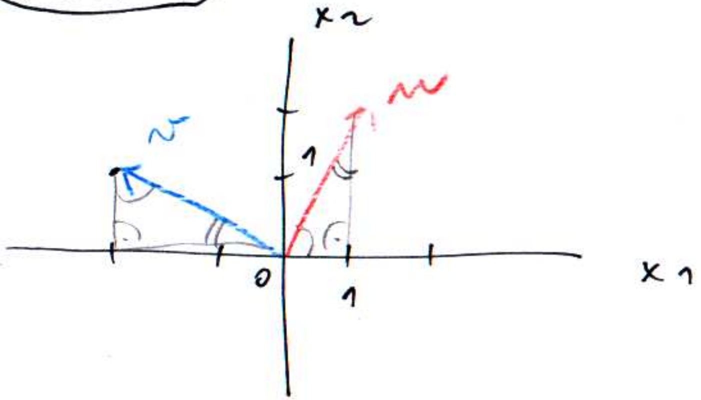
ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů

ZE ŠKOLY ZNÁME (STŘEDNÍ)



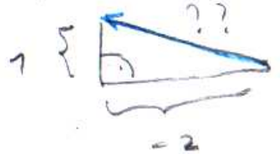
vzhledem ke kartézské souř. soust.

$v = (-2,1)$ … vektor (V)

$\|v\| \overset{!}{=} \sqrt{(-2)^2+1^2}$ … velikost $(\mathbb{R})$

$= \sqrt{5}$

pyth. věta



$u = (1,2)$ … vektor

? $u \perp v$ … $u \bullet v \overset{!}{=} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1$

$= -2+2 = 0$

podobné △

Obecně

$u = (u_1, u_2, \dots)$, $v = (v_1, v_2, \dots)$

norma

ⓐ $\|v\| \overset{!}{=} \sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \dots} = \sqrt{v \bullet v}$

ⓑ $u \bullet v \overset{!}{=} u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots$

↖ skal. součin u a v

Z VYSOKÉ ŠKOLY ZNÁME

algebra II

SKALÁRNÍ SOUČIN ... $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

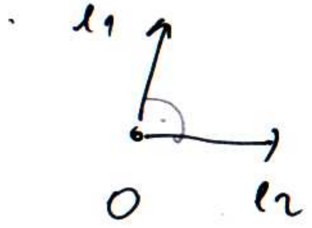
- SYMETRICKÉ ... tj. $u \bullet v = v \bullet u$
- BI-LINEÁRNÍ = LINEÁRNÍ V KAŽDÉ SLOŽCE !!!

  ... tj. $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$

  a $u \bullet (\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{k} v) = k \cdot (u \bullet v)$ ...
- "POZITIVNÍ DEFINITNOST" ... tj. $u \neq 0 \Rightarrow \boxed{u \bullet u > 0}$

POZN. * v souřadnicích počítáme jako v ⓑ, pouze když KARTÉZSKÁ SOUŘ. SOUST.!

* POZITIVNÍ DEF. $\Longrightarrow$ každý $v \in V$ má dobře def. velikost $\|v\| = \sqrt{v \bullet v}$ ⓐ



← KARTÉZSKÁ SOUŘ. SOUST =

= báze $(e_1, e_2, \ldots)$ je

ORTO-NORMÁLNÍ

tj. $$e_i \bullet e_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

VSKUTKU:

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + \ldots$$

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + \ldots$$

BI-LINEARITA

$$\underline{u} \bullet \underline{v} \;\textcircled{=}\; u_1 v_1 (\overbrace{\underline{e}_1 \bullet \underline{e}_1}^{1}) + u_1 v_2 (\overbrace{\underline{e}_1 \bullet \underline{e}_2}^{0}) + \ldots$$

$$+ u_2 v_1 (\underbrace{\underline{e}_2 \bullet \underline{e}_1}_{0}) + u_2 v_2 (\underbrace{\underline{e}_2 \bullet \underline{e}_2}_{1}) + \ldots$$

$$+ \ldots$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots$$

ZÁKLADNÍ NEROVNOSTI

POZITIVNÍ DEFINITNOST:

- $u \cdot u \boxed{\geq} 0$, přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u = o}$.

$$\Downarrow$$

- Cauchyho-Schwarzova nerovnost:

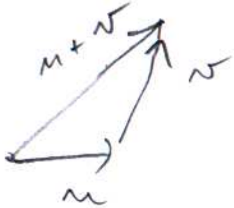
lin. závislé ↓

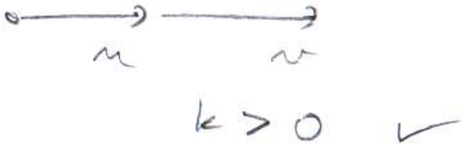
$|u \cdot v| \boxed{\leq} \|u\| \cdot \|v\|$, přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u = \textcircled{k} v}$

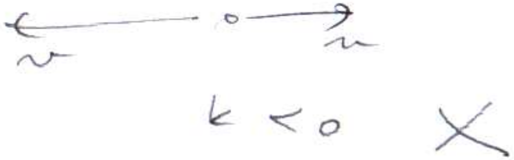
$$\Downarrow$$

- Trojúhelníková nerovnost:

$\|u + v\| \boxed{\leq} \|u\| + \|v\|$, přičemž $\boxed{=}$, pouze když $\boxed{u = \textcircled{k} v}$



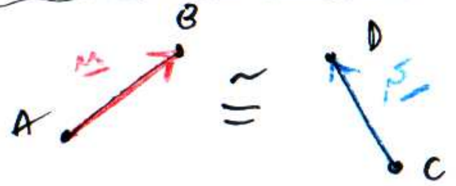




... DOSUD ALGEBRA

$\boxed{\text{NYNÍ GEOMETRIE :..... JAK POJEM. SHODNOSTI ?}}$

Ⓐ shodnost úseček   pomocí vzdáleností bodů



$|AB| = |CD|$

↖ reálná čísla!

pomocí velikosti vektorů

$$\boxed{|AB| := \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}}$$

$\underline{u} = \overrightarrow{AB}$

SKALÁRNÍ SOUČIN

POZN:

takto def. vzdálenosti

určuje METRIKU ...

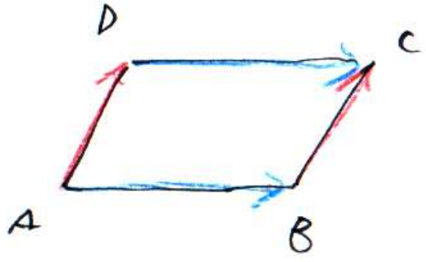
... dvěma bodům $\mapsto$ číslo :

- $|AB| \geq 0$, přičemž $|AB| = 0 \iff A = B$
- $|AB| = |BA|$
- $|AC| \leq |AB| + |BC|$

Naše METRIKA je navíc EUKLEIDOVSKÁ, tzn. kompatibilní s afinní strukturou, tedy s ROVNOBĚŽNOSTÍ ...

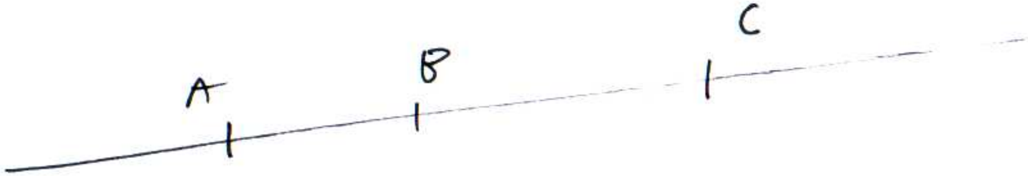
(hlavně)

.....



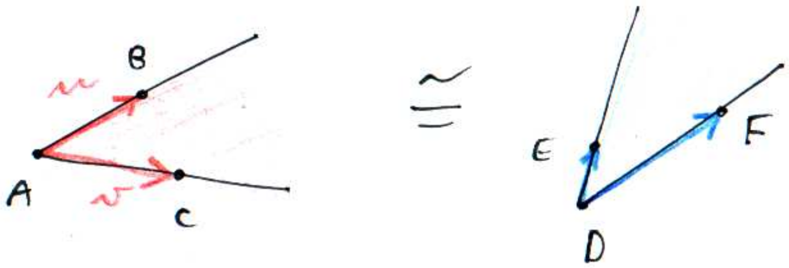
$$\| \ast \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \implies |AD| = |BC|$$

POZN: USPOŘÁDÁNÍ (bodů na přímce) pomocí metriky:



$$B \text{ mezi } A \text{ a } C \iff |AB| + |BC| \overset{!}{=} |AC|$$

Ⓑ shodnost úhlů pomocí odchylky vektorů



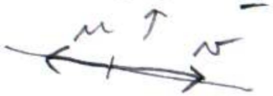
$\sphericalangle(\vec{AB},\vec{AC}) = \sphericalangle(\vec{DE},\vec{DF})$

↑ reálná čísla!

přičemž odchylka vektorů $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v})$ ... ozn. $\alpha \in [0,180°]$

pomocí skal. součinu ... $\boxed{\cos\alpha := \frac{u \bullet v}{\|u\|\cdot\|v\|}}$

- podle Cauchy-nerovnosti: $-1 \leqq \frac{u \bullet v}{\|u\|\cdot\|v\|} \leqq 1$ ✓
- přičemž etrémy odp ... $180° \leqq \alpha \leqq 0°$

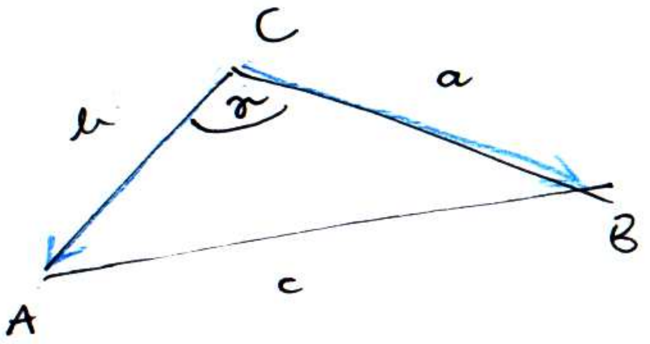


- nezávisí na bodech na ramenech úhlů ... $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v}) = \sphericalangle(a\underline{u}, b\underline{v})$ ✓
  $\forall a,b \in \mathbb{R}_+$ ✓
- $\alpha = 90° \iff u \bullet v = 0$ ✓

---

všechno OK, ale jak se na to přišlo???

KOSINOVÁ VĚTA



- bez vektorů

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

- pomocí vektorů:

$u := \overrightarrow{CB}$ ... $a = \|u\|$

$v := \overrightarrow{CA}$ ... $b = \|v\|$

$\overrightarrow{AB} = u - v \Rightarrow c = \|u - v\|$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

NYNÍ: $c^2 = (u - v)\cdot(u - v)$

bilinearita → $= u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v$

symetric. → $= u\cdot u + v\cdot v - 2\,u\cdot v$

$= a^2 + b^2 - 2\,u\cdot v$

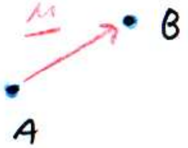
$$\boxed{u\cdot v = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\gamma}$$

PONAUČENÍ

... na vše stačí SKALÁRNÍ SOUČIN $V \times V \to \mathbb{R}$

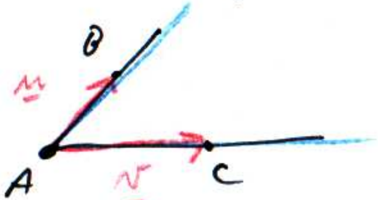
(A) VELIKOST ÚSEČKY $|AB| \equiv$ velikost vektoru $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$
(VZDÁLENOST BODŮ)

$= \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} \leftarrow$ Pythagorova věta

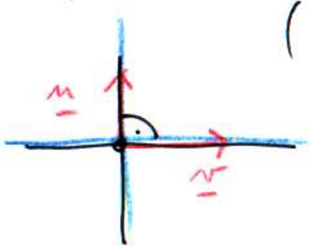


(B) VELIKOST ÚHLU $\measuredangle ABC \equiv$ odchylka vektorů $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$
(odchylka ...)

