Repetitorium středoškolské matematiky 1

Petra Bušková

Podzim 2019, 3. část

1. Ověřte, zda čísla $-2+i\sqrt{2}; -2-i\sqrt{2}$ jsou kořeny rovnice $x^2+4x+6=0$.
2. Zapište v algebraickém tvaru číslo $(2+3i)(1+i)-(2+i)(1-3i)$
3. Vypočtěte $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{50}$
4. Zapište v algebraickém tvaru
   a) $\frac{3+4i}{2-5i}$
   b) $\frac{2-i}{-3+i}-\frac{1+2i}{1-3i}$
   c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-2}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$
5. Určete absolutní hodnoty čísel
   a) $\frac{1+2i}{2-i}+1-2i$
   b) $\frac{i}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$
6. Dokažte, že pro libovolná komplexní čísla z_1, z_2 platí
   $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$
7. V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla, pro něž platí
   a) $|1+i|\geq|z|>\frac{1}{2}$
   b) $|z-i|\geq|z+1-2i|$
8. Zapište komplexní číslo z v goniometrickém tvaru
   a) $z=-1+i\sqrt{3}$
   b) $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$
   c) $z=\pi i$
9. Zapište komplexní číslo z v algebraickém tvaru
   a) $z=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$
   b) $z=\frac{1}{2}(\cos 193\pi+i\sin 193\pi)$

10. Vypočítejte pomocí Moivreovy věty

    a) $(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{62}$

    b) $(1-i)^{100}$

11. Řešte v komplexníxh číslech rovnice a znázorněte jejich kořeny v Gaussově rovině

    a) $x^3 - i = 0$

    b) $x^8 - 1 = 0$

    c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

Řešení

1. ano

2. $-6 + 10i$

3. $-1 + i$

4. a) $-\frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$

   b) $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

   c) -2

5. a) $\sqrt{2}$

   b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. a) mezikruží kružnic se středem v počátku a poloměry $\frac{1}{2}$ (nezahrnuto), $\sqrt{2}$ (zahrnuto)

   b) polorovina s hraniční přímkou $y = x + 2$ neobsahující počátek

8. a) $z = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$

   b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

   c) $z = \pi(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

9. a) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

   b) $z = -\frac{1}{2}$

10. a) $-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

    b) -2^{50}

11. a) $x_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2$

    b) $x_k = \cos\frac{2k\pi}{8} + i\sin\frac{2k\pi}{8}, \quad k = 0, 1, \ldots, 7$

    c) $x_1 = 1 + i, \quad x_2 = 1 - i$