

# Kombinatorika - úlohy

## Základní kombinatorická pravidla (pravidlo součinu, pravidlo součtu, Dirichletův princip)

*Metodické poznámky.* Tyto úlohy je vhodné užít k dalšímu procvičení (případně k maturitnímu opakování) v situaci, kdy jsou studenti seznámeni se základními kombinatorickými pravidly a pojmy (variace, kombinace, permutace) a mají procvičeny jednodušší rutinní úlohy na jejich využití.

U následujících úloh není nutné klást důraz na to, zda se jedná např. o variace či kombinace. Lze jimi vést studenty k přemýšlení, jakého kombinatorického pravidla užít a následného zdůvodnění proč tomu tak je. Úlohy jsou přitom voleny tak, aby se jednotlivá pravidla střídala a prolínala a studenti tedy při jejich řešení nepostupovali mechanicky. Úlohy jsou řazeny s rostoucí obtížností.

U některých úloh se nabízí řešení více způsoby, případně je vhodné upozornit studenty na úskalí postupu, který by byl chybný. V takovém případě je v části řešení učiněna příslušná poznámka.

Úlohy vedoucí k užítí Dirichletova principu jsou většinou ve středoškolských učebnicích a sbírkách opomíjeny. Proto jsou zde zařazeny v samostatné části a v případě, že studenti toto jednoduché kombinatorické pravidlo neznají, je možné tuto část vynechat.

1. Ve třídě studuje 13 dívek a 19 chlapců.

- Určete, kolik je ze studentů této třídy možné sestavit smíšených volejbalových družstev tak, aby družstvo bylo tvořeno právě třemi dívkami a právě třemi chlapci. (Dvě družstva, která se liší alespoň jedním hráčem, považujeme za různá. Neuvažujte o rolích jednotlivých hráčů v týmu - nahrávač, smečař,...)
- Kolika způsoby je možné v této třídě zvolit tříčlennou třídní samosprávu (1 zástupce do studentského parlamentu, 1 správce třídní knihy a 1 třídní pokladník)? (Dvě třídní samosprávy, které jsou složeny ze stejných studentů, ale liší se jejich funkcemi, považujeme za různé. Jakákoliv osoba může zastávat nejvýše jednu z uvedených funkcí.)
- Kolika způsoby je možné ze studentů uvažované třídy vybrat dva taneční páry pro předtančení na školním plese. (Taneční pár tvoří zásadně 1 dívka a 1 chlapec.)

2. Kolik existuje rovnoramenných trojúhelníků, jejichž všechny vrcholy leží ve vrcholech pravidelného osmiúhelníku? Rovnostranný trojúhelník považujeme za speciální případ trojúhelníku rovnoramenného. Dva trojúhelníky považujeme za různé, pokud alespoň jeden vrchol nemají společný, tzn. např. dva shodné trojúhelníky chápeme jako různé, pokud alespoň jeden vrchol nemají společný. Rozdělme dále všechny tyto trojúhelníky do množin tak, aby trojúhelníky, které jsou shodné, ležely vždy ve stejné množině a trojúhelníky, které nejsou shodné, ležely vždy v jiné množině. Do kolika množin budou trojúhelníky tímto způsobem rozděleny?

Dále určete počet (ve výše popsaném smyslu) všech rovnoramenných trojúhelníků, které mají vrcholy ve vrcholech pravidelného dvanáctiúhelníku.

3. Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se skládat ze šesti vyučovacích hodin (bez volných hodin) tak, aby se v něm vyskytovala matematika?

4. V rovině je dáno  $n$  bodů, z nichž  $p$  leží na jedné přímce ( $n, p \in \mathbb{N}$ ). Kromě nich žádné tři body na téže přímce neleží a dále žádné čtyři body neleží na jedné kružnici. Udejte, kolik je těmito body určeno kružnic.

5. Určete kolik čtyřciferných přirozených čísel dělitelných

- čtyřmi,
- deseti,
- dvaceti

lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, jestliže se zadané cifry

- i) nesmí opakovat,
- ii) mohou opakovat.

6. Ve Sportce se losuje 6 čísel ze 49 a jedno číslo dodatkové. Sázka se provádí tak, že hráč podá tiket, ve kterém zakřížkuje právě šest čísel, o kterých doufá, že budou vytažena. V případě, že sázející uhodne všech šest čísel získává první cenu, trefí-li se do pěti z vylosovaných čísel a je-li šesté číslo na jeho tiketu číslem dodatkovým, obdrží cenu druhou. Pokud uhodne právě pět vylosovaných čísel a neuhodne číslo dodatkové, dostává cenu třetí. Čtvrtá cena je udělena při uhodnutí právě čtyř a pátá při správném tipu právě tří vylosovaných čísel. Kolik různých tiketů je možné v této hře vsadit? Kolika způsoby (tj. podáním kolika různých tiketů) lze vyhrát každou z uvedených cen?
7. Kolik je na šachovnici možných tahů
- a) věže,
  - b) koně?
8. Trezor je zabezpečen třemi zámky. K odemčení každého z nich je třeba zadat správný kód. Trezor je přitom možné otevřít pouze při současném odemčení všech tří zámků, tj. po úspěšném zadání všech tří správných kódů. Libovolný z těchto zámků přitom otevírá jediný kód, který navíc vyhovuje následujícím podmínkám.
- První kód tvoří dvojciferné přirozené číslo, které má obě cifry liché a navzájem různé.
  - Druhým kódem je trojciferné přirozené číslo, které je dělitelné jedenácti.
  - Třetí kód představuje jednociferné či dvojciferné číslo, které dostaneme, pokud sečteme poslední cifru prvního kódu s poslední cifrou druhého kódu.
- a) Určete počet všech čísel, která mohou být kódem k prvnímu zámku (o ostatních zámcích v této souvislosti neuvažujte).
  - b) Určete počet všech čísel, která mohou být kódem k druhému zámku (o ostatních zámcích v této souvislosti neuvažujte).
  - c) Určete počet všech čísel, která mohou být kódem ke třetímu zámku (v závislosti na informacích z částí a) a b)).
  - d) Zjistěte počet všech (uspořádaných) trojic čísel vyhovujících zadaným podmínkám, které by bylo potřeba vyzkoušet, abychom měli jistotu, že trezor otevřeme.
9. Kolik prímek určuje 9 různých bodů, z nichž 4 leží na jedné přímce a žádné 3 další již na jedné přímce neleží. Výsledek vyčíslete.
10. Kolika způsoby lze z množiny všech dvojciferných přirozených čísel vybrat dvě (různá) čísla (bez ohledu na pořadí) tak, aby jejich součin byl dělitelný třemi.
11. *Anagramem* rozumíme libovolné „slovo“ (bez ohledu na to, zda dává smysl), které lze získat z písmen jistého daného slova a to tak, že každé písmeno je v tomto „slově“ použito právě tolikrát, kolikrát se v daném slově vyskytuje. Původní slovo a z něj utvořený anagram tedy mají stejnou délku, tj. každé z nich je složeno ze stejného počtu písmen. Například „slovo“ TURAMITA je jedním z anagramů, který je vytvořen ze slova MATURITA.
- a) Kolik anagramů lze utvořit z písmen slova GYMNÁZIUM? (Původní slovo GYMNÁZIUM považujte za jeden z hledaných anagramů.)
  - b) V kolika anagramech, které jsou utvořeny z písmen slova GYMNÁZIUM, se vyskytují dvě písmena M bezprostředně vedle sebe (tzn. každý vyhovující anagram obsahuje „podslovo“ typu MM)?

- c) V kolika anagramech, které jsou utvořeny z písmen slova GYMNÁZIUM, se žádné dvě samohlásky nevyskytují bezprostředně vedle sebe (tzn. každý vyhovující anagram má mezi libovolnými dvěma samohláskami alespoň jednu souhlásku)?
12. V obchodě nabízí tenisové míče čtyř různých značek - Dunlop, Penn, Slazenger a Wilson. Všechny jsou baleny v dózách po čtyřech kusech. Kolika způsoby si může Aleš koupit 8 dóz? Každé značky má prodejce více než 8 dóz.
13. Do soutěže se zapojilo 1 023 účastníků, přičemž 980 z nich zaslalo správnou odpověď a bude mezi ně rozděleno 5 knižních cen. Určete kolika způsoby může rozdělení cen dopadnout, jestliže
- všechny knihy jsou stejné a každý výherce dostane právě jednu z nich,
  - se jedná o 5 různých knih a každý výherce dostane právě jednu z nich,
  - všechny knihy jsou stejné a libovolný výherce může dostat i více knih,
  - se jedná o 5 různých knih a libovolný výherce může dostat i více knih.
- Výsledky stačí určit pomocí výrazů sestavených z faktoriálů, kombinačních čísel, ... a není třeba je vyčíslovat.
14. Kolika způsoby lze rozložit 16 tenistů do dvojic pro první kolo turnaje? Další průběh turnaje (tj. případné soupeře v dalších kolech) neuvažujte.
15. Na kostkách domina je v každém poli znázorněno 0 - 10 bodů, přičemž libovolná z možných dvojic je na právě jedné kostce. Kolik kostek má tato hra? Kolika způsoby je možné ze všech kostek vybrat jednu dvojici kostek tak, aby bylo možné je přiložit k sobě?