$= \arccos \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \leftarrow$ kosinová věta



spec. PRAVÝ ÚHEL (KOLMOST) $\iff \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$



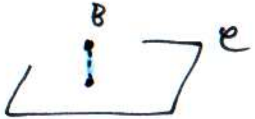
DEF.

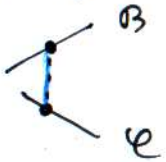
EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR $\mathcal{E}$ $\equiv$ afinní prostor se skalárním součinem (na zaměření $V = \overrightarrow{\mathcal{E}}$)

CO NÁS JEŠTĚ ČEKÁ ??

.... zobecnění všech předchozích pojmů

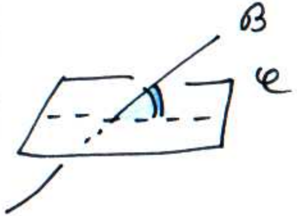
Ⓐ VZDÁLENOST PODPROSTORŮ

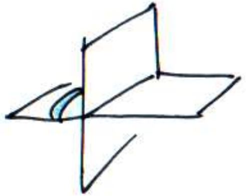




. . . .

Ⓑ ODCHYLKA A KOLMOST PODPR.



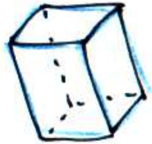


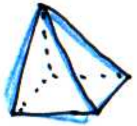
. . . .

Ⓒ OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU

(SIMPLEXU ...)

apod.





. . . .

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů

$\boxed{\text{VZDÁLENOSTI}}$ ... DEFINICE

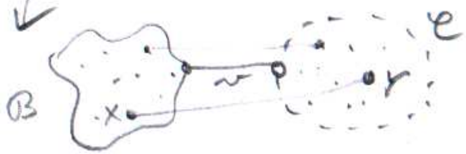
← lib. metrický prostor

- základ ... vzdál. dvou bodů

$v \in \mathbb{R}$

- pro lib. podmnožiny $\mathcal{B}, \mathcal{C}$:

  $$\boxed{\text{vzdálenost } v(\mathcal{B},\mathcal{C}) := \inf\{|XY|, \text{ kde } X \in \mathcal{B} \text{ a } Y \in \mathcal{C}\}}$$



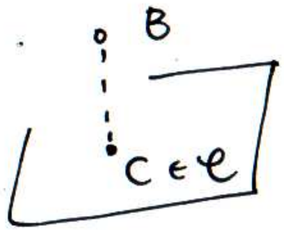
min nemusí ex.
inf vždy ANO

- pro lib. podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$: $\boxed{\inf = \min}$

- $v(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 0 \Leftarrow \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

- výpočty podle definice ...
  ... globální minimum funkce více proměnných

90 VZDÁL. BODU OD PODPROSTORU ... GEOM. CHARAKTERIZACE



e .. lib. podpr. euklid. prostoru

tj. $v(B, e) = |BC|$

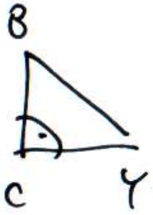
věta $\boxed{|BC| = \min \iff \vec{BC} \perp e}$

extremální problém ..☹

soustava lin. rovnic ... ☺

Důkaz .. Pythagorova věta:

"⟸" přímo: předp.



$\Rightarrow |BY|^2 = |BC|^2 + \underbrace{|CY|^2}_{\geq 0}$

$|BY|^{\uparrow} \geq |BC|$

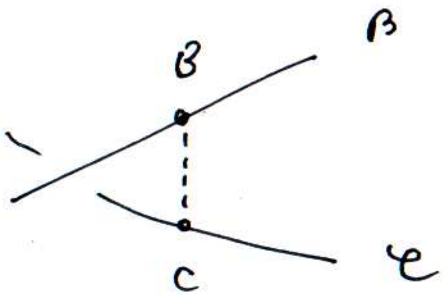
"⟹" nepřímo: předp.

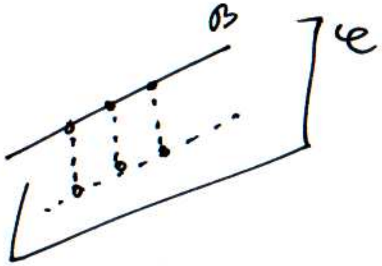
$\Rightarrow \;\dots\; |BC| \geq |BY|$ ↯

$\vec{BC} \not\perp e$ "pata kolmice"

∎

VZDÁLENOST LIB. PODPROSTORŮ





Věta $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$:

① $|BC| = \min \iff \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}$

② dvojice B, C ↑ je určena jednoznačně

$\iff \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$

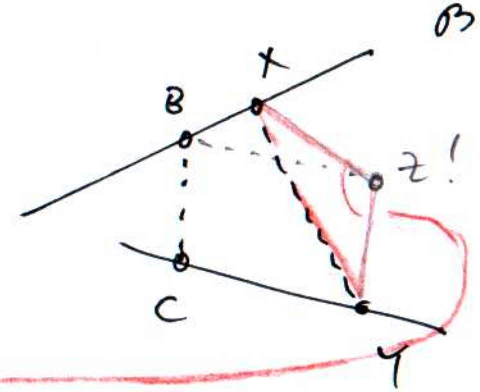
Důkaz ① ... plyne z Pyth. věty ...

② .... "obdélníčky" ...

① Detaily :

92

- pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, tak $v(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 0$
  dvojice $B \equiv C$, tj. $\vec{BC} = o \perp$ ke všem ✓
- pro $v(\mathcal{B},\mathcal{C}) \neq 0$:



"⇒" $|BC| = \min \Rightarrow \vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$

... plyne z předchozího ✓

"⇐" předp. $\vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$:

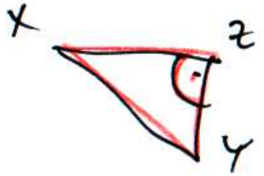
chceme ... $|XY| \geq |BC|$
pro lib. $X \in \mathcal{B}$
$Y \in \mathcal{C}$

tady chceme ukázat 90°

! - Z ... tak, aby $\vec{BC} = \vec{ZY}$
(tj. BCYZ rovnoběžník)

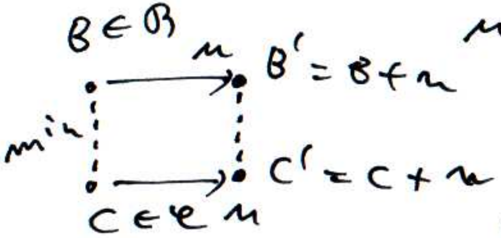
- předp. $\Rightarrow \vec{ZY} = \vec{BC} \perp$ k lib. lin. kombinaci vektorů z $\vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{C}}$

tedy zejména $\vec{ZY} = \vec{BC} \perp \vec{ZX} = \underset{\mathcal{C}}{\vec{ZB}} + \underset{\mathcal{B}}{\vec{BX}}$!

-  ... Pyth. věta $|XY| \geq |Z\overset{\boxed{Y}}{}Y| = |BC|$ ✓

② Detail :

"$\Rightarrow$" nepřímo

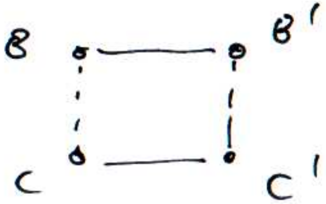


$u \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ spol. vektor

BCC'B' je pravoúhelník

tedy $|BC| = |B'C'|$

"$\Leftarrow$" nepřímo



BCC'B' je pravoúh.

tedy $\underset{\underset{\mathcal{B}}{\uparrow}}{\overrightarrow{BB'}} = \underset{\underset{\mathcal{C}}{\uparrow}}{\overrightarrow{CC'}}$

tj. $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \{0\}$ $\boxed{}$

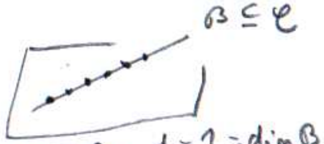
SOUVISLOST SE VZÁJEMNÝMI POLOHAMI

$v :=$ vzdál $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$

$d :=$ dim { všechny dvojice $\overset{\mathcal{B}}{B}, \overset{\mathcal{C}}{C}$ pro které $|BC| = \min$, tj.: $\vec{BC} \perp \vec{\mathcal{B}}$, $\vec{BC} \perp \vec{\mathcal{C}}$ }

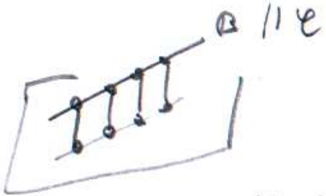
$m := \min\{\dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{C}\}$

např.:



$v = 0$, $d = 1 = \dim \mathcal{B}$

$v = 0$, $d = 0 < \dim \mathcal{B}$



$v \neq 0$, $d = 1 = \dim \mathcal{B}$

$v \neq 0$, $d = 0 < \dim \mathcal{B}$

	$d = m$ ↓	$d < m$ ↓
$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$	d je max	d není max
$v = 0$	$\subseteq$	$\times$
$v \neq 0$	$\parallel$	$\not\times$

(. . . sr. s. 49-50)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět

$\boxed{\text{KOLMÝ DOPLNĚK}}$

(Algebraická odbočka)

V .. vekt. pr. se skalárním součinem

U .. vekt. podprostor

* $U^{\perp} := \{$ všechny vektory ve V, které jsou $\perp$ ke všem vektorům v U $\}$

$$= \{ \underline{x} \in V \mid \underline{x} \cdot \underline{u} = 0 \text{ pro všechny } \underline{u} \in U \}$$

$$= \left\{ \underline{x} \in V \;\middle|\; \boxed{\begin{matrix} \underline{x} \cdot \underline{u}_1 = 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{u}_2 = 0 \\ \vdots \end{matrix}} \;\leftarrow \underline{u}_1, \underline{u}_2 \dots \text{ báze } U \right\}$$

← soustava lin. homog. rovnic

.. ($\underline{\underline{k}}$ nezáv. rovnic
$\underline{\underline{n}}$ neznámých)

* $U^{\perp}$ je $\boxed{\text{vektorový podprostor.}}$

* $\dim V = \underline{\underline{n}}$, $\dim U = \underline{\underline{k}}$ $\Longrightarrow$ $\dim U^{\perp} = \boxed{n-k}$

↓

* $U \cap U^{\perp} = \boxed{\{o\}}$ ⟶ $\boxed{U + U^{\perp} = V}$

↓

$\underbrace{\hphantom{U \cap U^{\perp} = \{o\}}}$

TEDY: U a $U^{\perp}$ jsou vskutku $\boxed{\text{DOPLŇKOVÉ.}}$

(komplementární)

$\boxed{\text{DŮSLEDKY}}$

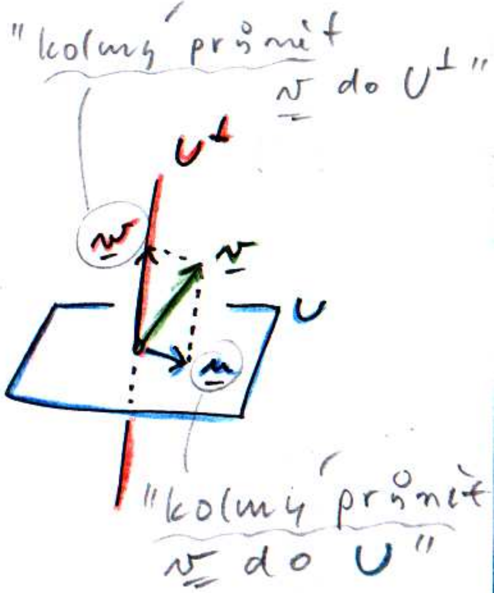
$U + U^\perp = V$

- lib. $\underline{v} \in V$ lze $\boxed{\text{VYJÁDŘIT}}$ jako

  $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$; $u \in U$ a $w \in U^\perp$,

  a to $\boxed{\text{JEDNOZNAČNĚ}}$.

