

# Repetitorium středoškolské matematiky 1

Petra Bušková

Podzim 2019, 1. část

## 1 Úprava výrazů

1.1 Vynásobte/vydělte výrazy

- a)  $(4b^2 + 2a^2 - 4ab) \cdot (3ab + 2a^2 - 3b^3)$
- b)  $(2a^2 - 5b^2 - 3ab) \cdot (ab^2 + 3a^2 - 2a^2b)$
- c)  $(4c^2d - 12c^4d^3) : (-4c^2d)$
- d)  $(x^2 + 8x + 15) : (x + 3)$
- e)  $(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3) : (m^2 + n^2)$
- f)  $(3v^3 - 17v^2 + 21v - 43) : (v^2 - 8v + 15)$

1.2 Rozložte na součin

- a)  $(4x - 1)(x + 2) - (12x^2 - 3x) + (7 + x)(4x - 1)$
- b)  $(2x + 3)^2 - (x - 1)^2$
- c)  $100x^3 - 0,2x^2y + 0,0001xy^2$
- d)  $81x^4 - 16y^4$

1.3 Zjednodušte výrazy, uveďte podmínky

- a)  $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$
- b)  $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$
- c)  $\frac{7}{2x-4} - \frac{3}{x+2} - \frac{12}{x^2-4}$
- d)  $\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2} : \frac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$
- e)  $\frac{\frac{x-y}{x} + \frac{x+y}{y-y}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$

1.4 Částečně odmocněte

- a)  $\sqrt{50}$
- b)  $\sqrt{240}$
- c)  $\sqrt[3]{48}$

$$d) \sqrt{27a^9b^{11}c^{21}} \quad a, b, c \in \mathbf{R}_0^+$$

1.5 Usměrněte zlomky

$$a) \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{3+2}}$$

$$c) \frac{19\sqrt{6}}{5\sqrt{3+3\sqrt{2}}}$$

$$d) \frac{4}{\sqrt[3]{5-1}}$$

## 2 Lineární rovnice a nerovnice, jejich soustavy

2.1 Řešte rovnice a nerovnice

$$a) 5(2-x) = -5x + 7$$

$$b) x\sqrt{2} - \sqrt{3} = -(\sqrt{3} - x\sqrt{2})$$

$$c) (x-1)^3 + (x-2)^3 + (x-3)^3 = 3(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$d) \frac{x}{2} - \frac{x-\frac{x}{2}}{2} - \frac{x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2} \cdot \frac{2+\frac{x}{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x}{2}\right) \frac{1}{2}$$

$$e) \frac{4x-7}{2} - \frac{x-4}{6} \geq 2x - 3$$

$$f) \frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

$$g) \frac{2x^4 - 18x^3 + 54x^2 - 54x}{x^3 - x} > 0$$

$$h) |2x - 5| = 1 - 3x$$

$$i) |2x + 1| \leq |x - 3|$$

$$j) ||x + 1| - 3| = 1$$

2.2 Řešte soustavy rovnic

$$a) \begin{aligned} 7x - 3y &= 15 \\ 5x + 6y &= 27 \end{aligned}$$

$$b) \begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 4x - 6y &= 10 \end{aligned}$$

$$c) \begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

2.3 Řešte rovnice a jejich soustavy s parametry

$$a) \frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$b) \frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m}, \quad m \in \mathbf{R}$$

$$c) \begin{aligned} x + (b-1)y &= 1 \\ (b+1)x + 3y &= -1 \quad b \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

- 2.4 Určete, pro která  $a \in \mathbf{R}$  má rovnice záporný kořen.  $\frac{x}{x-a} = a + 1$
- 2.5 Pro která  $a \in \mathbf{R}$  má soustava rovnic za řešení uspořádanou dvojici, jejíž první prvek je kladný a druhý záporný?  
 $ax - 2y = 3$   
 $3x + ay = 4$

### 3 Kvadratické rovnice a nerovnice, další typy rovnic a nerovnic

3.1 Řešte kvadratické rovnice a nerovnice

- a)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$   
 b)  $5x^2 - 2x + 2 = 0$   
 c)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$   
 d)  $x^2 + (2\sqrt{3} + 1)x + 3 + \sqrt{3} = 0$   
 e)  $2x - x^2 \geq 2 - x$

3.2 Podle plánu měl dělník vyrobit za určitý počet dní 540 výrobků. První čtyři dny pracoval podle plánu. Pak na základě nové technologie vyrobil každý den o 12 výrobků více a tak již dva dny před termínem překročil původní plán o tolik výrobků, kolik jich měl podle plánu vyrobit za jeden den. Určete, kolik výrobků měl podle plánu dělník vyrobit denně.

3.3 Určete kvadratickou rovnici, která má kořeny a) o 3, b) 3x větší, než rovnice  $x^2 - 9x + 15 = 0$ . Kořeny zadané rovnice nepočítejte.