### Řešení, návody a výsledky:

- Vzhledem k tomu, že nezáleží na pořadí, vybereme dívky  $\binom{13}{3}$  a chlapce  $\binom{19}{3}$  způsoby, tj. družstev je  $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} \cdot \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3!} = 286 \cdot 969 = 277\,134$ .
  - Nezáleží na pohlaví, tedy  $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$ .
  - Pro výběr prvního páru je  $13 \cdot 19 = 247$  možností, pro výběr druhého páru je  $12 \cdot 18 = 216$  možností. Protože na pořadí párů nezávisí, je možností výběru  $\frac{247 \cdot 216}{2} = 26\,676$ .
- Žádný trojúhelník vepsaný předepsaným způsobem do pravidelného osmiúhelníku nemůže být rovnostranný. Osmi způsoby vybereme hlavní vrchol a dále máme tři možnosti pro výběr základny, tj. existuje právě 24 rovnoramenných trojúhelníků vyhovujících zadání, které lze popsáním způsobem rozdělit do tří množin (každá obsahuje osm prvků).  
V pravidelném dvanáctiúhelníku se již objeví i trojúhelníky rovnostranné, dle zadané konvence jejich počítání jsou celkem 4. Dále můžeme analogicky jako v předchozím určit počet všech rovnoramenných trojúhelníků, které nejsou rovnostranné. Dvanácti způsoby vybereme hlavní vrchol a zůstanou nám čtyři možnosti, jak zvolit základnu. Dohromady tedy máme  $4 + 12 \cdot 4 = 52$  vyhovujících trojúhelníků.
- Z jedenácti předmětů (mimo matematiky) vybereme dalších 5, které se budou v daný den společně s matematikou vyučovat. To lze udělat  $\binom{11}{5}$  způsoby. Jednotlivé předměty zbývá rozmístit do rozvrhu. Je možné je uspořádat  $6!$  způsoby. Dá se tedy sestavit

$$\binom{11}{5} \cdot 6! = \frac{11!}{6! \cdot 5!} \cdot 6! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 332\,640$$

různých rozvrhů. Výsledek je možné zdůvodnit rovněž tak, že nejprve šesti způsoby vybereme hodinu, v níž bude vyučována matematika a dále budeme postupně zaplňovat neobsazené vyučovací hodiny. K obsazení prvního volného místa v rozvrhu máme volbu z jedenácti předmětů, pro druhé místo už jen z desíti předmětů, atd. až poslední páté pole zaplníme libovolným ze zbývajících sedmi předmětů. Užitím kombinatorického pravidla součinu již dostáváme výše uvedený výsledek.

4. Libovolné tři ze zadaných bodů, které navíc neleží na jedné přímce, určují jednoznačně kružnici. Vybereme-li však trojici bodů ležících na jedné přímce, neexistuje žádná kružnice, na níž by tyto 3 body současně ležely. Hledaných kružnic tedy je  $\binom{n}{3} - \binom{p}{3}$ .
5. a) Číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když jeho poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi. Budeme tedy zvlášť uvažovat o jednotlivých případech podle toho jakou cifrou (ciframi) číslo končí. Musí to být některá z číslic 0, 2, 4 (poslední dvojčíslí může být jen a pouze tvaru 00, 20, 40, 12, 32, 04, 24, 44).
- i) Cifry se neopakují.
- ◇ Končí-li číslo nulou, máme pro výběr předposlední číslice dvě možnosti (2 nebo 4), na první pozici můžeme umístit libovolnou z dosud nepoužitých tří číslic a dvě možnosti výběru ještě zbývají na druhou pozici. Čísel končících nulou tedy je  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ .
  - ◇ Končí-li číslo dvojkou, máme pro výběr předposlední číslice dvě možnosti (1 nebo 3), dále je třeba obsadit první pozici, neboť jsme vázáni tím, že zde nesmí být nula - máme tedy dvě možnosti výběru. Konečně pro zaplnění druhé pozice máme též dvě možnosti (může tam být 0 nebo zbývající nepoužitá číslice). Čísel končících dvojkou tedy je  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ .
  - ◇ Končí-li číslo dvojčíslím 04, máme pro výběr první číslice tři možnosti a pro obsazení druhé pozice dvě možnosti. Čísel končících dvojčíslím 04 tedy je  $3 \cdot 2 = 6$ .
  - ◇ Končí-li číslo dvojčíslím 24, máme pro výběr první číslice dvě možnosti (nesmíme tam umístit 0) a pro obsazení druhé pozice opět dvě možnosti. Čísel končících dvojčíslím 24 tedy je  $2 \cdot 2 = 4$ .
- Zjišťujeme, že čísel dělitelných čtyřmi (za podmínky neopakujících se cifer) je celkem  $12 + 8 + 6 + 4 = 30$ .
- ii) Cifry se mohou opakovat. Pro obsazení posledního dvojčíslí máme právě 8 možností (00, 20, 40, 12, 32, 04, 24, 44). Ve všech případech dále platí, že na první pozici můžeme umístit libovolnou nenulovou číslici (máme 4 možnosti volby), na druhé pozici žádné omezení není - máme zde 5 možností. Zjišťujeme, že čísel dělitelných čtyřmi (za podmínky možného opakování se cifer) je celkem  $4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$ .
- b) V případě dělitelnosti deseti je nutné a stačí, aby poslední cifrou byla nula.
- i) Cifry se neopakují. Na první pozici lze vybrat libovolnou ze čtyř zbývajících cifer, na další ze tří a na třetí zůstává volba ze dvou možností, existuje tedy  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  takových čísel.
- ii) Cifry se mohou opakovat. Na první pozici lze vybrat libovolnou ze čtyř cifer (kromě nuly), na druhou a na třetí pozici pak jakoukoliv z pěti uvažovaných cifer, existuje tedy  $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$  takových čísel.
- c) Pro dělitelnost dvaceti je nutné a stačí z čísel, o kterých již víme, že jsou dělitelná čtyřmi vybrat ta, která jsou i dělitelná pěti. Vzhledem k tomu, že číslici 5 neuvažujeme, jsou to právě ta čísla, která končí nulou.
- i) Cifry se neopakují. Jedná se o 12 čísel (viz zdůvodnění výše - část a), oddíl i), první odrážka).
- ii) Cifry se mohou opakovat. Pro obsazení posledního dvojčíslí máme právě 3 možnosti (00, 20, 40). Ve všech případech dále platí, že na první pozici můžeme umístit libovolnou nenulovou číslici (máme 4 možnosti volby), na druhé pozici žádné omezení není - máme zde 5 možností. Zjišťujeme, že čísel dělitelných dvaceti (za podmínky možného opakování se cifer) je celkem  $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ .
6. Různých tiketů lze podat  $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ , první cenu však zajistí jediný z nich. V případě druhé ceny je třeba mít na tiketu dodatkové číslo a dále pět z vylosovaných čísel, tzn. šesti způsoby můžeme zvolit to z vylosovaných čísel, které na tiketu nemáme. Proto právě 6 různých tiketů může vyhrávat druhou cenu. Vynásobíme-li těchto šest možností, jak uhodnout správně pětici z šesti vylosovaných čísel, číslem 42, tj. počtem možností, jak vybrat poslední číslo tak, aby nebylo žádným z šesti čísel vylosovaných ani číslem dodatkovým, zjistíme, že třetí cenu lze získat podáním některého z 252 různých tiketů. V případě čtvrté ceny to je  $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,545$  různých tiketů a u páté ceny  $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246\,820$  různých tiketů.

7. a) Věž se při hře může dostat na libovolné pole šachovnice, tzn. pro volbu počátečního pole při jejím tahu máme 64 možností. Věží je možné táhnout na libovolné pole v příslušném sloupci či řádku (kromě počátečního). Bez ohledu na polohu počátečního pole je takových polí vždy 14. Existuje tedy  $64 \cdot 14 = 896$  možných tahů věže.
- b) Počet tahů koně závisí na poloze příslušného počátečního pole na šachovnici. Rozdělme šachovnici do skupin polí (na disjunktní podmnožiny) tak, aby ve stejné skupině byla pole, z nichž existuje stejný počet tahů koněm.

A	B	C	C	C	C	B	A
B	C	D	D	D	D	C	B
C	D	E	E	E	E	D	C
C	D	E	E	E	E	D	C
C	D	E	E	E	E	D	C
C	D	E	E	E	E	D	C
C	D	E	E	E	E	D	C
B	C	D	D	D	D	C	B
A	B	C	C	C	C	B	A

Snadno nahlédneme, že z polí typu A (jsou 4) může kůň táhnout dvěma způsoby, z polí typu B (je jich 8) třemi způsoby, z polí typu C (je jich 20) čtyřmi způsoby, z polí typu D (je jich 16) šesti způsoby a z polí typu E (je jich 16) osmi způsoby. Možných tahů koněm tedy je  $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 336$ .