  $U \cap U^\perp = \{0\}$



$\vec{B}^\perp = \vec{C}$

- totálně kolmé afinní podpr. $B, C \subseteq E$

  se $\boxed{\text{PROTÍNAJÍ}}$, a to v $\boxed{\text{BODĚ}}$.

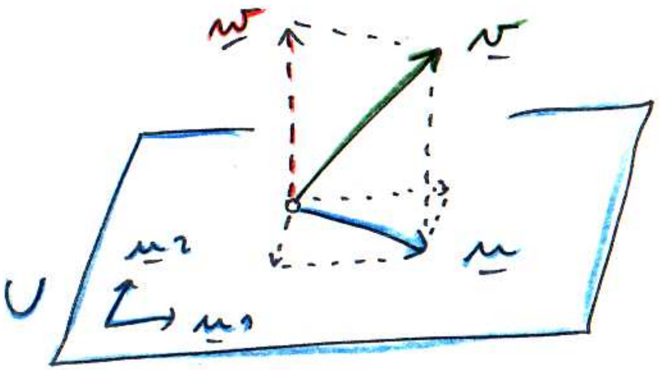
  $U + U^\perp = V$

  $U \cap U^\perp = \{0\}$

(. . . viz s. 51)

KOLMÝ PRŮMĚT

vektoru $\underline{v} \in V$ do podprostoru $U \subseteq V$



dim $U = \underline{\underline{k}}$

ⓐ $\underline{u} \in U$, tj. $\underline{u} = a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \dots$

$a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$?

ⓑ $\underline{u}$ je kolmý průmět $\underline{v}$,

tj. $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u} \perp U$

tj. $(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{u}_i = 0$

tj. $\underline{u} \cdot \underline{u}_i = \underline{v} \cdot \underline{u}_i$

tj.
$$\boxed{\begin{array}{l} a_1(\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1) + a_2(\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_1) + \dots = \underline{v} \cdot \underline{\underline{u}}_1 \\ a_1(\underline{u}_1 \cdot \underline{\underline{u}}_2) + a_2(\underline{u}_2 \cdot \underline{\underline{u}}_2) + \dots = \underline{v} \cdot \underline{\underline{u}}_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}}$$

$\underline{\underline{k}}$ lin. rovnic
$\underline{\underline{k}}$ neznámých

(sym. čtvercová matice
det ≠ 0, jednoznač. řešení…)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled

CVIČENÍ

98 Je dán bod B a (nad-)rovina C v eukleidovském prostoru:

$$B = [-1, 5, 7],$$

$$C = \left\{ \underbrace{[1, 2, 3]}_{D} + r\underbrace{(1, 1, -1)}_{\underline{u}} + s\underbrace{(2, 1, 0)}_{\underline{v}} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} \quad = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \}.$$

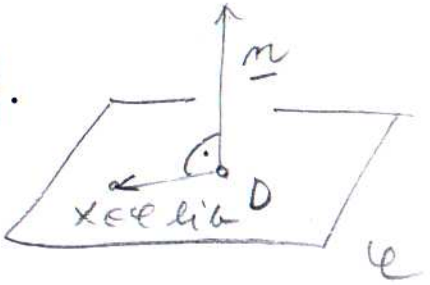
homog.

$$\vec{C} = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \}$$

Kolmý doplněk k $\vec{C}$ je $\underline{x} \cdot \underline{u}$, kde $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\underline{x} \cdot \underline{v} = 0$

$$\vec{C}^{\perp} = \{ x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 2x_1 + x_2 = 0 \} \quad = \left\{ t\underbrace{(1, -2, -1)}_{\underline{n}} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$



Označíme body a vektory tak, že

$$C = \left\{ \underline{D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} \quad = \left\{ \overrightarrow{DX} \,.\, \mathbf{n} = 0 \right\},$$
$$\vec{C}^{\perp} = \{ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{v} = 0 \} \qquad = \left\{ \underline{t\mathbf{n}} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1}$$

Hodláme určit vzdálenost $v(B, C)$, a to pomocí charakterizace:

$$|BC| = \min \iff \overrightarrow{BC} \perp C. \tag{2}$$

99

A. pata kolmice, vzdálenost

← velmi OBECNÝ postup ($\mathcal{B}, \mathcal{C}$ = cokoli)

Pro $C \in \mathcal{C}$ platí (2), právě když

$$\boxed{\overrightarrow{BC} \,.\, \mathbf{u} = 0 \text{ a } \overrightarrow{BC} \,.\, \mathbf{v} = 0,}$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + r\underline{u} + s\underline{v}$

což po rozepsání ($C = D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$) vede k soustavě lineárních rovnic

podobnost se soustavou na s. 97 NENÍ náhodná! ⊛ ⟶

$$\boxed{\begin{aligned} r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u} &= \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{u},\\ r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} &= \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{v}.\end{aligned}}$$

← (2) rovnice / (2) neznámé

$\underbrace{\dim \mathcal{C}}_{2} + \underbrace{\dim \mathcal{B}}_{0}$

Dosazením vektorů ze zadání dostáváme

$$\begin{aligned} 3r + 3s &= -3,\\ 3r + 5s &= -1.\end{aligned}$$

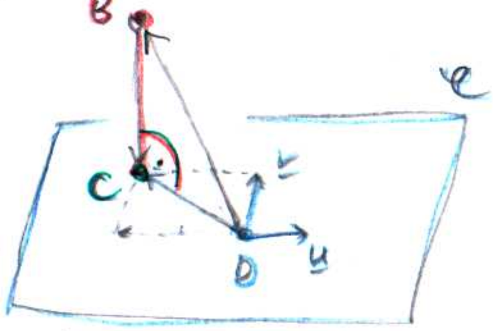
Tato soustava má jednoznačné řešení $r = -2$ a $s = 1$, tedy

$$C = D - 2\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1, 1, 5] \quad \text{a} \quad \overrightarrow{BC} = (2, -4, -2) = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je

$$v(B, \mathcal{C}) = |BC| = 2\|\mathbf{n}\| = 2\sqrt{6}.$$

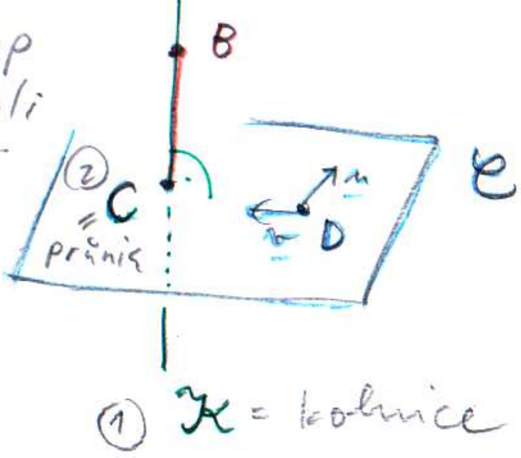
⊛ pozn.:



- $\overrightarrow{DC} = -2\underline{u} + \underline{v}$ … kolmý průmět $\overrightarrow{DB}$ do $\vec{\mathcal{C}}$
- $\overrightarrow{BC} = 2\underline{n}$ … kolmý prům. $\overrightarrow{BD}$ do $\vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

B. kolmice, pata kolmice, . . .

← « "konstrukční" postup pro B = bod, $\mathcal{C}$ = cokoli



① Kolmice k $\mathcal{C}$ procházející bodem B je

$$\mathcal{K} = B + \overrightarrow{\mathcal{C}}^{\perp} = \left\{ B + t\mathbf{n} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

② Pata kolmice $C = \mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ odpovídá řešení rovnice

průnik podprostorů (umíme)

$$(-1 + t) - 2(5 - 2t) - (7 - t) = -6. \tag{3}$$

← ① rovnice / ① neznámá

dim $\vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

Tato rovnice má jednoznačné řešení $t = 2$, tedy

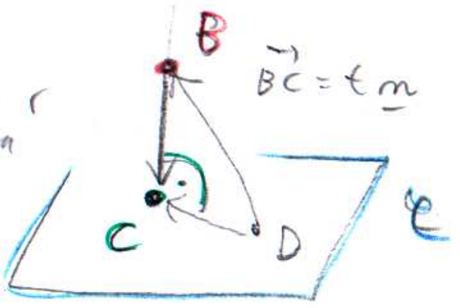
$$C = B + 2\mathbf{n} = [1, 1, 5].$$

Vzdálenost je

$$v(B, C) = |BC| = 2\|\mathbf{n}\| = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}.$$

C. zkratka

← « pro B = bod, ℓ = nadrovina



· $C \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\cdot\underline{n} = 0$

· $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + t\underline{n}$

Rovnici (3) lze podle (1) obecně zapsat takto:

1 rovnice / 1 neznámá

$$\overrightarrow{DC}\cdot\underline{n} = \boxed{\overset{\overrightarrow{DC}}{(\overrightarrow{DB} + t\mathbf{n})} \,.\, \mathbf{n} = \overrightarrow{DB} \,.\, \mathbf{n} + t\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} = 0.}$$

Tato rovnice má jednoznačné řešení

$$\boxed{t = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}}} = \frac{12}{6} = 2,$$

tedy

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}}\mathbf{n}} = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je

"vzoreček"

$$\boxed{v(B,C) = |BC| = \frac{|\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}} = \underline{\underline{2\sqrt{6}.}}$$

V duchu (1) můžeme poslední výpočet vyjádřit také takto:

dosazení B do rovnice ℓ

$$v(B,C) = \frac{|-1-2\cdot 5-7+6|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

velikost normály

D. podle definice ← « velmi OBECNÝ postup

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+r+2s \\ -3+r+s \\ -4-r \end{pmatrix}$

- vzdál. $|BC| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(2+r+2s)^2+(-3+r+s)^2+(-4-r)^2} = \dots$

  $\dots = \sqrt{3r^2+6rs+6r+5s^2+2s+29}$ ↖ ozn. $f(r,s)$

- hledáme GLOBÁLNÍ MINIMUM funkce f :

⇝ derivace $\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6r+6s+6}{\sqrt{\dots}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6r+10s+2}{\sqrt{\dots}}$

⇝ STACIONÁRNÍ BOD(Y) = řešení soustavy

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 6r+6s+6=0 \\ 6r+10s+2=0 \end{matrix}}\right) \sim \dots \sim \underline{\underline{\begin{pmatrix} r=-2 \\ s=1 \end{pmatrix}}}$$

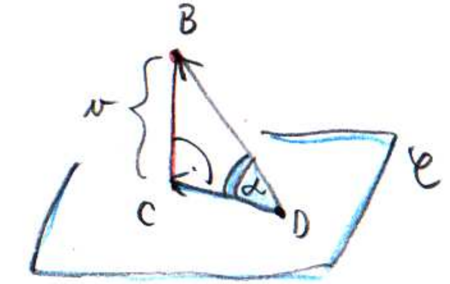
(podobnost se soustavou na s. 99 NENÍ náhoda!)

$$\underbrace{⇝ \text{ nutně MINIMUM } \dots\dots \ ↯}$$

- $v(B,\mathcal{E}) = f(-2,1) = \dots\dots = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$

E. souvislost s odchylkou

viz dále ...



