

přednáška 08:
normální rozdělení psti

Literatura v IS:

Fajmon, Růžičková: Matematika 3, kapitola 13.

Možná také: Hlavičková, Hliněná: Matematika 3 – sbírka
(BMA3-sbirka.pdf)

U normálního rozdělení:

iii) $P(X \in (a; b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$... pro spojitou veličinu
($f(x)$ je hustota psti)

**Příklad: Náhodná veličina X měří výšku stromů v daném lese.
Má normální rozdělení $EX = 50$ m, $DX = 25$.**

Příklad: Náhodná veličina X měří výšku stromů v daném lese. Má normální rozdělení $EX= 50$ m, $DX= 25$.

Vypočtete

a) $P(X > 60)$

b) $P(X \in (40; 50))$

c) $P(X \leq 45)$

1) Nejjednodušší řešení: pomocí jazyka R

Vypočtete

a) $P(X > 60) \dots \dots > 1 - F(60) = 1 - \text{pnorm}(60, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5)$

b) $P(X \in (40; 50)) \dots > F(50) - F(40) =$
 $\text{pnorm}(50, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5) - \text{pnorm}(40, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5)$

c) $P(X \leq 45) \dots \dots > F(45) = \text{pnorm}(45, \text{mean} = 50, \text{sd} = 5)$

2) Převodem $N_0(50,5)$ na normované normální rozdělení $N_0(0;1)$:

Věta: $X \sim N_0(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$ veličina $U := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_0(0;1)$

Označme Φ ... distribuční funkci veličiny $U \sim N_0(0;1)$

Postup výpočtu:

1) převedeme X -hodnotu na U -hodnotu $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$

2) $P(X < c) = F(c) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$... a hodnoty funkce Φ najdeme v tabulce.

2) Převodem $N(50,5)$ na normované normální rozdělení $N(0;1)$:

Vypočtete

$$a) P\left(\frac{X-50}{5} > \frac{60-50}{5}\right) = P\left(U > \frac{60-50}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{60-50}{5}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,977 = 0,023$$

$$b) P(X \in (40;50)) = P(40 < X < 50) = P\left(\frac{40-50}{5} < \frac{X-50}{5} < \frac{50-50}{5}\right) = P(-2 < U < 0) = \Phi(0) - \Phi(-2) = 0,5 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) - 0,5 = 0,977 - 0,500 = 0,477$$

$$c) P(X \leq 45) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{45-50}{5}\right) = P(U < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,841 = 0,159$$

B. Centrální limitní věta

Jestliže X_1, X_2, \dots, X_N jsou navzájem nezávislé veličiny, které mají všechny stejné rozdělení p_{st}

(nemusí být normální, ale libovolné, jeho střední hodnota je $E(X_i)=\mu$, rozptyl $D(X_i)=\sigma^2$),

Pak součtem těchto veličin je náhodná veličina $Y=\sum_{i=1}^N X_i$ se střední hodnotou $EY=N \cdot \mu$ a rozptylem $DY=N \cdot \sigma^2$, která má pro dostatečně velké N ($N > 30$) normální rozdělení

Důsledky:

1) Řadu náhodných veličin lze popsat normální rozdělením, protože je lze chápat jako součet zhruba stejně velkých náhodných vlivů

Př: a) výška stromu v lese

b) Výsledek u zkoušky

Důsledky:

2) Binomické rozdělení lze dobře aproximovat normálním rozdělením

$Bi(N, p)$ je vlastně součtem N alternativních rozdělení $Alt_i(p)$, tj. rozdělení, která jsou všechna stejná, mají stejnou střední hodnotu p a stejný rozptyl $p(1-p)$

Tedy $Bi(N, p)$ lze dobře aproximovat normálním rozdělením se střední hodnotou $EY = N \cdot p$ a rozptylem $DY = N \cdot p(1 - p)$

Příklad:

Firma vyrábí balíčky ořechů po 200 ks, přičemž přibližně $\frac{3}{4}$ objemu ořechů jsou burské $\frac{1}{4}$ objemu jsou lískové ořechy. Tyto ořechy se dokonale promíchají, a pak teprve se sypou do balíčků.

Jestliže koupíme jeden balíček ořechů, jaká je pst, že počet lískových ořechů v něm je v intervalu $\langle 47; 56 \rangle$?

výpočet:

a) Pomocí Bi (200, 1/4) = 0,5684522

b) Pomocí No (200, 1/4) = 0,524

c) Pomocí No (200, 1/4) s korekcí.. = 0,571942

Důvody pro korekci: a) $B_i(4,1/2) \dots p(1)+p(2)= 0,625$

Tento příklad je celý spočítán třemi způsoby v textu na stranách 218-219

Důvody pro korekci: b) $N_0(4,1/2) \dots \int_1^2 f = 0,341 \dots$ chyba 30%

Důvody pro korekci: c) $N_0(4,1/2) \dots \int_{0,5}^{2,5} f = 0,624 \dots$ chyba 0,1 %