8. a) První cifru lze vybrat pěti způsoby, druhou čtyřmi, protože nesmíme vybrat cifru, která je použita na prvním místě. Proto existuje právě  $5 \cdot 4 = 20$  čísel, která mohou být kódem k prvnímu zámku.
- b) Nejmenším trojčíslným číslem dělitelným jedenácti je 110, největším 990. Proto existuje právě  $\frac{990-110}{11} + 1 = 81$  čísel, která mohou být kódem k druhému zámku.
- c) Poslední cifra prvního kódu je 1, 3, 5, 7 nebo 9, druhý kód může končit jakýmkoliv číslem z množiny  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . Snadno nahlédneme, že každý z teoreticky možných součtů 1 až 18 může být v této situaci realizován. Proto existuje právě 18 čísel, která mohou být kódem ke třetímu zámku.
- d) Na místě prvního kódu je možné vyzkoušet libovolné z 20-i vyhovujících čísel v úloze a), pro druhý zámek připadá v úvahu každé z 81 vyhovujících čísel v části b), ovšem pro třetí kód již žádnou volbu nemáme - ten je jednoznačně určen výběrem předchozích dvou čísel. Je tedy třeba zkusit  $20 \cdot 81 = 1620$  variant trojic čísel.

9. Popíšeme dvě úvahy vedoucí k řešení.

- Čtyři body leží dle zadání na přímce, tzn. určují jedinou přímku. Výběrem libovolné dvojice ze zbývajících pěti bodů bude určena vždy jiná přímka, máme tedy  $\binom{5}{2} = 10$  dalších přímek. Konečně může být přímka určena jedním ze čtveřice kolineárních bodů a jedním z dalších pěti bodů, takových přímek je  $4 \cdot 5 = 20$ . Zjišťujeme, že zadané body určují dohromady  $1 + 10 + 20 = 31$  přímek.
- Kdyby žádné tři body neležely na jedné přímce určovaly by  $\binom{9}{2} = 36$  přímek. Přímku, na které leží právě čtyři zadané body jsme ale počítali  $\binom{4}{2} = 6$  krát, ačkoliv jsme ji správně měli uvážit pouze jednou. Hledaných přímek tedy je  $36 - 6 + 1 = 31$ .

10. Součin je dělitelný třemi právě tehdy, když alespoň jeden činitel je dělitelný třemi. Z devadesáti dvojciferných přirozených čísel je právě 30 dělitelných třemi. Vysvětlíme dva způsoby dořešení úlohy.

- Mohou nastat dva vyhovující případy - oba činitelé jsou násobky tří (lze je vybrat  $\binom{30}{2} = 435$  způsoby), nebo je dělitelný třemi právě jeden z nich (pro výběr příslušné dvojice je tedy  $30 \cdot 60 = 1800$  možností). Proto existuje  $435 + 1800 = 2235$  vyhovujících dvojic.
- Od počtu všech neuspořádaných dvojic dvojciferných přirozených čísel, tj. od čísla  $\binom{90}{2} = 4005$  odečteme počet nevyhovujících dvojic, tj. počet dvojic, ve kterých žádný z činitelů není násobkem tří. Těch je  $\binom{60}{2} = 1770$ . Ve výsledku tedy dostáváme  $4005 - 1770 = 2235$  vyhovujících dvojic.

11. a) Uspořádejme písmena slova GYMNÁZIUM jakoby byla všechna různá a tento počet vydělme dvěma, což odpovídá prohození písmene M, které se nijak neprojevívá. Anagramů tedy je  $\frac{9!}{2} = 181\,440$ .
- b) Podслово MM chápeme jako jediné písmeno. Máme tedy uspořádat osm různých písmen, což lze  $8! = 40\,320$  způsoby.
- c) Máme 5 souhlásek, které dle schématu

–Souhláska – Souhláska – Souhláska – Souhláska – Souhláska–

vytvoří 6 pozic (označených –), které mohou být obsazeny některou (vždy ale jedinou) ze čtyř samohlásek obsažených ve slově GYMNÁZIUM. Vybereme tedy čtyři z nich  $\binom{6}{4} = 15$  způsoby, dále na ně tyto samohlásky rozmístíme  $4! = 24$  způsoby a konečně i souhlásky (na pozice pro souhlásky)  $\frac{5!}{2} = 60$  způsoby. Hledaných anagramů tedy je  $15 \cdot 24 \cdot 60 = 21\,600$ .

12. Každý takový nákup lze zakódovat šifrou, kterou tvoří 8 vodorovných čárek a 3 čárky svislé. Svislé čárky značí jisté přepážky mezi čtyřmi přihrádkami (druhy míčů), do kterých rozdělujeme osm vodorovných čárek (totiž dóz míčů). Např. šifra

– – || – – – – – | –

značí nákup 2 dóz míčů značky Dunlop (1. přihrádka), žádné dózy značky Penn (2. přihrádka), pěti dóz značky Slazenger (3. přihrádka) a jedné dózy značky Wilson (4. přihrádka). Vzhledem k tomu, že každému z možných nákupů odpovídá jediná šifra a opačně libovolná šifra popisuje jediný nákup míčů (tj. příslušné zobrazení je bijektivní), stačí určit, kolik popsanych šifer je možné sestavit. Z osmi symbolů – a tří | máme utvořit šifru o celkovém počtu 11-i znaků. Z jedenácti pozic tedy stačí vybrat tři, na které napíšeme | a na volná místa (již bez možnosti jakékoliv volby) doplníme –. Možných nákupů je tedy  $\binom{11}{3} = 165$ .

13. a)  $\binom{980}{5}$ ,
- b)  $\binom{980}{5} \cdot 5! = 980 \cdot 979 \cdot 978 \cdot 977 \cdot 976$ .
- c) Uvažujme šifrování podobně jako v předchozí úloze. Lidé, kteří správně odpověděli, tvoří přihrádky (k jejich oddělení potřebujeme 979 přepážek; např. symbol |), do kterých bude rozděleno 5 stejných objektů (např. symbol –). Tedy existuje  $\binom{984}{5}$  kódů.
- d) Každou knihu je možné dát libovolnému z 980 kandidátů výhry, tj. možností je  $980^5$ .
14. Z šestnácti tenistů je třeba utvořit osm dvojic. První dvojici losujeme ze všech šestnácti hráčů, tedy může být vybrána  $\binom{16}{2}$  způsoby, druhou dvojici již jen ze čtrnácti zbývajících hráčů  $\binom{14}{2}$  způsoby, atd. Protože nás však nezajímá další průběh turnaje, není podstatné pořadí vylosovanych dvojic (tedy jejich umístění v pavouku turnaje). To znamená, že součin naznačených kombinačních čísel je potřeba vydělit číslem  $8!$ , které udává počet způsobů, jak seřadit již vylosovanych osm dvojic. Možností losu tedy je

$$\frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{8!} = \dots = 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 2\,027\,025.$$

Získaný výsledek je možné zdůvodnit rovněž takto. První hráč má 15 možností výběru soupeře. Zbyde 14 dalších hráčů, přičemž první z nich má 13 možností výběru soupeře, atd.

15. Označme  $k$  hledaný počet kostek domina a  $z$  počet způsobů výběru dvojice kostek, které lze k sobě přiložit. Nejprve si uvědomme, že výpočet  $k = \frac{(10+1)^2}{2}$  je chybný, protože v čitateli sice kostky, které mají v obou částech různý počet bodů, počítáme dvakrát, ale toto již neplatí pro kostky se stejným počtem bodů na obou stranách. Proto zvlášť určíme počet kostek, které mají v obou částech různý počet bodů a přičteme počet kostek, které mají v obou částech stejný počet bodů, tedy  $k = \frac{11 \cdot 10}{2} + 11 = 66$ . Dále  $z = 11 \cdot \binom{11}{2} = 605$ , neboť jedenácti způsoby vybereme počet bodů, který bude na obou kostkách (abychom je mohli přiložit k sobě) a z jedenácti kostek, které tento počet bodů obsahují, vybereme libovolné dvě.

## Úlohy využívající Dirichletův princip

1. Předpokládejme, že žádný člověk nemůže mít na hlavě více než 300 000 vlasů. Dokažte, že pak v Brně musí žít alespoň dva lidé, kteří mají stejný počet vlasů.
2. Adam skladuje své ponožky v jednom neprůhledném pytli. Má v něm ponožky čtyř různých barev - bílé, černé, modré a šedé (od každé barvy alespoň 10 kusů). Zda se jedná o ponožky na pravou či levou nohu, to Adam zásadně nerozlišuje. Kolik ponožek musí z pytle náhodně vytáhnout, aby měl jistotu, že z nich zkompletuje
  - a) alespoň jeden pár (bez ohledu na to jaké bude barvy),
  - b) alespoň dva páry (bez ohledu na to jaké budou barvy),
  - c) alespoň dva páry téže barvy (bez ohledu na to jaké bude barvy).
3. Na představení v divadle se sešlo  $n$  diváků. Dokažte, že mezi nimi jsou alespoň dva, kteří ve skupině těchto  $n$  lidí mají stejný počet přátel. Přátelství přitom považujeme za vzájemný vztah, tedy je-li osoba A přítelem osoby B, pak i opačně osoba B považuje A za svého přítele.
4. V rovině je dáno 31 takových bodů, že v libovolné trojici z nich lze najít dva body, jejichž vzdálenost není větší než 3 cm. Dokažte, že existuje kruh s průměrem 6 cm, v němž leží alespoň 16 z těchto bodů.
5. Dokažte, že z každé skupiny sedmi prvočísel lze vybrat dvojici, která končí stejnou číslicí. Z jakého nejmenšího počtu prvočísel bychom mohli vybrat trojici čísel končících stejnou cifrou?
6. Z množiny všech dvouciferných přirozených čísel vyberte co největší počet čísel tak, aby
  - a) rozdíl žádných dvou z vybraných čísel nebyl dělitelný devíti,
  - b) součet žádných dvou z vybraných čísel nebyl dělitelný devíti.