B = bod
ϱ = cokoli

kolmý průmět

$$\alpha := \sphericalangle(DB, \varrho) \overset{!}{=} \sphericalangle(\vec{DB}, \vec{DC})$$

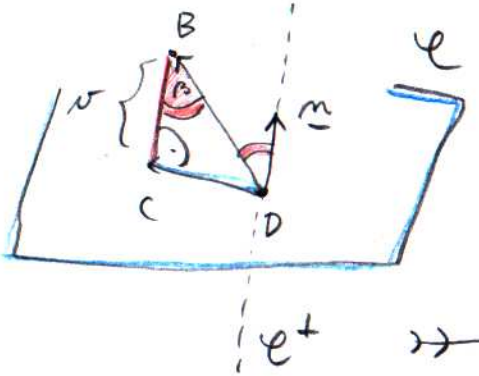
$$\vec{DC} = -2\underline{u} + \underline{v} = (0,-1,2)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{DB}\cdot\vec{DC}}{\|\vec{DB}\|\,\|\vec{DC}\|} = \dots = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dots = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{29}}$$

$$\rightarrow \boxed{v = |DB|\cdot\sin\alpha} = \dots = \sqrt{24} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$

ZKRATKA :



B = bod
ϱ = nad-rovina

normála

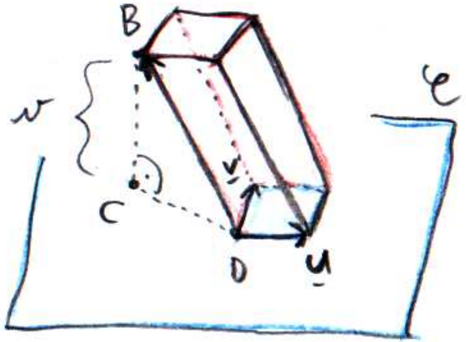
$$\beta := \sphericalangle(DB, \boldsymbol{n}) \qquad (\ \dots\ \alpha + \beta = 90^\circ)$$

$$\cos\beta = \frac{|\vec{DB}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\vec{DB}\|\cdot\|\boldsymbol{n}\|}$$

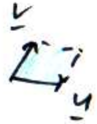
$$\rightarrow \boxed{v = |DB|\cdot\cos\beta} = \frac{|\vec{DB}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \dots = \frac{12}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$

tentýž "vzoreček"
jako na s. 101!

F. souvislost s objemy ← « velmi OBECNÝ postup



$V :=$ objem 

$S :=$ obsah 

$$\boxed{w = \frac{V}{S}} = \cdots\cdots = \frac{12}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$

viz dále ... !

ÚVOD, PŘEHLED

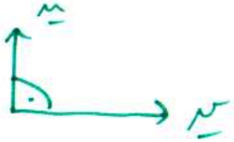
AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů

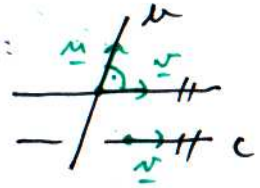
KOLMOST

1. základ .... vektory



$\underline{u} \perp \underline{v}$, pokud $\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = 0}$

2. přímky:



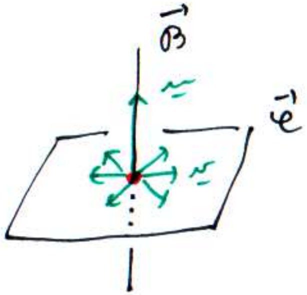
$b \perp c$, pokud $\boxed{\vec{b} \perp \vec{c}}$

tj. $\underline{u} \perp \underline{v}$

↑ lib. $\vec{b}$ ↑ lib. $\vec{c}$

Obecné podpr.:

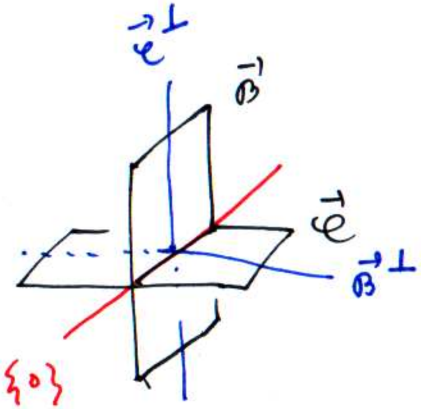
3. $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$



$\boxed{\mathcal{B} \perp \mathcal{C}, \text{ pokud } \underline{u} \perp \underline{v}}$

↑ lib. $\vec{\mathcal{B}}$ ↑ lib. $\vec{\mathcal{C}}$

4.



$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \{o\}$

$\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$, pokud

$\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$ nebo $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

(tj. $\vec{\mathcal{B}}^{\perp} \supseteq \vec{\mathcal{C}}$ nebo $\vec{\mathcal{B}}^{\perp} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$)

(... podle nápadu ③ by nebyly kolmé ...)

"kolmost je věcí vektorů"

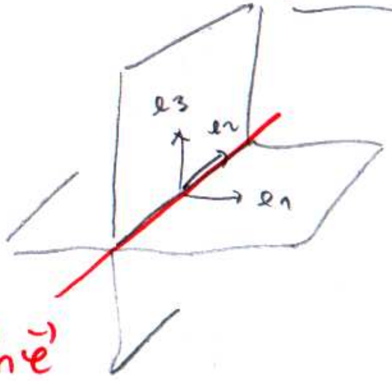
Def

- $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$, pokud $\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{C}}$;
- $\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{C}}$, pokud $\vec{\mathcal{B}} \underset{\supseteq}{\subseteq} \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$ (tj. $\vec{\mathcal{B}}^{\perp} \underset{\subseteq}{\supseteq} \vec{\mathcal{C}}$).

pozn

- tato def. zahrnuje všechny představitelné případy ... pomocí "inkluze" ☺
- tato def. závisí na okolním prostoru $\mathcal{E}$ ☹

$\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle$



$\vec{\mathcal{C}} = \langle e_1, e_2 \rangle \rightsquigarrow \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = \langle e_3 \rangle$

$\underbrace{\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle \supset \langle e_3 \rangle = \vec{\mathcal{C}}^{\perp}}$

tedy $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$ ✓

$\rightsquigarrow \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = \langle e_3, e_4 \rangle$

$\underbrace{\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle \cancel{\underset{\supseteq}{\subseteq}} \langle e_3, e_4 \rangle = \vec{\mathcal{C}}^{\perp}}$

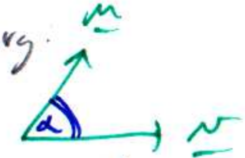
tedy $\mathcal{B} \cancel{\perp} \mathcal{C}$

(e_1, e_2, e_3) ... ON báze $\mathcal{E}$ → vložíme do $\tilde{\mathcal{E}} \supset \mathcal{E}$ s rozšířenou ON bází (e_1, e_2, e_3, e_4)

107

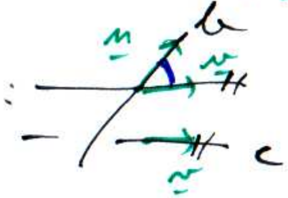
ODCHYLKY

1. základ ... vektory:



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}} \quad \ldots \; \alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ\rangle$$

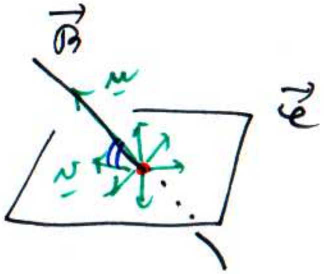
2. přímky:



$$\cos\alpha = \frac{|u\cdot v|}{\|u\|\cdot\|v\|} \quad \ldots \; \alpha \in \langle 0^\circ, \underline{90^\circ}\rangle$$

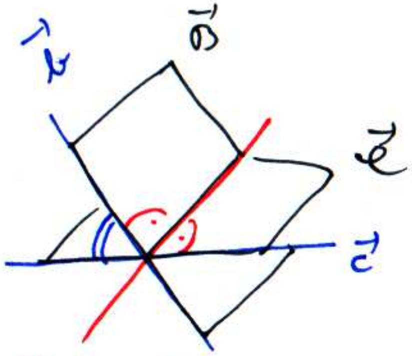
obecné podpr:

3. $\vec{B}\cap\vec{E}=\{0\}$



$$\boxed{\measuredangle(B,E) := \min\left\{ \measuredangle(u,u) \;\middle|\; \begin{matrix} u\in\vec{B} \\ v\in\vec{E} \end{matrix} \right\}}$$

4.



$\vec{B}\cap\vec{E}\neq\{0\}$

$$\measuredangle(\vec{B},\vec{E}) := \measuredangle(\vec{b},\vec{c})$$

$\vec{b}\subseteq\vec{B}$ a $\vec{b}\perp(\vec{B}\cap\vec{E})$

$\vec{c}\subseteq\vec{E}$ a $\vec{c}\perp(\vec{B}\cap\vec{E})$

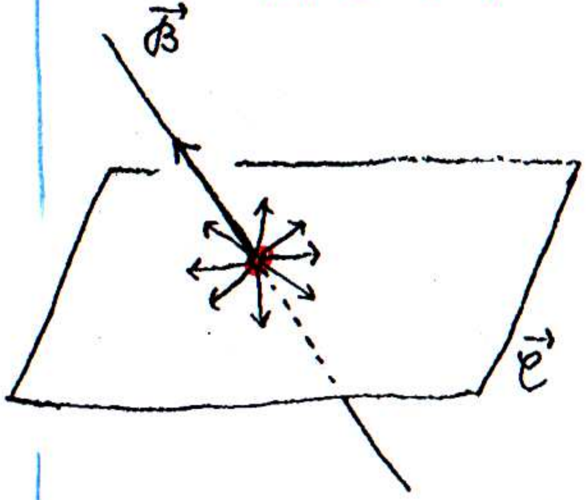
(... podle nápadu ③ by odchylka byla 0 ...)

"odchylka je věcí vektorů"

Def • $\sphericalangle(\mathcal{B},\mathcal{E}) := \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}})$

• $\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}})$ … musíme rozlišovat:

$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}=\{o\}$:

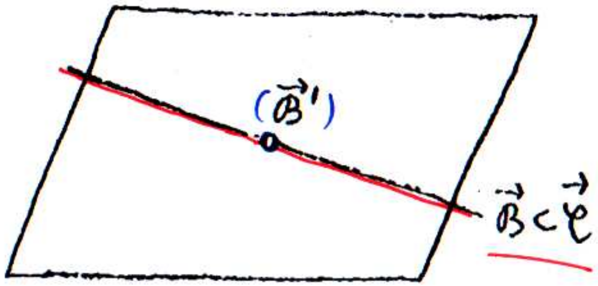


$\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) := \min\{\dots\}$

↑ nápad ③

$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}\neq\{o\}$

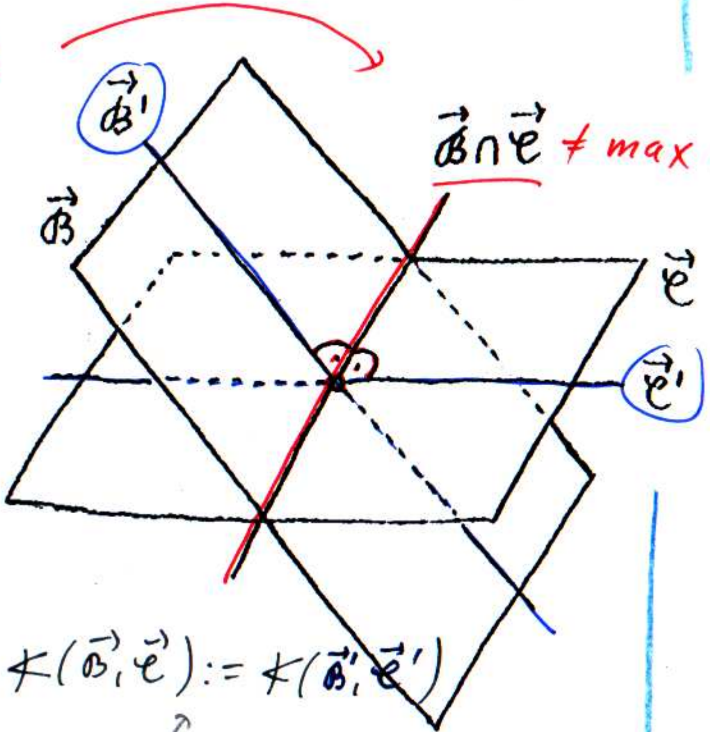
$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}=\max$:



$\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) := 0$

↑ spec. případ

$\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}}\neq\max$:



$\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) := \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}',\vec{\mathcal{E}}')$

↑ nápad ④

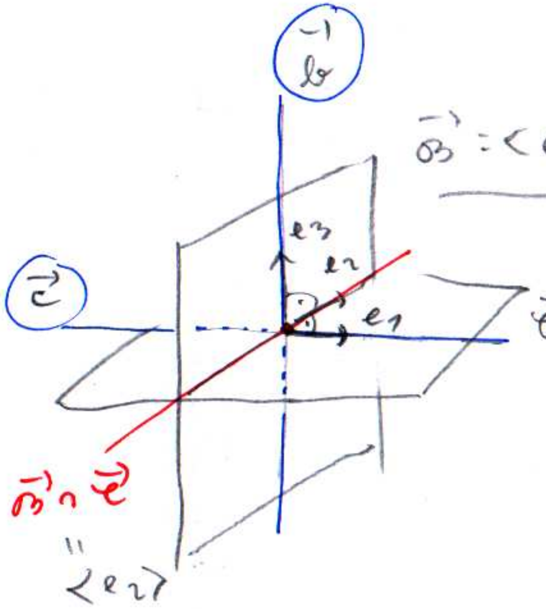
Pozn • v posledním případě je $\vec{\mathcal{B}}'\cap\vec{\mathcal{E}}'=\{o\}$

$$\left[\left.\begin{matrix}\vec{\mathcal{B}}'=\vec{\mathcal{B}}\cap(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})^{\perp}\\ \vec{\mathcal{E}}'=\vec{\mathcal{E}}\cap(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})^{\perp}\end{matrix}\right\}\ \vec{\mathcal{B}}'\cap\vec{\mathcal{E}}'=(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})\cap(\vec{\mathcal{B}}\cap\vec{\mathcal{E}})^{\perp}=\{o\}\right]$$

109 **POZN**

- tato def. zahrnuje všechny předchozí a představitelné případy. ☺

- tato def. nezávisí na okolním prostoru $\mathcal{E}$ ☺



$\vec{\mathcal{B}} = \langle e_2, e_3 \rangle \rightsquigarrow \underline{\vec{b} \subseteq \vec{\mathcal{B}}}$ a $\vec{b} \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}}) \dots \vec{b} = \langle e_3 \rangle$

$\vec{\mathcal{E}} = \langle e_1, e_3 \rangle \rightsquigarrow \underline{\vec{c} \subseteq \vec{\mathcal{E}}}$ a $\vec{c} \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}}) \dots \vec{c} = \langle e_1 \rangle$

$$\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) =$$
$$= \sphericalangle(e_1, e_3) = \underline{\underline{90^\circ}}$$

tato úvaha nezávisí na vložení $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{E}}$

$(e_1, e_2, e_3) \dots$ ON báze $\rightsquigarrow (e_1, e_2, e_3, \boxed{\dots})$

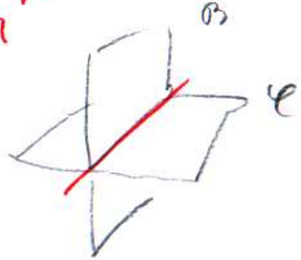
lib. rozšíření!

ZÁVĚRY

- $\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \implies \sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 90^\circ$

$$\cancel{\Longleftarrow}$$

obecně neplatí

(viz 

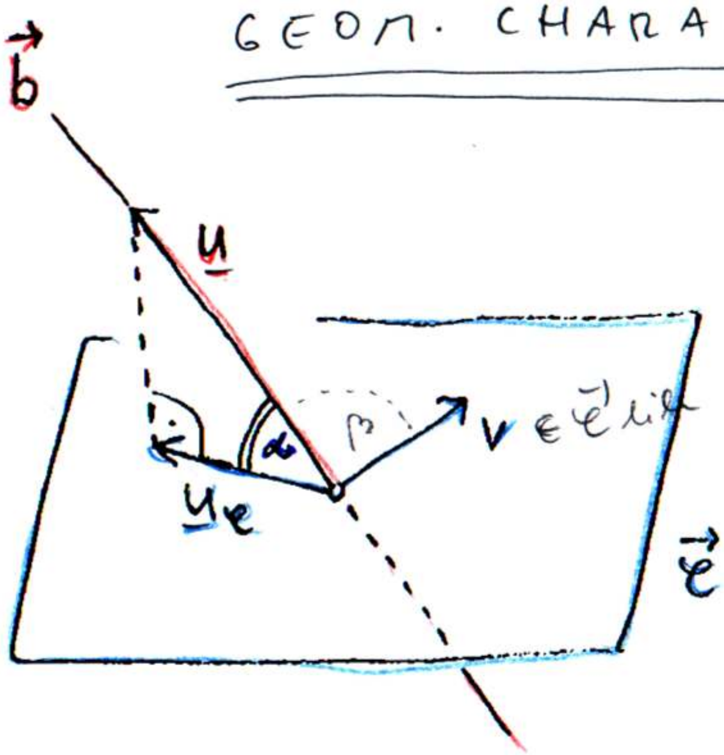
ve 4-dim prostoru)

- pokud $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{\underline{o}\}$, potom

$$\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \iff \sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 90^\circ$$

GEOM. CHARAKTERIZACE $\sphericalangle(b, \mathcal{E})$

přímka cokoliv



Platí:

- $b \perp \mathcal{E} \Rightarrow \sphericalangle(b, \mathcal{E}) = 90°$
- $b \not\perp \mathcal{E} \Rightarrow \sphericalangle(b, \mathcal{E}) = \sphericalangle(\underline{u}, \underline{u}_{\mathcal{E}})$

  kde $\underline{u} \in \vec{b}$ lib. a

  $\underline{u}_{\mathcal{E}}$ = kolmý průmět $\underline{u}$ do $\vec{\mathcal{E}}$

Důkaz:

- Pro lib. $\underline{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ chceme dokázat, že

$$\underset{\sphericalangle(\underline{u},\underline{v})}{\underset{\parallel}{\beta}} \boxed{\geq} \underset{\sphericalangle(\underline{u},\underline{u}_c)}{\underset{\parallel}{\alpha}} \qquad \text{tj.} \quad \cos\beta \boxed{\leq} \cos\alpha .$$

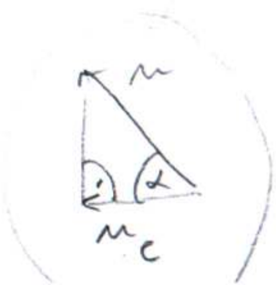
- přičemž $\underline{w} = \underline{u} - \underline{u}_c + \vec{\mathcal{E}}$, tj. $(\underline{u} - \underline{u}_c) \cdot \underline{v} \boxed{=} 0$

  tj. $u \cdot v \boxed{=} u_c \cdot v$.

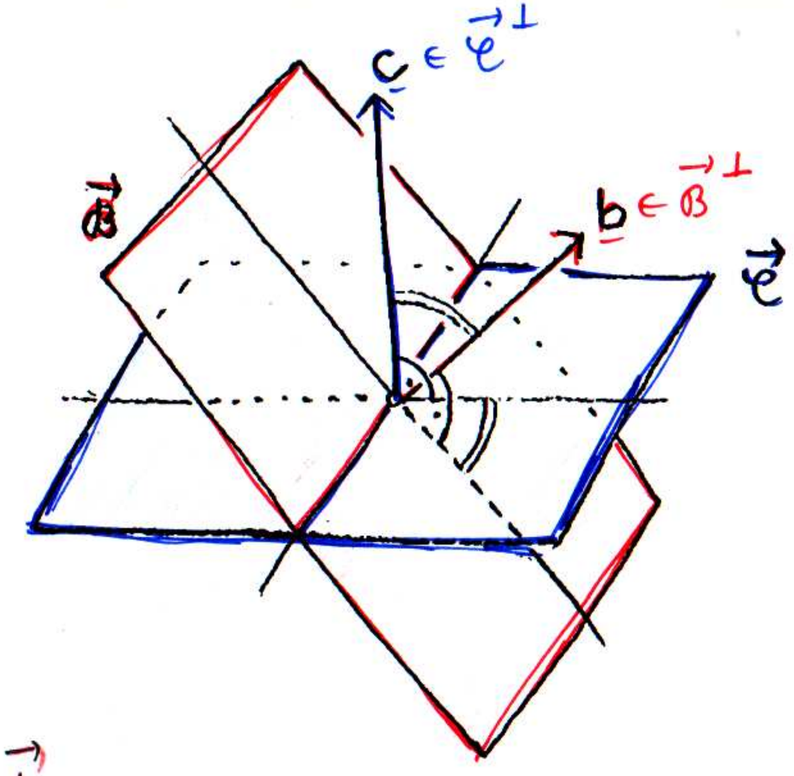
- Tedy:

$$\cos\beta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \boxed{=} \frac{u_c \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \boxed{\leq} \frac{\|u_c\| \cdot \cancel{\|v\|}}{\|u\| \cdot \cancel{\|v\|}} \boxed{=} \cos\alpha .$$ ☒

Cauchyho-Schwarzova nerovnost



ZKRATKY

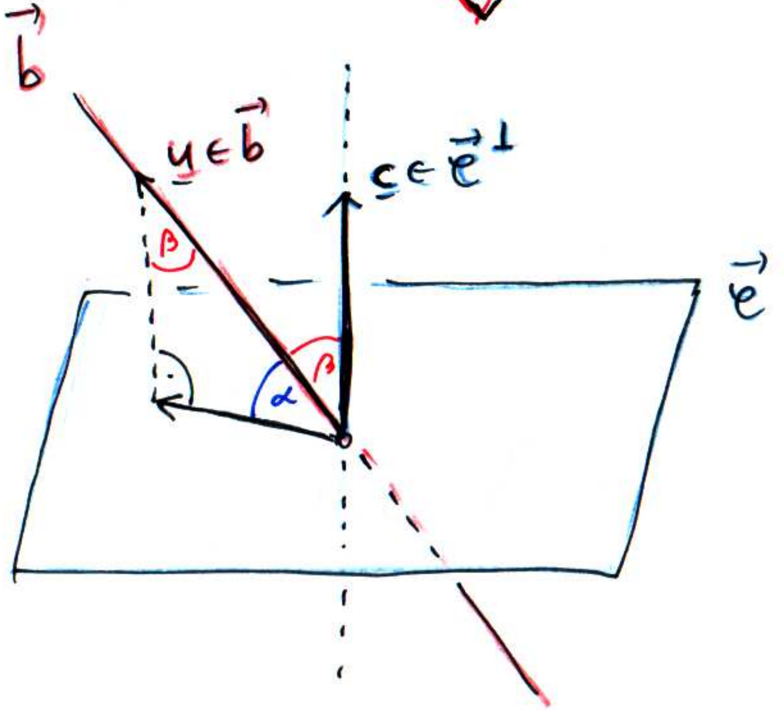


← DVĚ NAD-ROVINY :

$$\boxed{\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \measuredangle(\underline{b}, \underline{c})}$$