3.4 V rovnici  $2x^2 - 7x + c$  určete  $c$  tak, aby byl jeden kořen rovnice 3.

3.5 Řešte rovnice

- a)  $\sqrt{5x+4} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+1}$   
 b)  $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{1-x} = 1 + \sqrt{x}$

3.6 Řešte rovnice s parametrem

- a)  $\sqrt{x^2 + b^2} - b = x, \quad b \in \mathbf{R}$   
 b)  $px^2 + (2p+3)x + p + \frac{3}{4} = 0, \quad p \in \mathbf{R}$

3.7 Určete všechny hodnoty parametru  $p \in \mathbf{R}$ , pro něž má rovnice  $x^2 + 2(p-4)x + p^2 + 6p = 0$

- a) reálné kořeny  
 b) oba kořeny kladné  
 c) oba kořeny záporné  
 d) jeden kořen kladný a druhý záporný

## 4 Řešení

- 1.1 a)  $4a^2 - 2a^3b - 4a^2b^2 - 6a^2b^3 + 12ab^3 + 12ab^4 - 12b^5$   
b)  $6a^5 - 13a^4b - 7a^3b^2 + 7a^2b^3 - 5ab^4$   
c)  $-1 + 3c^2d^2$   
d)  $x + 5$   
e)  $m^2 - mn$   
f)  $3v + 7 + \frac{32v-148}{v^2-8v+15}$
- 1.2 a)  $3(4x - 1)(7 + 3x)$   
b)  $(x + 4)(3x + 2)$   
c)  $(10x - 0,01y)^2$   
d)  $(9x^2 + 4y^2)(3x + 2y)(3x - 2y)$
- 1.3 a)  $\frac{x+y}{x-y}, \quad x \neq y, \quad a \neq b$   
b)  $\frac{a+b-c}{a-b+c}, \quad a \neq b - c, \quad a \neq -b - c$   
c)  $\frac{1}{2x-4}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -2$   
d)  $\frac{3}{m-n}, \quad m \neq n, \quad m \neq -n, \quad a \neq 0$   
e)  $\frac{2xy}{x^2-y^2}, \quad x \neq y, \quad x \neq -y, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$
- 1.4 a)  $5\sqrt{2}$   
b)  $4\sqrt{15}$   
c)  $2\sqrt[3]{6}$   
d)  $3a^4b^4c^{10}\sqrt{3abc}$
- 1.5 a)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$   
b)  $2 - \sqrt{3}$   
c)  $5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$   
d)  $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1$
- 2.1 a)  $K = \emptyset$   
b)  $K = \mathbf{R}$   
c)  $K = \{2\}$   
d)  $K = \{4\}$   
e)  $K = (-\infty; 1)$   
f)  $K = (-\infty; -\frac{7}{2}] \cup (-2; 1)$   
g)  $K = (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; \infty)$   
h)  $K = \{4\}$

- i)  $K = \langle -4; \frac{2}{3} \rangle$   
j)  $K = \{-5; -3; 1; 3\}$
- 2.2 a)  $K = \{[3; 2]\}$   
b)  $K = \{[t; \frac{2t-5}{3}]; t \in \mathbf{R}\}$   
c)  $K = \{[1; 2; -2]\}$
- 2.3 a)  $a = 0, a = 2 \dots K = \emptyset$   
 $a \neq 0, a \neq 2 \dots K = \{\frac{a+2}{2-a}\}$   
b)  $m = 0, m = -2 \dots K = \emptyset$   
 $m = 2 \dots K = \mathbf{R} - \{0\}$   
 $m \neq 0, m \neq 2, m \neq -2 \dots K = \{m + 2\}$   
c)  $b = 2 \dots K = \emptyset$   
 $b = -2 \dots K = \{[1 + 3y; y]; y \in \mathbf{R}\}$   
 $b \neq 2, b \neq -2 \dots K = \{[\frac{1}{b-2}; \frac{1}{b-2}]\}$
- 2.4  $a = 0, a < -1$
- 2.5  $a \in (-\frac{8}{3}; \frac{9}{4})$
- 3.1 a)  $K = \{\frac{1}{3}; 2\}$   
b)  $K = \emptyset$   
c)  $K = \{-\frac{1}{2}\}$   
d)  $K = \{-\sqrt{3} - 1; -\sqrt{3}\}$   
e)  $K = \langle 1; 2 \rangle$
- 3.2 Dělník měl denně vyrobit 36 výrobků.
- 3.3 a)  $x^2 - 15x + 51 = 0$   
b)  $x^2 - 27x + 135 = 0$
- 3.4  $c = 3$
- 3.5 a)  $K = \{1\}$   
b)  $K = \{1\}$
- 3.6 a)  $b = 0 \dots K = \langle 0; \infty \rangle$   
 $b \in \mathbf{R}^+ \dots K = \{0\}$   
 $b \in \mathbf{R}^- \dots K = \emptyset$   
b)  $p < -1 \dots K = \emptyset$   
 $p = -1 \dots K = \{\frac{1}{2}\}$   
 $p > -1, p \neq 0 \dots K = \{\frac{-2p-3+3\sqrt{p+1}}{2p}; \frac{-2p-3-3\sqrt{p+1}}{2p}\}$   
 $p = 0 \dots K = \{-\frac{1}{4}\}$
- 3.7 a)  $p \in (-\infty; \frac{8}{7})$   
b)  $p \in (-\infty; -6) \cup (0; \frac{8}{7})$   
c)  $p \in \emptyset$   
d)  $p \in (-6; 0)$