Zdůvodněte, proč vámi nalezený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel zadání úlohy nemůže vyhovět.

### Řešení, návody a výsledky:

1. Je všeobecně známo, že Brno má více než 350 000 obyvatel. Můžeme je myšlenkově rozdělit do skupinek podle počtu vlasů, které má každý na své hlavě. Je evidentní, že musí existovat skupinka, která obsahuje alespoň dvě osoby.
2.
  - a) 5 (čtyři by ještě mohly být každá jiné barvy);
  - b) 7 (z šesti ponožek musí být nutně schopen poskládat pár, dále může mít po jednom kusu ponožek čtyř různých barev, které pár netvoří);
  - c) 13 (dvanáct ponožek může být takových, že má právě tři kusy od každé barvy).
3. Rozdělme diváky do přihrádek podle počtu přátel, které ve skupině diváků mají. Každý mezi přítomnými má 0 až  $n - 1$  přátel, což představuje  $n$  přihrádek. Ovšem, je-li v hledišti taková osoba, která se přátelí se všemi ostatními diváky, pak tam není nikdo, kdo by neměl žádného přítele. To znamená, že alespoň jedna z přihrádek, které obsahují 0 a  $n - 1$  přátel, musí zůstat prázdná. Proto rozdělujeme  $n$  osob pouze do  $n - 1$  přihrádek, takže v alespoň jedné z nich budou alespoň dvě osoby.
4. Vyberme takové dva z těchto bodů, jejichž vzdálenost je větší než 3. Pokud by neexistovaly, byli bychom hotovi. Uvažme dva kruhy se středy v těchto dvou zvolených bodech, každý s poloměrem 3 cm. Dle zadání každý další bod musí ležet v alespoň jednom z těchto kruhů, proto v alespoň jednom z nich takových bodů musí existovat alespoň 16.

5. Prvočíslo zřejmě nemůže končit žádnou číslicí z množiny  $\{0, 4, 6, 8\}$ . Rozdělíme-li sedm čísel do šesti přihrádek podle toho, jakou číslicí končí, zjistíme, že v alespoň jedné z těchto přihrádek musí být alespoň dvě čísla. Pro odpověď na druhou část otázky je třeba si uvědomit, kolik čísel může být v jednotlivých přihrádkách obsaženo. Sudé prvočíslo existuje jediné - číslo 2, taktéž prvočíslo končící cifrou 5 existuje pouze jedno, ostatní přihrádky mohou obsahovat čísel více (např. každé z čísel 11, 31, 3, 13, 7, 17, 19, 29 je prvočíslem). Proto máme jistotu, že z jedenácti prvočísel vždy vybereme trojici čísel končících stejnou cifrou. To, že tento počet je s požadovanou vlastností opravdu nejmenší, dokazuje množina deseti prvočísel  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31\}$  z nichž požadovanou trojici nevybereme.
6. Všechna dvouciferná přirozená čísla rozdělme do devíti desetiprvkových množin podle toho, jaký dávají zbytek po dělení devíti - tzv. do zbytkových tříd podle modulu 9.

$$\begin{aligned} M_0 &= \{18, 27, \dots, 99\} , \\ M_1 &= \{10, 19, \dots, 91\} , \\ M_2 &= \{11, 20, \dots, 92\} , \\ M_3 &= \{12, 21, \dots, 93\} , \\ M_4 &= \{13, 22, \dots, 94\} , \\ M_5 &= \{14, 23, \dots, 95\} , \\ M_6 &= \{15, 24, \dots, 96\} , \\ M_7 &= \{16, 25, \dots, 97\} , \\ M_8 &= \{17, 26, \dots, 98\} , \end{aligned}$$

- a) Vybereme-li dvě čísla ze stejné zbytkové třídy, pak je jejich rozdíl dělitelný devíti. Pokud však zvolíme jakákoliv čísla ze dvou různých tříd, pak jejich rozdíl evidentně devíti dělitelný není. Kdybychom tedy vybrali více než devět čísel, musel by se v tomto výběru nutně objevit alespoň dvakrát reprezentant téže zbytkové třídy. Vyhoví tedy nejvýše devítiprvková množina, která bude obsahovat po jednom zástupci z každé výše uvedené zbytkové třídy, např. množina  $\{10, 11, \dots, 18\}$ .
- b) Součet dvou čísel je dělitelný devíti právě tehdy, když je dělitelný devíti součet zbytků, které každé z těchto čísel po dělení devíti dává (tzn. součet příslušných indexů jednotlivých zbytkových tříd). Můžeme tedy vybrat jednoho reprezentanta třídy  $M_0$  (součet dvou čísel z  $M_0$  by totiž byl dělitelný devíti) a všechny prvky z množin  $M_1, M_2, M_3$  a  $M_4$ . Dohromady se jedná o 41 vyhovujících čísel. Větší počet čísel již zřejmě nemůže vyhovět. Uvedené úvahy jsou korektní též díky skutečnosti, že všechny zbytkové třídy mají stejný počet prvků.

## Faktoriály, kombinační čísla, binomická věta

*Metodické poznámky.* Mezi zařazenými úlohami je minimum těch, které vedou na rutinní úpravy výrazů obsahující faktoriály či kombinační čísla. Takové úlohy jsou v dostatečné míře zastoupeny v dostupných a běžně používaných středoškolských sbírkách. Pro ilustraci jsou zde zařazeny první dvě úlohy tohoto zaměření. Jsou záměrně voleny tak, aby u nich byla nezbytná diskuse podmínek či provedení zkoušky.

Zpravidla se nejedná o základní úlohy. Většina úloh propojuje více témat středoškolské matematiky. Sada těchto úloh opět může posloužit pro hlubší procvičení probírané látky či pro maturitní opakování.

U úloh týkajících se členů binomického rozvoje výrazu  $(a + b)^n$  je za  $(k + 1)$ -ní člen rozvoje považován výraz  $A_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ , kde  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Pozornost je věnována i několika úlohám, jež vedou k užití jednoduchých důsledků vlastností kombinačních čísel (viz úloha č. 4) či binomické věty (viz úloha č. 5), které mohou být při povrchním přístupu přehlédnuty, ačkoliv je lze výhodně použít při řešení úloh z teorie čísel (viz úlohy č. 8-10).

V části věnované řešení úloh jsou v několika případech uvedeny návody k alternativním postupům řešení příslušných úloh, či jiné postřehy, které by mohlo být užitečné se studenty diskutovat.

1. V největším číselném oboru, ve kterém je definována, vyřešte rovnici

$$\log(x + 6)! - \log(x + 5)! = 2 \log x .$$



2. V největším číselném oboru, ve kterém je definována, vyřešte rovnici

$$\binom{2}{1} \binom{x+2}{x} - \binom{x-1}{x-2} = 3 \binom{4}{2} + \binom{6}{3}.$$

3. Dokažte, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} = 1.$$

4. Dokažte, že jakékoliv kombinační číslo (tj. číslo definované vztahem  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , kde  $n$  a  $k$  jsou nezáporná celá čísla taková, že  $n \geq k$ ) je vždy číslem přirozeným.

5. K libovolné trojici čísel  $a, b \in \mathbb{Z}$  a  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $k \in \mathbb{Z}$  takové, že platí

$$(a+b)^n = ka + b^n.$$

Dokažte.

6. Určete počet všech racionálních sčítanců v rozvoji výrazu

$$\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{6}\right)^{60}.$$

7. Určete nejmenší  $n$  s následující vlastností. Z libovolných  $n$  přirozených čísel lze vybrat alespoň dvě taková, že jejich faktoriál končí stejnou cifrou. Lze zjistit i o jakou číslici se jedná? Dále vypočtete, kolika stejnými číslicemi končí číslo 132!.

8. S využitím binomické věty dokažte, že pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  platí, že výraz

$$V(n) = 7^{2n} - 1$$

je dělitelný číslem 48.

9. S využitím binomické věty vypočtete zbytek po dělení čísla  $50^{2010}$  číslem 17.

10. S využitím binomické věty dokažte, že číslo  $13^{30} - 8^{18}$  je dělitelné patnácti.

11. V binomickém rozvoji výrazu

$$\left(x \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$$

( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ) je součet prvních tří koeficientů roven 56. Určete z této podmínky absolutní člen rozvoje (tj. člen neobsahující  $x$ ). Svě tvrzení podložte výpočtem, výsledek vyčíste. O kolikátý člen rozvoje se jedná?