↑ ↑ normály

$\dim \vec{\mathcal{B}}^{\perp} = \dim \vec{\mathcal{E}}^{\perp} = 1$



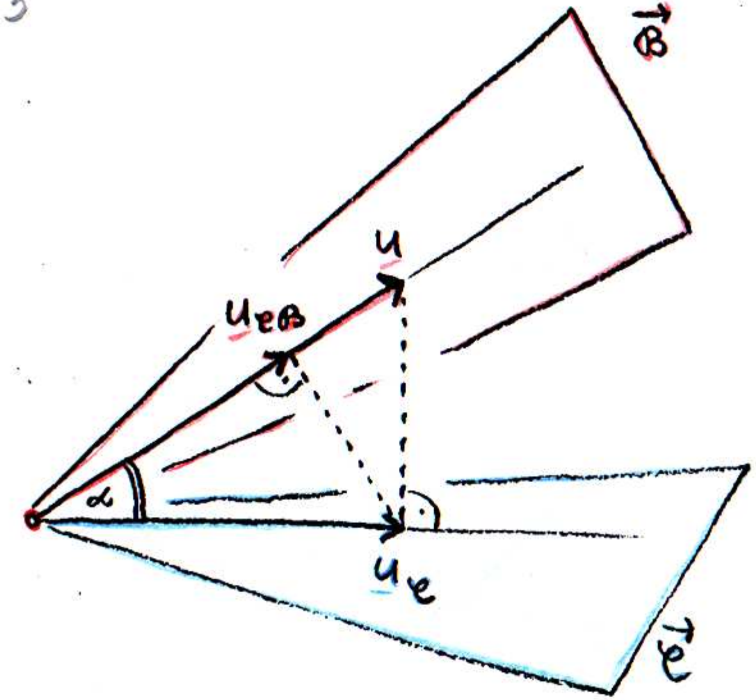
$\alpha + \beta = 90^{\circ}$

← PŘÍMKA a NAD-ROVINA :

$$\boxed{\cos \beta = \sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{c}|}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{c}\|}}$$

↑ normála $\mathcal{E}$

GEOM. CHARAKTERIZACE OBECNĚ



Pokud $\sphericalangle(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \sphericalangle(\underline{u},\underline{v}) =: \alpha$

pro $\underline{u} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\underline{v} \in \vec{\mathcal{E}}$,

potom taky (viz s. 111)

$$\alpha = \sphericalangle(\underline{u},\underline{u}_{\mathcal{E}}) = \sphericalangle(\underline{v},\underline{v}_{\mathcal{B}})$$

kolmý průmět $\underline{u}$ do $\vec{\mathcal{E}}$

kolmý průmět $\underline{v}$ do $\vec{\mathcal{B}}$

$$\underline{u}_{\mathcal{E}} = \text{násobek } \underline{v} \quad \text{a}$$
$$\underline{v}_{\mathcal{B}} = \text{násobek } \underline{u} \quad \ldots$$

... stačí tedy popsat (nějak chytře) složení kolmých projekcí $\vec{\mathcal{B}} \to \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{B}}$ a najít CHARAKTERISTICKÉ (VLASTNÍ) VEKTORY tohoto zobrazení ... ← (viz dále ...)

ÚVOD, PŘEHLED

AFINNÍ GEOMETRIE

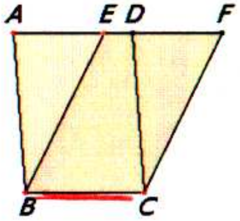
EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

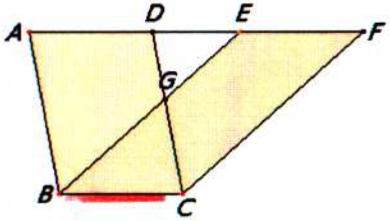
- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů
- obsahy a objemy

OBSAHY a OBJEMY

Opakování

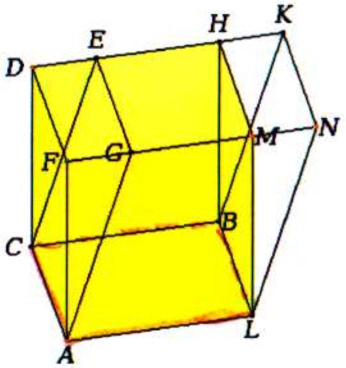
- Rovnoběžníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.

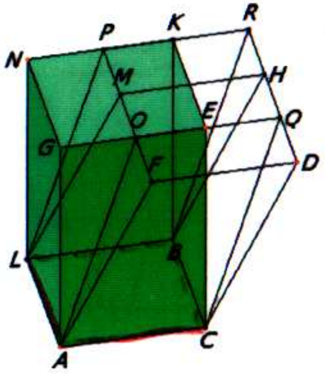




v

- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.

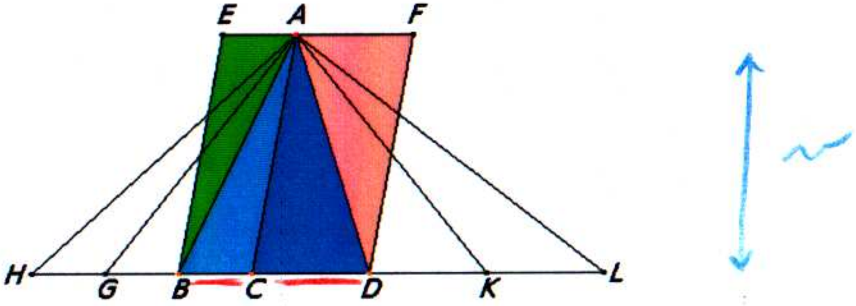




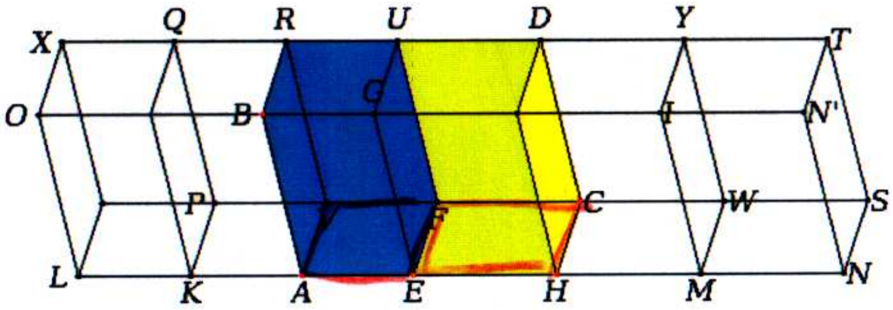
115

Opakování

- Poměr obsahů rovnoběžníků se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



Opakování

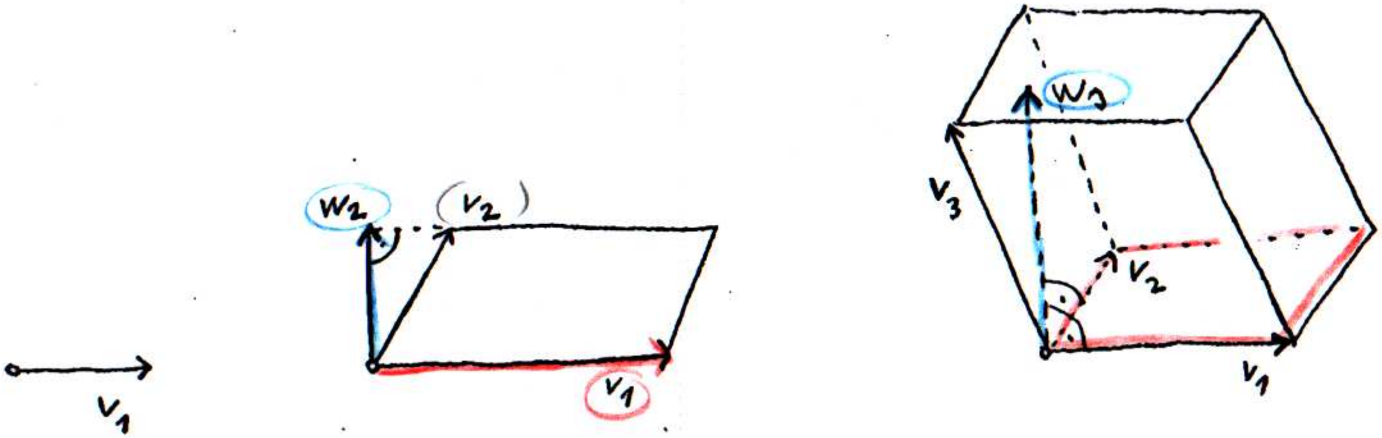
"vzorečky"

Odtud:

- $S = \underline{a} \cdot \underline{v}$,
  kde S = obsah rovnoběžníku, a = velikost strany, v = velikost odp. výšky,
- $V = \underline{S} \cdot \underline{w}$,
  kde V = objem rovnoběžnostěnu, S = obsah stěny, w = velikost odp. výšky.

"objem = základna · výška"

Obecně pomocí vektorů



Def.

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$, takové, že

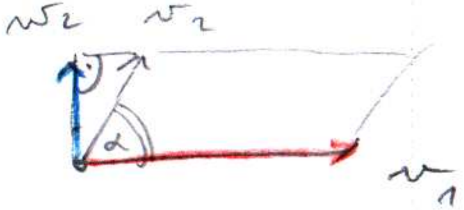
"základna"

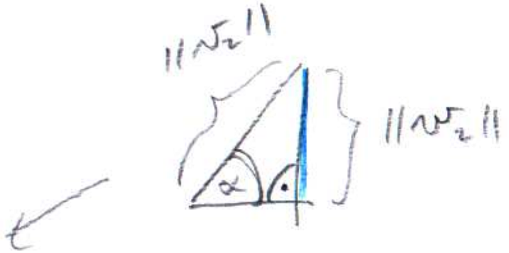
"výška"

- $V(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$,
  kde $\mathbf{w}_2 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_2$ do $\mathbf{v}_1^\perp$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$,
  kde $\mathbf{w}_3 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_3$ do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- atd. . .

objem .... $V \times V \times \dots \to \mathbb{R}_+$

Počítání





- Pro $k = 2$ např.:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \underline{\|\mathbf{v}_1\|} \cdot \overbrace{\underline{\|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha}}^{\|\bar{v}_2\|},$$

kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, ... (umíme)

✓

soustava lin. rovnic
(umíme)

✓

- Pro obecné k např.:
  – podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu,
  – podle vlastností, tj. pomocí **determinantu**, vektorového součinu, apod. . . .

(částečně umíme) ✓

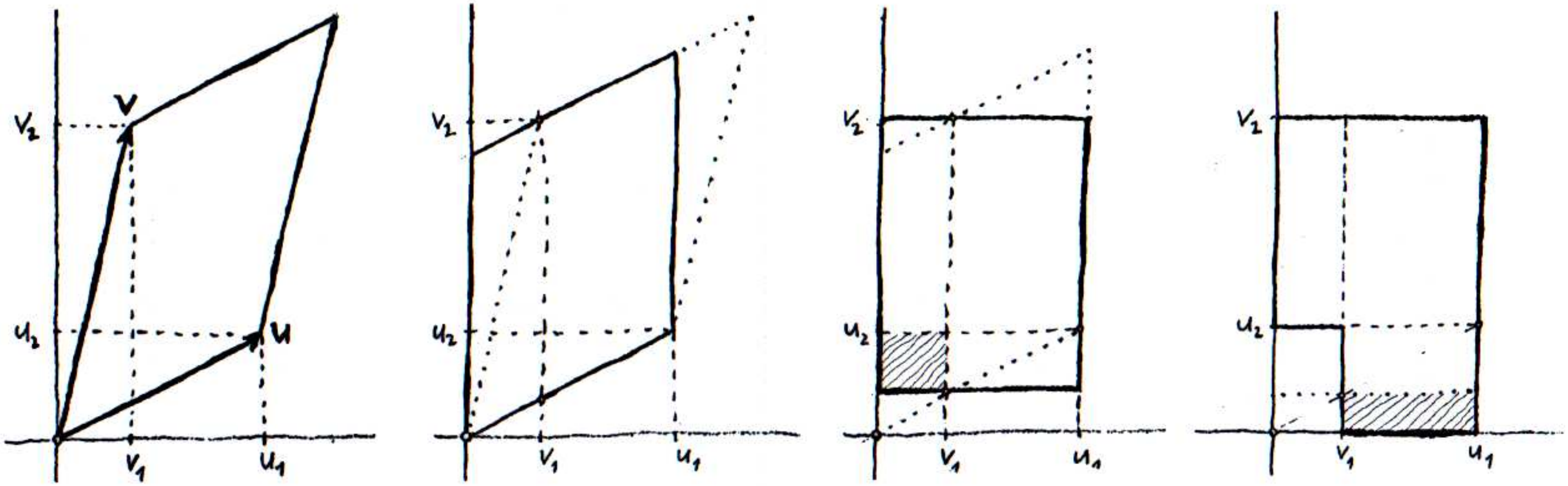
(~~na~~učíme) při-

!