12. Vypočtete

$$\binom{13}{4} + \binom{12}{4} + \dots + \binom{4}{4}.$$

Výsledek případně můžete nechat ve tvaru vhodného kombinačního čísla.

13. Uvažujme množinu  $M$ , která má právě  $n$  prvků ( $n \in \mathbb{N}$ ). Porovnejte počet všech neprázdných podmnožin množiny  $M$ , které mají sudý počet prvků s počtem všech podmnožin množiny  $M$ , které mají lichý počet prvků.

**Řešení, návody a výsledky:**

1. Za podmínky  $x \in \mathbb{N}$  platí

$$\log(x+6)! - \log(x+5)! = 2 \log x \Leftrightarrow \log \frac{(x+6)!}{(x+5)!} = \log x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

Uvedené rovnici vyhoví kořeny  $x_1 = -2$  a  $x_2 = 3$ , ale jen  $x_2$  vyhoví podmínce;  $K = \{3\}$ .

2. Za podmínky  $x \in \mathbb{N}_0$ ,  $x \geq 2$  platí

$$\binom{2}{1} \binom{x+2}{x} - \binom{x-1}{x-2} = 3 \binom{4}{2} + \binom{6}{3} \Leftrightarrow (x+2)(x+1) - (x-1) = 3 \cdot 6 + 20 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 35 = 0.$$

Uvedené rovnici vyhoví kořeny  $x_1 = -7$  a  $x_2 = 5$ , ale jen  $x_2$  vyhoví podmínce;  $K = \{5\}$ .

3. Plyne z binomické věty pro  $a = 2$  a  $b = -1$ .

4. • Tvrzení plyne bezprostředně z kombinatorického významu kombinačního čísla, které udává počet všech  $k$ -prvkových podmnožin  $n$ -prvkové množiny. Tento počet musí být přirozeným číslem.
- Poznamenejme, že zdůvodnění je možné vést i pomocí Pascalova trojúhelníku, chápeme-li jej jako schéma, které obsahuje všechna kombinační čísla. Nedílnou součástí tohoto postupu pak je zdůvodnění, že pro libovolná nezáporná celá čísla  $n$  a  $k$  taková, že  $n \geq k + 1$ , platí vztahy  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 0$  a  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .
- Vhodné je studenty upozornit na přímý důsledek dokázaného tvrzení. Protože pro uvažovaná čísla  $n$  a  $k$  platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

znamená skutečnost, že každé kombinační číslo je číslem přirozeným také to, že součin libovolných  $k$  po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný číslem  $k!$ .

5. Podle binomické věty platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Po vytknutí čísla  $a$  ze všech sčítanců kromě posledního odtud dostáváme

$$(a+b)^n = a \left[ \binom{n}{0}a^{n-1} + \binom{n}{1}a^{n-2}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k-1}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}b^{n-1} \right] + b^n.$$

V předchozí úloze jsme vysvětlili, že každé kombinační číslo je číslem přirozeným, proto je vzhledem k zadaným podmínkám celá hranatá závorka rovna jistému celému číslu. Označíme-li jej  $k$ , obdržíme dokazovaný tvar rovnosti.

6. Pro  $(k+1)$ -ní sčítanec podle binomické věty platí

$$A_{k+1} = \binom{60}{k} \cdot 3^{\frac{60-k}{3}} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{k}{4}} = \binom{60}{k} \cdot 3^{20 - \frac{k}{12}} \cdot 2^{\frac{k}{4}}.$$

To znamená, že k tomu, aby byl  $(k+1)$ -ní sčítanec racionální, je nutné a stačí, aby nezáporné celé číslo  $k \leq 60$  bylo dělitelné dvanácti. Tuto vlastnost má právě každé  $k$  z šestiprvkové množiny  $\{0, 12, 24, 36, 48, 60\}$ . Racionálních sčítanců je v zadaném rozvoji 6.

7. Víme, že  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ . Dále zřejmě platí, že číslo  $n!$  je pro  $n > 4$  dělitelné desítkou a tudíž končí nulou. Mají-li faktoriály dvou přirozených čísel končit stejnou cifrou, musí to tedy být nula. Z libovolné šestice přirozených čísel takovou dvojici vždy vybereme, z pěti přirozených čísel (např. z množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ) to jít nemusí, tedy  $n = 6$ . Zbývá zjistit kolika nulami končí číslo  $132!$ . Bude to tolik nul, jaká je mocnina čísla 5 (označme ji  $m$ ) v rozkladu čísla  $132!$  na součin prvočísel (mocnina čísla 2 v tomto rozkladu je zřejmě vyšší). Množina násobků pěti menších než 133, tj. množina  $\{5, 10, 15, \dots, 130\}$  obsahuje  $\frac{130-5}{5} + 1 = 26$  čísel, přičemž pět z nich je násobkem čísla  $5^2$  (čísla 25, 50, 75, 100 a 125), poslední z nich je dokonce násobkem čísla  $5^3$ . Proto  $m = 26 + 5 + 1 = 32$ . Číslo  $132!$  tedy končí 32 nulami.

8. Platí

$$V(n) = 7^{2n} - 1 = 49^n - 1 = (48 + 1)^n - 1.$$

Podle důsledku binomické věty z úlohy č. 5 dále platí, že každý sčítanec kromě posledního v rozvoji  $(48 + 1)^n$  je násobkem čísla 48, poslední sčítanec je roven jedné, tj.  $(48 + 1)^n = 48k + 1$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ . Proto  $V(n) = 48k$ , čímž je tvrzení dokázáno.

9. Platí

$$50^{2010} = (51 - 1)^{2010} = 51k + (-1)^{2010} = 51k + 1 = 17 \cdot 3k + 1,$$

kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Číslo  $50^{2010}$  tedy po dělení sedmnácti dává zbytek 1.

10. Dokažme postupně dělitelnost čísla  $13^{30} - 8^{18}$  třemi a pěti.

$$\begin{aligned} 13^{30} - 8^{18} &= (12 + 1)^{30} - (9 - 1)^{18} = 12k + 1^{30} - [9l + (-1)^{18}] = 3(4k - 3l), \\ 13^{30} - 8^{18} &= 169^{15} - 64^9 = (170 - 1)^{15} - (65 - 1)^9 = 5(34m - 13n), \end{aligned}$$

kde  $k, l, m$  a  $n$  jsou celá čísla. Vzhledem k nesoudělnosti čísel 3 a 5 z uvedeného plyne dělitelnost čísla  $13^{30} - 8^{18}$  patnácti.

11. Za podmínky  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  dle zadání platí

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 56 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 56 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow (n-10)(n+11) = 0.$$

Uvedené rovnici vyhoví kořeny  $n_1 = 10$  a  $n_2 = -11$ , ale jen  $n_1$  vyhoví podmínce. Pro hledaný  $(k+1)$ -ní člen rozvoje uvažovaného výrazu (pro  $n = 10$ ) tedy dostáváme podmínku ( $c$  značí dosud neznámou konstantu, kterou určíme dalším výpočtem)

$$A_{k+1} = \binom{10}{k} \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{10-k} (x^{-2})^k = c \cdot x^0 \Rightarrow x^{\frac{4(10-k)}{3} - 2k} = x^0 \Leftrightarrow 40 - 10k = 0 \Leftrightarrow k = 4.$$

Jedná se tedy o pátý člen rozvoje. Snadno již dopočteme, že

$$A_5 = c = \binom{10}{4} \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^6 (x^{-2})^4 = \binom{10}{4} = 210.$$

12. Naznačíme více způsobů řešení.

- Možné je všech deset kombinačních čísel vyčíslit a sečíst, není to však výhodné. Tento případný výpočet je ponechán na čtenáři, výsledek je 2002.
- Uvažujme množinu, jejíž prvky tvoří čísla  $1, 2, \dots, 14$ . Víme, že existuje právě  $\binom{14}{5}$  pětiprvkových podmnožin této množiny. Určeme tento počet jiným způsobem - pomocí kombinatorického pravidla součtu. Uvažujme, kolik existuje pětiprvkových podmnožin uvažované množiny s konkrétním největším prvkem. Je-li jím číslo 14, pak do tvořené podmnožiny stačí doplnit libovolná 4 ze zbývajících třinácti čísel, to lze provést  $\binom{13}{4}$  způsoby. Pokud jím je číslo 13, je takových podmnožin  $\binom{12}{4}$  (číslo 14 v ní být nesmí), atd. Poslední v této posloupnosti je pak množina  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , jejímž největším prvkem je číslo 5. Zbývajících prvků jsou již určeny jednoznačně, vybíráme je totiž  $\binom{4}{4}$  způsoby. Touto kombinatorickou úvahou jsme zdůvodnili, že uvažovaný součet je roven  $\binom{14}{5}$ .
- Jedním z nejznámějších součtů kombinačních čísel, je vlastnost na základě jejíž platnosti je sestaven Pascalův trojúhelník. Není těžké dokázat, že  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ , kde  $n$  a  $k$  jsou nezáporná celá čísla taková, že  $n \geq k+1$ . Mohlo by nás proto napadnout užít tuto vlastnost i pro zadaný výpočet. Je k tomu třeba pouze náhrady sčítance  $\binom{4}{4}$  číslem  $\binom{5}{5}$ , které je mu však rovno. Postupnými výpočty

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \binom{6}{5}, \quad \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}, \quad \dots, \quad \binom{13}{4} + \binom{13}{5} = \binom{14}{5},$$

se dobereme stejného závěru jako při předchozích výpočtech jinými metodami.

13. První výraz je tvaru  $\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{k}$ , kde  $k = n - 1$  v případě, že  $n$  je liché, resp.  $k = n$ , je-li  $n$  sudé. Druhý z porovnávaných výrazů je pak tvaru  $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{l}$ , kde  $l = n$  v případě, že  $n$  je liché, resp.  $l = n - 1$ , je-li  $n$  sudé.

- Řešení využívající binomické věty. Všimneme-li si, že v porovnávaných výrazech vystupuje právě jednou každé z kombinačních čísel  $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ , mohlo by nás napadnout užít binomický rozvoj

$$0 = (1 - 1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Odtud vidíme, že kdybychom k prvnímu sčítanci přidali číslo  $\binom{n}{0}$  (tj. prázdnou množinu), pak by se oba výrazy rovnaly. Tedy počet všech podmnožin množiny  $M$  s lichým počtem prvků je o 1 větší než počet všech neprázdných podmnožin množiny  $M$  se sudým počtem prvků.

- Řešení kombinatorickou úvahou. Vyberme v množině  $M$  pevně libovolný prvek a označme ho  $p$ . S každou podmnožinou množiny  $M$  nyní provedeme tuto operaci. Obsahuje-li daná podmnožina prvek  $p$ , přiřadíme k ní podmnožinu, která z ní vznikne vypuštěním prvku  $p$ . Opačně pokud prvek  $p$  v dané podmnožině neleží, přiřadíme k ní podmnožinu, která z ní vznikne přidáním prvku  $p$ . Popsané zobrazení je bijektivní, přičemž libovolné neprázdné podmnožině množiny  $M$  se sudým počtem prvků je přiřazena podmnožina množiny  $M$  s lichým počtem prvků, prázdné množině je přiřazena množina  $\{p\}$  a opačně. Proto je počet všech podmnožin množiny  $M$  s lichým počtem prvků o 1 větší než počet všech neprázdných podmnožin množiny  $M$  se sudým počtem prvků.

## Úlohy s omezujícími podmínkami

*Metodické poznámky.* Tyto úlohy navazují na úvodní sadu úloh, kterou doplňují o mírně složitější a komplexnější úlohy. Jejich řešení se často neomezuje pouze na základní užití elementárních kombinatorických pravidel, ale vyžaduje hlubší úvahu. Řešitel zde též ve větší míře uplatní poznatky z jiných oblastí matematiky. Užití těchto úloh je vhodné na závěr celku věnovaného kombinatorice - pro shrnutí, případně opakování. Některé úlohy jsou vhodné spíše pro talenty a zájemce o matematiku.

1. V kolika bodech se protínají úhlopříčky konvexního  $n$ -úhelníku ( $n \geq 4$ ), jestliže žádné tři z nich nemají společný bod?
2. Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, která jsou sestavena z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, jestliže každá cifra smí být použita nejvýše jednou.
3. Zjistěte, kolik různých čtyřciferných čísel dělitelných číslem 36 lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4 tak, aby se v nich žádná číslice neopakovala. Všechna tato čísla vypište.
4. Kolika způsoby lze z množiny všech nejvýše dvojciferných přirozených čísel vybrat dvě (různá) čísla (bez ohledu na pořadí) tak, aby jejich součet byl dělitelný třemi?
5. Nechť je dána množina

$$M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Určete, kolika způsoby lze z množiny  $M$  vybrat osm různých čísel (tzn. žádné z vybraných čísel se nesmí opakovat), které mají tu vlastnost, že jejich součet je dělitelný třemi. Svě úvahy a svá tvrzení zdůvodněte.

6. Kolika způsoby lze rozdělit 6 hochů a 4 dívky do dvou pětičlenných družstev tak, aby v každém družstvu byla aspoň jedna dívka. Na pořadí družstev nezáleží. Výsledek vyčíslete.
7. V kolika anagramech, které jsou utvořeny z písmen slova MATURITA, se nevyskytují žádná dvě stejná písmena bezprostředně vedle sebe (tzn. žádný vyhovující anagram neobsahuje „podslovo“ typu AA, TT)?

8. Kolika způsoby lze rozdělit 22 nerozlišitelných mincí do 3 různých obálek? V kolika případech v žádné obálce nebude více než 11 mincí? Výsledky vyčíslete.
9. Na zámku prodávají 5 druhů pohlednic. Návštěvník si chce koupit 8 pohledů. Kolika způsoby to může udělat, chce-li mít od každého druhu alespoň jeden kus. V nabídce jsou přitom pouze poslední 3 pohledy prvního druhu, pohledů každého z ostatních druhů je více. Výsledek vyčíslete.
10. Kolika způsoby je možné uspořádat 15 různých knih do 4 polic v knihovně, jestliže do každé police by případně bylo možné umístit všechny tyto knihy současně. Na pořadí knih v jednotlivých policích záleží. Výsledek stačí vyjádřit pomocí výrazů sestavených z mocnin, kombinačních čísel či faktoriálů.
11. Kolik řešení má
- v  $\mathbb{N}_0^3$  rovnice
 
$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$
  - v  $\mathbb{N}^3$  rovnice
 
$$x_1 + x_2 + x_3 = 20,$$
  - v  $\mathbb{N}_0^3$  nerovnice
 
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20,$$
  - v  $\mathbb{N}^3$  nerovnice
 
$$x_1 + x_2 + x_3 < 20?$$
12. Kolik rovin určuje 12 různých přímek, z nichž 5 leží v jedné rovině a žádné 3 další již v jedné rovině neleží, přitom však žádné dvě z těchto dvanácti přímek nejsou mimoběžné? Výsledek vyčíslete. Co lze tvrdit o vzájemné poloze zadaných přímek?
13. Určete počet všech trojúhelníků, které mají vrcholy ve vrcholech pravidelného dvanáctiúhelníku a jejichž strany jsou úhlopříčkami tohoto dvanáctiúhelníku. Dva trojúhelníky považujeme za různé, pokud alespoň jeden vrchol nemají společný, tzn. např. dva shodné trojúhelníky chápeme jako různé, pokud alespoň jeden vrchol nemají společný.
14. Určete, kolika způsoby lze na šachovnici rozmístit 8 po dvou rozlišitelných věží tak, aby se alespoň dvě z nich vzájemně ohrožovaly.
15. Na každé hraně krychle je dáno  $n$  ( $n \geq 3$ ) různých vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy ve zmíněných bodech. Kolik z nich leží na povrchu krychle? Výsledky upravte do nejjednoduššího možného tvaru.
16. Přirozené číslo  $x$  budeme nazývat *zajímavým*, jestliže existují dvě (ne nutně různá) dvojciferná přirozená čísla  $m$  a  $n$ , která se liší pořadím číslic, tak, že platí  $x = m + n$ . Například 176 je tedy zajímavé číslo, neboť  $176 = 97 + 79$ .
- Určete největší a nejmenší zajímavé číslo.
  - Zjistěte počet všech zajímavých čísel.
  - Snadno nahlédneme, že čísla  $m$  a  $n$ , která vystupují v definičním vyjádření čísla  $x$ , nemusí existovat jednoznačně. Například  $176 = 97 + 79 = 88 + 88$ . Určete to zajímavé číslo, které je možné v definičním tvaru vyjádřit největším možným počtem způsobů (na pořadí sčítanců nebereme ohled, tj. například oba součty  $97 + 79$  a  $79 + 97$  považujeme za jedno definiční vyjádření zajímavého čísla 176, ale součet  $88 + 88$  chápeme jako jiný způsob vyjádření zajímavého čísla 176).

17. Čtvercovou tabulku o  $n \times n$  polích nazýváme *magickým čtvercem*  $n$ -tého řádu, pokud je vyplněná ve všech polích čísly tak, aby se součty příslušných čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci a na libovolné úhlopříčce vzájemně rovnaly. Například tabulka

21	34	17	40
31	12	3	66
10	19	78	5
50	47	14	1

je magickým čtvercem 4. řádu.

- a) Má-li být magický čtverec 3. řádu vyplněn čísly  $x, x+1, \dots, x+8$ , (každá z těchto hodnot má být použita právě jednou) rozhodněte, zda hodnota součtu čísel v libovolném řádku, libovolném sloupci a na libovolné úhlopříčce závisí pouze na hodnotě  $x$ . Pokud ano, určete tuto hodnotu, pokud ne, uveďte kolik možných součtů připadá v úvahu. Svá tvrzení podložte výpočtem, případně jinak zdůvodněte.
- b) Sestavte konkrétní příklad magického čtverce 3. řádu, který je tvořen čísly  $1, 2, \dots, 9$  (každá z těchto hodnot má být použita právě jednou). Dále zdůvodněte, kolik lze najít různých magických čtverců, které vyhovují těmto podmínkám. Čtverce, které se liší pouze otočením či překlopením (tj. libovolné číslo má v každém z nich vždy stejné „sousedy“), považujeme za stejné. Případně vysvětlete, proč požadovaný magický čtverec nelze sestavit. Svá tvrzení zdůvodněte.