"vzorečky"

Úvod (naivně)

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ …



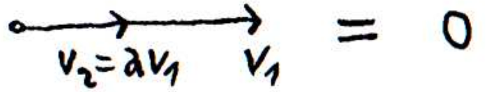
…je roven absolutní hodnotě determinantu $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

↑

$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

Úvod (koncepčně)

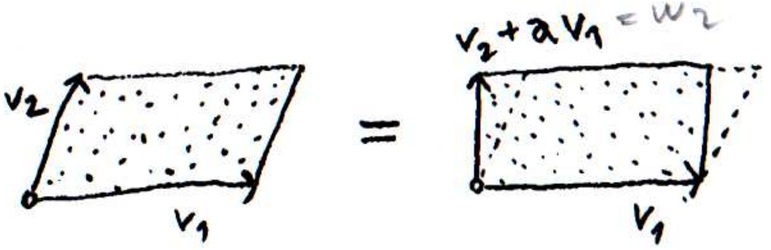
Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:



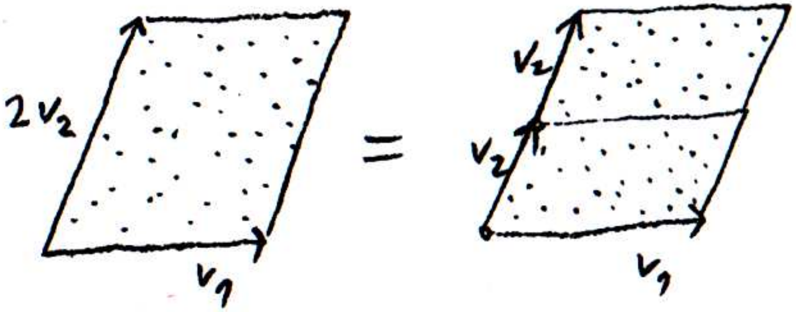
("výška" = 0)

$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$

$\ggg \longrightarrow$



$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \overset{!}{=} V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \overset{0}{\cancel{V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1)}} = \\ \overset{!}{=} V(\mathbf{v}_1, \underbrace{\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1}_{w_2})$$



$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = \underbrace{|b|}_{\geq 0} \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

$\boxed{\text{objem} \;\ldots\; V \times V \times \ldots\ldots \longrightarrow \mathbb{R}_+}$ ...

Determinant

Determinant chápeme

buď $\underbrace{\mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R}}$ nebo $\boxed{\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R}, \quad \text{kde } V = \mathbb{R}^n.}$!!!

Definice ....[1]

Vlastnosti základní:

- **anti-symetrické**

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots)$$

- **multi-lineární** v každé složce

$$\det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \dots) = b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$$
$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$$

Vlastnosti odvozené:

$$\ggg\longrightarrow \quad \overbrace{\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \dots)}^{\det(v_1, v_2, \dots) + a \cdot \cancel{\det(v_1, v_1, \dots)}^{0}} = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$$

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé}$$

---

[1] viz algebra (DÚ)

Vnější součin

det : $V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ závisí na souřadnicovém vyjádření vektorů, tj. na zvolené bázi. . . [2]

Pro ortonormální báze je výsledek tentýž:

Def.

Vnějším součinem $\boldsymbol{n}$-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je determinant matice tvořené souřadnicemi těchto vektorů vzhledem k nějaké ortonormální bázi; ozn.

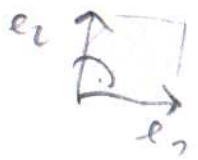
$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

zejména pro libo. ON bázi $(e_1, \dots, e_n)$ je $[e_1, \dots, e_n] = \underline{\underline{1}}$ = objem jednotkové n-krychle

Z předchozího plyne, že

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ ? & \text{pro } k < n \end{cases}$$

viz dále . . . !



---

[2] viz matice přechodu a Cauchyova věta (o součinu determinantů) ← $\det(P.M) = \det(P).\det(M)$

Kouzlo ($k = 2$)

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

(str. 118)

pričemž

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{(v_1 \circ v_2)^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2}} = \frac{\sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2}}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cdots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2)^2} \overset{!}{=} \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase determinant, ...

124

Kouzlo (obecně)

k = lib!

…tzv. *Gramův determinant*, ozn.

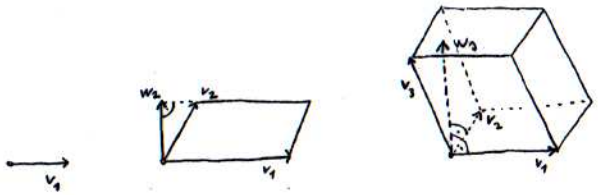
$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Věta

Pro libovolnou k-tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}.$$

Kouzlo (důkaz)



1) Pro navzájem kolmé vektory (kvádr):

$$G(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2 = V(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)^2.$$ ✓

→ (zejména ... ≧ 0 !)

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$:

$$G(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

← plyne z vlastností
- skal. součinu
- determinantu !

↑
(s. 121)

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \,.\, \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \,.\, \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3). \quad \square$$

✓

ÚVOD, PŘEHLED

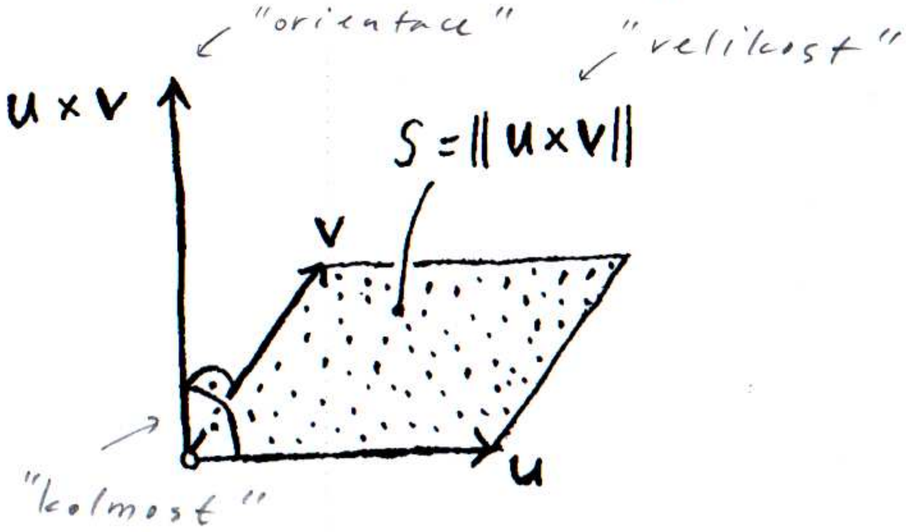
AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů
- obsahy a objemy
- vektorový součin

Vektorový součin ($n = 3$)

Ze SŠ známe jako operaci $V \times V \to V$ s několika užitečnými vlastnostmi…



Sice nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

127

Vektorový součin (obecně)

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \overset{\text{lib}}{x_1} \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = \underset{(-1)^{1+3}}{+} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 \underset{(-1)^{2+3}}{-} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 \underset{\dots}{+} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3.$$

Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

$$\underset{\text{vnější součin}}{[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}]} = \underset{\text{vektorový součin}}{(\mathbf{u} \times \mathbf{v})} \overset{\text{skalární součin}}{.} \mathbf{x},\ ^{3}$$

Obecná definice:

Vektorovým součinem $\boldsymbol{(n-1)}$-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující

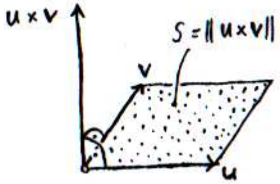
$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{x}$$

pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

---

[3] nalevo vnější součin, napravo tzv. smíšený součin

Vektorový součin (vlastnosti)



Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

- (a) *Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení* $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \to V$.
- (b) $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně závislé.*
- orientace (c) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně nezávislé* $\Longrightarrow (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ *je kladná báze.*
- kolmost (d) $\mathbf{w}$ *je kolmý ke všem vektorům* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$.
- velikost (e) $\|\mathbf{w}\| = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$. = objem ....

Důkaz.

Všechno plyne z definující rovnosti a vlastností determinantu. . . □

Vlastnosti vekt. součinu — DŮKAZ:

(*) def. rovnost $\underbrace{[v_1,\dots,v_{n-1},x]}_{\text{vnější součin (determinant)}} = \underbrace{w\cdot x}_{\text{skalární součin}}$, kde $x\in V$ lib.

(a) vnější součin = anti-sym. + multi-lin. $\Longrightarrow$ vektorový součin TAKY

(b) $[v_1,\dots,v_{n-1},x]=0\ \ \forall x\in V \overset{\text{det.}}{\iff} v_1,\dots,v_{n-1}$ lin. ZÁVISLÉ

$w\cdot x = 0\ \ \forall x\in V \overset{\text{skal. souč.}}{\iff} w = o$

(c) $v_1,\dots,v_{n-1}$ lin. NEZÁVISLÉ $\overset{(b)}{\Longrightarrow} w\neq o \Longrightarrow \dots$ báze

$[v_1,\dots,v_{n-1},w] \overset{(*)}{=} w\cdot w \overset{\text{skal. souč.}}{>} 0$

(d) $w\cdot v_i \overset{(*)}{=} [\underset{\sim}{v_1},\dots,v_{n-1},\underset{\sim}{v_i}] \overset{\text{det.}}{=} 0$, pro lib. i

(e) $\|w\|^{\cancel{2}} = w\cdot w \overset{(*)}{=} [v_1,\dots,v_{n-1},w] \overset{(c)}{=} V(v_1,\dots,v_{n-1},w) \overset{(d)}{=}$

$= \underbrace{V(v_1,\dots,v_{n-1})}_{\text{základna}}\cdot\underbrace{\cancel{\|w\|}}_{\text{výška}}$

ÚVOD, PŘEHLED

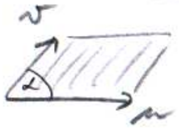
AFINNÍ GEOMETRIE

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- skalární součin, shodnost úseček a úhlů
- vzdálenosti podprostorů
- kolmý doplněk, kolmý průmět
- příklad – shrnutí & výhled
- kolmost a odchylka podprostorů
- obsahy a objemy
- vektorový součin
- poznámky, shrnutí & výhled

Poznámky

obsah



(viz s. 118)

- K vektorovému součinu pro $n = 3$:

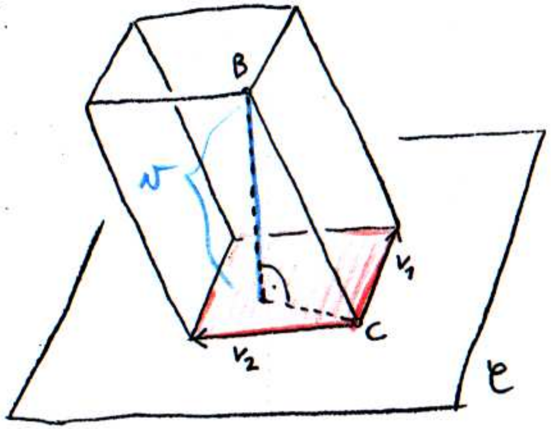
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha,$$

kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

- K aplikacím: vzdálenosti podprostorů bez řešení soustav rovnic. . .