### Řešení, návody a výsledky:

1. Stačí si uvědomit, že každý průsečík je jednoznačně určen výběrem libovolných čtyř vrcholů  $n$ -úhelníku. Libovolná úhlopříčka je totiž úsečka, která je jednoznačně určena svými krajními body. Příslušná čtveřice bodů navíc vždy určuje jedinou dvojici protínajících se úhlopříček. Hledaných průsečíků je tedy  $\binom{n}{4}$ .
2. Víme, že celé číslo je dělitelné devíti právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný devíti. Nejmenší možný součet čtyř zadaných cifer je  $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ , největší naopak  $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ . Je tedy jasné, že vyhoví ta čísla, jejichž ciferný součet je 9 nebo 18. Má-li být ciferný součet roven osmnácti, pak musí být dané číslo sestaveno výhradně z číslic 3, 4, 5, 6. Takových čísel lze sestavit  $4! = 24$ , neboť každá cifra (dle zadání) musí být použita právě jednou. Zkoumejme nyní, z jakých cifer může být číslo sestaveno, má-li jeho ciferný součet být 9. Hledejme tedy všechny rozklady čísla 9 na součet čtyř různých sčítanců z množiny  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Pro přehlednost budeme sčítance zapisovat vzestupně podle velikosti. Zjišťujeme, že vyhovující rozklady existují právě tři

$$9 = 0 + 1 + 2 + 6 = 0 + 1 + 3 + 5 = 0 + 2 + 3 + 4.$$

Snadno rozmyslíme, že z každé z uvedených tří čtveřic číslic lze sestavit  $3 \cdot 3! = 18$  čísel splňujících zadané podmínky (protože 0 nemůže být na prvním místě). Dohromady tedy existuje právě  $24 + 3 \cdot 18 = 78$  hledaných čísel.

3. Přirozené číslo  $n$  je dělitelné číslem 36 právě tehdy, když je dělitelné devíti a čtyřmi. Nejprve posuďme dělitelnost devíti. Devíti je číslo  $n$  dělitelné tehdy a jen tehdy, když je devíti dělitelný jeho ciferný součet. Protože součet všech zadaných cifer je 10, plyne z této podmínky, že hledané číslo bude tvořeno ciframi 0, 2, 3, 4, z nichž bude použita každá právě jednou.

Nyní se zabývejme dělitelností čtyřmi. Rozděleme hledaná čísla do skupin podle toho, kterou cifrou končí. Tyto skupiny jsou tři, neboť každé číslo vyhovující zadání musí být zřejmě sudé. Cifru na místě desítek určíme na základě skutečnosti, že k tomu, aby bylo číslo  $n$  dělitelné čtyřmi, je nutné a stačí, aby bylo dělitelné čtyřmi jeho poslední dvojčíslí.

Tímto způsobem již snadno najdeme všechna čísla vyhovující zadání. Čísla končící nulou jsou čtyři: 4 320, 3 420, 3 240 a 2 340; čísla končící čtverkou najdeme tři: 2 304, 3 204, 3 024; konečně posledním řešením je číslo 4 032.

Hledaných čísel je právě 8.

4. Množinu  $M = \{1, 2, \dots, 99\}$  uvažovaných čísel rozložíme na tři třicetitří prvkové po dvou disjunktní podmnožiny podle toho, jaký její prvky dávají zbytek po dělení třemi:

$$\begin{aligned} M_0 &= \{3, 6, \dots, 99\}, \\ M_1 &= \{1, 4, \dots, 97\}, \\ M_2 &= \{2, 5, \dots, 98\}. \end{aligned}$$

Aby součet dvou čísel z  $M$  byl dělitelný třemi, je nutné a stačí, aby obě vybraná čísla byla z  $M_0$  (to lze udělat  $\binom{33}{2} = 528$  způsoby) nebo jedno bylo z  $M_1$  a druhé z  $M_2$  (to lze udělat  $33 \cdot 33 = 1089$  způsoby). Výsledek  $528 + 1089 = 1617$ .

5. Při řešení úlohy využijeme skutečnosti, že libovolné přirozené číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je třemi dělitelný jeho ciferný součet. Snadno nahlédneme, že součet všech deseti čísel, která tvoří množinu  $M$ , je 45, což je číslo dělitelné třemi. To znamená, že když z množiny  $M$  vybereme osm různých čísel, jejichž součet je dělitelný třemi, musí být třemi dělitelný i součet dvou nevybraných čísel z této množiny. Proto je hledaný počet způsobů stejný jako počet způsobů, jimiž lze z množiny  $M$  vybrat dvě různá čísla, jejichž součet je dělitelný třemi.

Rozložíme množinu  $M$  na tři podmnožiny podle toho, jaký zbytek po dělení třemi jednotlivá čísla dávají (hodnotu zbytku značí index příslušné podmnožiny)

$$\begin{aligned} M_0 &= \{0; 3; 6; 9\}, \\ M_1 &= \{1; 4; 7\}, \\ M_2 &= \{2; 5; 8\}. \end{aligned}$$

Chceme-li vybrat z množiny  $M$  dvě různá čísla, jejichž součet je dělitelný třemi, vidíme, že buď musí být obě z množiny  $M_0$  (ty lze vybrat  $\binom{4}{2} = 6$  způsoby) nebo jedno z množiny  $M_1$  a druhé z množiny  $M_2$  (ty lze vybrat  $3 \cdot 3 = 9$  způsoby). Požadovaných osm čísel tedy lze vybrat  $6 + 9 = 15$  způsoby.

6. Nejprve si uvědomme, že výběrem pětice osob nám z „nevybraných“ osob zůstává druhé pětičlenné družstvo, tzn. že výběrem jedné pětice, dostáváme hned dvě různá pětičlenná družstva. Popíšeme dva způsoby řešení.

- Všechna rozdělení je (vzhledem k předchozímu vysvětlení)  $\frac{1}{2} \cdot \binom{10}{5} = 126$ . Od tohoto počtu zbývá odečíst rozdělení špatná, tzn. je-li jedno družstvo složeno ze všech čtyř dívek a jednoho chlapce (toho lze k dívkám vybrat šesti způsoby). Vyhovujících rozdělení tedy je  $126 - 6 = 120$ .
- Správná rozdělení jsou ta, jsou-li v každém družstvu právě dvě dívky (těchto rozdělení je  $\frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} = 60$ ), nebo ta je-li v jednom družstvu jediná dívka a ve druhém družstvu 3 dívky (takových rozdělení je  $\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{4} = 60$ ). Zdůrazněme, že při prvním výpočtu jsme dělili dvěma, protože při výběru družstva složeného ze dvou dívek a tří chlapců zůstává mezi nevybranými družstvo „stejněho typu“. Každá pětice je tedy počítána dvakrát - jednou mezi „vybranými“, podruhé mezi „nevybranými“. Naproti tomu při druhém výpočtu vybíráme družstvo s jednou dívkou a mezi nevybranými je tedy vytvořen tým se třemi dívkami, což je družstvo „jiného typu“. Nemůže tedy být dané družstvo počítáno opakovaně, proto jsme dělení dvěma neprováděli. Celkově je tedy správný počet roven  $60 + 60 = 120$ .

7. Počet všech anagramů utvořených z písmen slova MATURITA je

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!},$$

protože výměnou pozic stejných písmen dostaneme stejné „slovo“. Lze uvažovat i tak, že z osmi obsazených pozic vybereme 2 ( $\binom{8}{2}$  způsoby) pro písmena A, zbyde 6 pozic, dvě vybereme ( $\binom{6}{2}$  způsoby) a napíšeme na každou z nich T. Zbývající 4 pozice obsadíme čtyřmi různými písmeny, a to  $4!$  způsoby. Skutečně

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 4! = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 4! = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080.$$

Od tohoto počtu musíme odečíst počet  $p$  těch anagramů, které obsahují alespoň jedno podslovo typu AA či TT. Platí, že  $p = a + b - c$ , kde  $a$  je počet anagramů obsahujících podslovo AA,  $b$  je počet anagramů obsahujících podslovo TT a  $c$  je počet anagramů obsahujících současně podslova AA i TT. Uvážíme-li AA jako jedno písmeno, zjistíme, že  $a = \frac{7!}{2!} = 2520$ . Zřejmě  $a = b$ . Dále  $c = 6! = 720$ , tedy  $p = 4320$ . Anagramů, které neobsahují dvě stejná písmena bezprostředně vedle sebe, je  $10080 - 4320 = 5760$ .