– funguje báječně pro B = bod a $\mathcal{E}$ = cokoliv:

– potřeba drobná ostražitost pokud $\vec{B} \cap \vec{\mathcal{E}} \neq \{o\}$...



objem celého

výška rovnoběžnostěnu

$$v(B,C) = \frac{V(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\overrightarrow{BC})}{V(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}$$

objem podstavy

(viz s. 104)

131. Ještě pro $n=3$:

vekt. součin $V\times V\to V$ je binární operace na V, která NENÍ asociativní!

- tj. obecně neplatí

$$(u\times v)\times w = u\times(v\times w)$$

- zato platí tzv. Jacobiho identita:

$$(u\times v)\times w + (v\times w)\times u + (w\times u)\times v = 0$$

($\rightsquigarrow$ viz tzv. Lieovy algebry)

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE — SHRNUTÍ

- (Těleso ℝ $\rightsquigarrow$ vektorový prostor V $\rightsquigarrow$
  $\rightsquigarrow$ afinní prostor se zaměřením V ...)
- Navíc SKALÁRNÍ SOUČIN $V \times V \to \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$
  $\rightsquigarrow$ velikost vektoru, kolmost a odchylka vektorů,
  objem rovnoběžnostěnu, ...

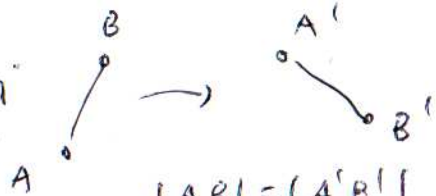
- VZDÁLENOST bodů a obecných podprostorů
  $\rightsquigarrow$ definice, geom. charakterizace, souvislosti, zkratky ...
- OBJEMY rovnoběžnostěnů apod.
  $\rightsquigarrow$ definice, DETERMINANTY (vnější součin, Gramův),
  vektorový součin, ...
- KOLMOST přímek a obecných podprostorů
  $\rightsquigarrow$ definice, záludnosti, ...
- ODCHYLKA přímek a obecných podprostorů
  $\rightsquigarrow$ definice, geom. charakterizace, zkratky, ...

SHODNÁ ZOBRAZENÍ

od jakživa víme, že

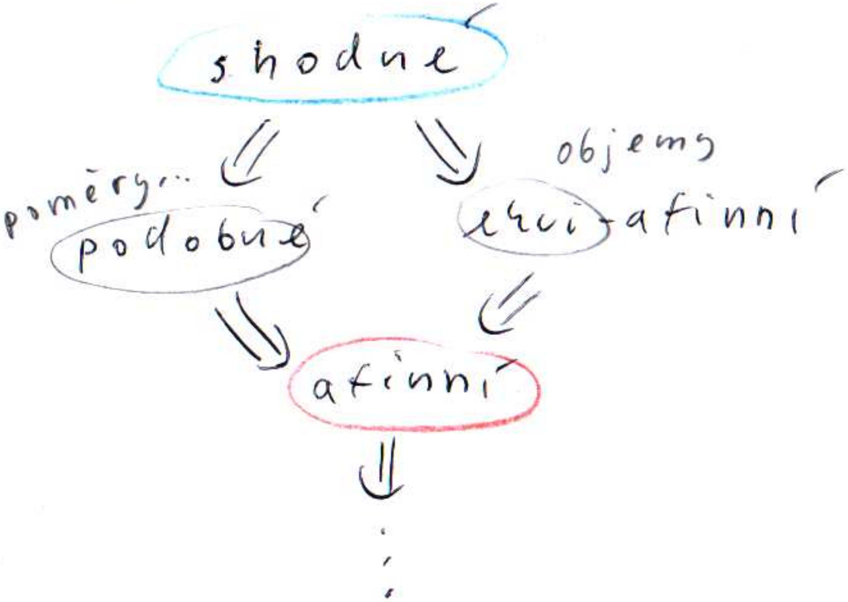
SHODNÁ zobr. zachovávají

- vzdálenosti



$|AB|=|A'B'|$

(tj. shodnosti úseček)



letos jsme se naučili, jak algebraicky popsat **AFINNÍ** zobr. ... (viz s.27)

Jak v tomto duchu vymezíme shodná (resp. podobná, ekvi-afinní) mezi afinními ??

- **AFINNÍ** ZOBR. ... $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$

obraz jednoho bodu

$$X \mapsto X' = \boxed{O'} + \boxed{\vec{f}(\vec{OX})}$$

(viz s. 28)

indukované lineární zobr.

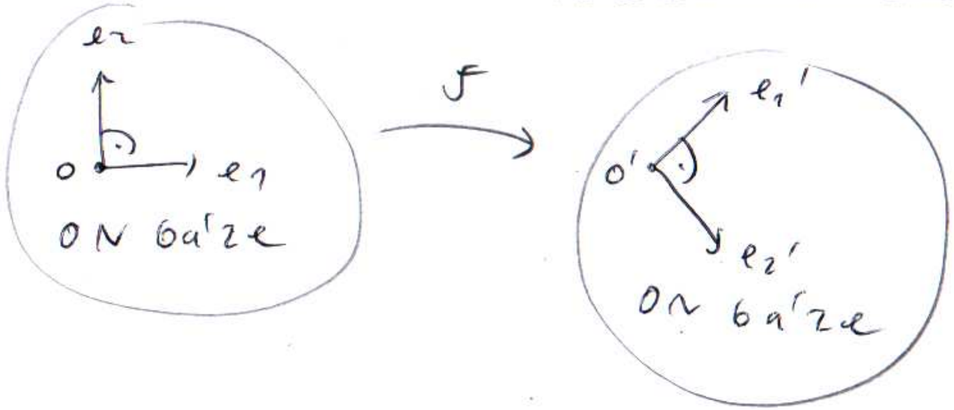
tj. vzhledem k souř. soust.:

$$\underset{X'}{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}} = \boxed{\underset{O'}{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}} + \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}}_{e_1'\, e_2' \dots} \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}}$$

matice zobr. $\vec{f}$ ... ozn. D

- předp. vše vyjádřeno vzhledem k ON souř. soust.

- zobr. je **SHODNÉ** $\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$ $e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots = 1$

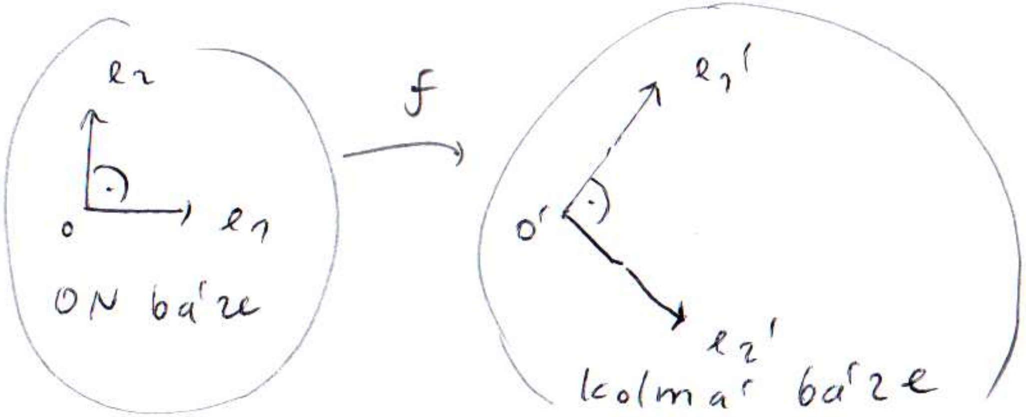
$e_1' \cdot e_2' = \dots = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}_{} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} e_1' & e_2' & \dots \end{array}\right)}_{} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{}$$

$$\boxed{D^T \cdot D = E}$$

135 PODOBNÉ :

- zobr. je **PODOBNÉ** $\iff$



$\|e_1'\| = \|e_2'\| =: k$

↑ koeficient podobnosti

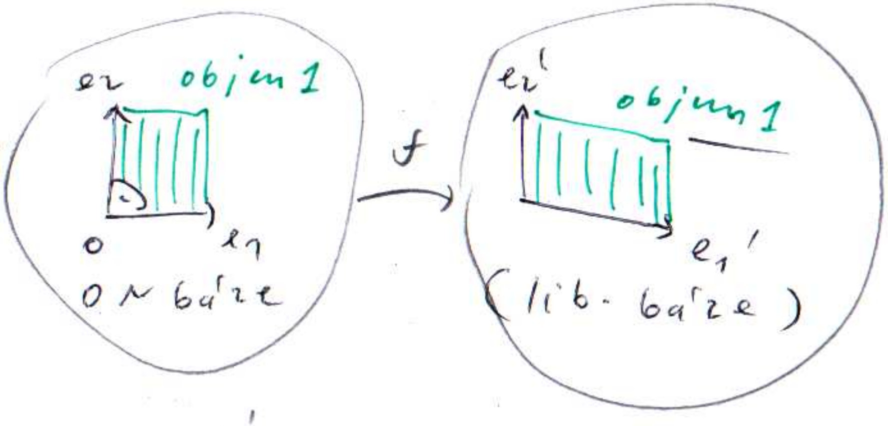
$$\iff e_1'\cdot e_1' = e_2'\cdot e_2' = \dots = k^2$$

$$e_1'\cdot e_2' = \dots\dots = 0$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}\cdot\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} e_1' & e_2' & \dots \end{array}\right)} = \underbrace{\begin{pmatrix} k^2 & 0 & \dots \\ 0 & k^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{D^T \cdot D = k^2 E}$$

- zobr. je **EKVI-AFINNÍ** $\iff$



$$\iff \det\underbrace{\begin{pmatrix} e_1'\cdot e_1' & e_1'\cdot e_2' & \dots \\ e_2'\cdot e_1' & e_2'\cdot e_2' & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice}} = 1$$

$$\text{Gramova matice} = \begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c|c|c} e_1' & e_2' & \dots \end{array}\right) = D^T\cdot D$$

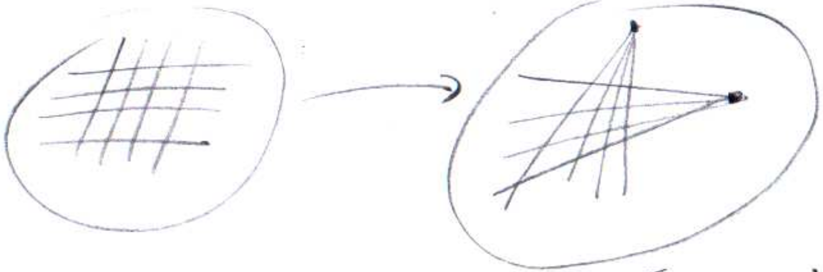
$$\iff \boxed{\det(D^T\cdot D) = 1}$$

VÝHLED

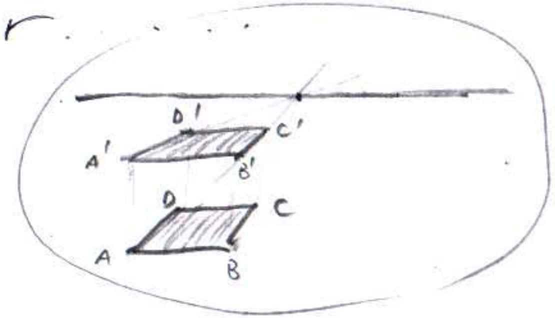
... tady budeme navazovat příští semestr.

... zejména se naučíme alg. popis:

- PROJEKTIVNÍHO rozšíření af. prostoru a odpovídající popis PROJEKTIVNÍCH zobrazení ...



- vymezení AFINNÍCH zobr. v tomto rámci ...
- rozpoznávat základní zobr. ...



- apod. ...