8. Rozdělujeme tedy 22 stejných předmětů (označme každý z nich symbolem  $-$ ) do 3 očíslovaných (tedy rozlišitelných) přihrádek, k jejichž oddělení použijeme 2 přepážky (objekty, k jejichž označení použijeme symbol  $|$ ). Provedeme tedy podobné šifrování jako v úloze o tenisových míčích z úvodní sady. Vzhledem k tomu, že každé šifře sestavené z  $22 - a \ 2 \ |$  odpovídá jediné rozdělení mincí do příslušných obálek a opačně, je počet hledaných rozdělení stejný jako počet těchto šifer. Těch je  $\binom{22+2}{2} = 276$ . Odečteme-li od tohoto čísla počet všech rozdělení, kdy v právě jedné obálce bude alespoň 12 mincí (ve více obálkách současně to vzhledem k celkovému počtu mincí není možné), získáme řešení druhé části úlohy. Třemi způsoby vybereme obálku, do níž nasypeme 12 mincí a zbylých 10 mincí rozdělíme bez omezení stejným způsobem jako v úvodu výpočtu. V žádné obálce tedy nebude více než 11 mincí ve

$$276 - 3 \cdot \binom{10+2}{2} = 276 - 3 \cdot 66 = 78$$

případech.

9. Budeme-li chápat druhy pohledů jako očíslované přihrádky, do kterých máme rozdělovat 8 stejných předmětů, snadno si uvědomíme, že úvaha vedoucí k řešení bude velmi podobná té z předchozí úlohy. Dle zadání je do každé přihrádky třeba umístit jeden předmět a zbylé 3 dorozdělit. Pokud by měli dostatečné množství pohledů, mohl by návštěvník svůj nákup provést  $\binom{3+4}{4} = 35$  způsoby. Pro nedostatek pohledů prvního druhu však nemůže provést jediný z těchto nákupů (nákup, kdy by chtěl koupit 4 pohledy prvního druhu a po jednom pohledu ostatních druhů). Nákup tedy může provést 34 způsoby.
10. Nejprve určíme počet všech rozložení ve smyslu počtu knih v jednotlivých policích. Tento počet je roven počtu rozdělení 15 (stejných) objektů do 4 (rozlišitelných) přihrádek, tedy  $\binom{15+3}{3}$ . Neboť pro každé z těchto rozdělení je možné na příslušné pozice různé knihy uspořádat  $15!$  způsoby, je hledaný počet roven

$$\binom{18}{3} \cdot 15! = \frac{18!}{3!}.$$

11. a) Uvědomme si, že hledaný počet řešení je stejný jako počet způsobů, jak lze rozdělit 20 stejných předmětů (označme každý z nich symbolem  $-$ ) do 3 přihrádek. K tomu uvážíme 2 přepážky (objekty  $|$ ). Vlastně se tedy ptáme, kolik různých kódů sestavených z dvaceti symbolů  $-$  a dvou symbolů  $|$  lze sestavit. Protože jich je  $\binom{22}{2} = 231$ , má v  $\mathbb{N}_0^3$  uvažovaná rovnice 231 řešení.
- b) Hledáme-li řešení zadané rovnice v  $\mathbb{N}^3$ , nemůže žádná z neznámých být nulová, tzn. libovolná ze tří přihrádek musí obsahovat alespoň jeden objekt. Vložme tedy po jednom objektu do každé z nich a zbylých 17 objektů rozdělme analogickým způsobem jako v části a). Zjišťujeme, že v  $\mathbb{N}^3$  má studovaná rovnice  $\binom{19}{2} = 171$  řešení.
- c) Od nerovnice  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$  můžeme přejít k rovnici  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ , kde  $x_4 = 20 - (x_1 + x_2 + x_3) \geq 0$ . Je přitom zřejmé, že počet řešení nerovnice  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$  v  $\mathbb{N}_0^3$  je stejný jako počet řešení rovnice  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$  v  $\mathbb{N}_0^4$ . Způsobem popsáním v části a) odvodíme, že hledaný počet řešení je  $\binom{23}{3} = 1771$ .
- d) Podobně jako v předchozím si uvědomme, že počet řešení nerovnice  $x_1 + x_2 + x_3 < 20$  v  $\mathbb{N}^3$  je stejný jako počet řešení v  $\mathbb{N}^4$  rovnice  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ , kde  $x_4 = 20 - (x_1 + x_2 + x_3) > 0$ . Uvažovaná nerovnice má tedy v  $\mathbb{N}^3$   $\binom{19}{3} = 969$  řešení.
12. Zmíněných 5 přímek tedy určuje jedinou rovinu, označme ji  $\rho$ . Vybereme-li tedy libovolnou jinou dvojici přímek než z těchto pěti přímek, budou dle zadání tyto přímky jednoznačně určovat rovinu, kterou není možné určit pomocí zadaných přímek jiným způsobem. Lze tedy vybrat buď dvě ze sedmi dalších přímek  $\binom{7}{2} = 21$  způsoby, nebo jednu z nich a druhou z roviny  $\rho$   $7 \cdot 5 = 35$  způsoby. Pomocí zadaných



přímek je tedy určeno  $1 + 21 + 35 = 57$  rovin.

Jinou úvahou je možné říci, že výběr libovolné dvojice přímek určuje jistou rovinu, ovšem v  $\binom{5}{2} = 10$  případech rovinu stejnou. Tedy hledaných rovin je  $\binom{12}{2} - 10 + 1 = 57$ .

Dokažme, že všech těchto dvanáct přímek je vzájemně rovnoběžných nebo všechny zadané přímky musí procházet jediným bodem. Předpokládejme sporem, že tomu tak není. To znamená, že musí existovat dvě přímky, označme je  $p$  a  $q$ , které jsou různoběžné; jejich průsečík označme  $X$ . Různoběžky  $p$  a  $q$  tedy jednoznačně určují rovinu, ve které obě leží, označme ji  $\sigma$ . Současně musí existovat ještě další přímka, označme ji  $r$ , která neprochází bodem  $X$ . Mohou nastat následující dva případy.

- a) Přímka  $r$  je rovnoběžná s jednou z přímek  $p$  nebo  $q$ , bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $r \parallel p$ . Přímka  $r$  tedy musí ležet v rovině  $\sigma$  (v opačném případě by byla mimoběžná s přímkou  $q$ , což nelze). To tedy znamená, že v rovině  $\sigma$  leží tři různé přímky, je tedy totožná s rovinou  $\rho$ .
- b) Pokud přímka  $r$  není rovnoběžná s žádnou z přímek  $p$  a  $q$ , pak musí být různoběžná s každou z nich. Na přímce  $r$  tedy existují dva různé body ležící v rovině  $\sigma$  (její průsečíky s přímkami  $p$  a  $q$ ). To ale znovu znamená, že přímka  $r$  leží v rovině  $\sigma$ , která je opět totožná s rovinou  $\rho$ .

V každém z rozebraných případů v rovině  $\rho$  nejsou všechny přímky rovnoběžné, ani všechny neprocházejí jedním společným bodem. Proto musí být libovolná přímka  $s \not\subset \rho$  mimoběžná s alespoň jednou z přímek ležících v rovině  $\rho$ , což je spor. Tímto je tvrzení dokázáno.

13. Hledaný počet je roven  $p_1 - p_2 - p_3$ , kde  $p_1$  značí počet všech trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech pravidelného dvanáctiúhelníku,  $p_2$  značí počet všech trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech pravidelného dvanáctiúhelníku, které mají právě jednu stranu společnou s některou stranou pravidelného dvanáctiúhelníku a  $p_3$  značí počet všech trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech pravidelného dvanáctiúhelníku, které mají právě dvě strany společné s některými stranami pravidelného dvanáctiúhelníku. Platí  $p_1 = \binom{12}{3} = 220$  (stačí bez ohledu na pořadí vybrat libovolné tři ze dvanácti vrcholů zadaného mnohoúhelníku),  $p_2 = 12 \cdot 8 = 96$  (dvanácti způsoby vybereme příslušnou stranu dvanáctiúhelníku a nezávisle na jejím výběru pak máme osm možností, jak vybrat poslední vrchol trojúhelníku - nesmí to být krajní body vybrané úsečky, ani s ní bezprostředně sousedící vrcholy),  $p_3 = 12$  (každý takový trojúhelník je rovnoramenný a je jednoznačně určen volbou hlavního vrcholu). Hledaných trojúhelníků je 112.
14. Hledaný počet je roven  $v - s$ , kde  $v$  značí počet všech možných rozmístění 8 věží a  $s$  počet všech špatných rozmístění (tzn. kdy se žádné dvě věže neohrožují). Číslo  $v$  vypočteme, vybereme-li libovolných 8 polí z celkových 64 a vynásobíme-li tento počet číslem  $8!$ , které udává počet možných rozmístění různých věží na daných 8 polí. Tedy

$$v = \binom{64}{8} \cdot 8! = \frac{64!}{56!} = 64 \cdot 63 \cdot \dots \cdot 57.$$

Jinak zdůvodněno: první věž můžeme položit na libovolné pole, pro umístění druhé už je jen 63 možností, atd. Před tím než na šachovnici postavíme osmou věž, je již 7 polí obsazených, proto si můžeme vybrat kterékoliv ze zbývajících 57 polí.

Žádné dvě věže se nebudou ohrožovat tehdy a jen tehdy, bude-li v každém řádku a každém sloupci stát právě jedna věž. V prvním sloupci zvolme libovolné z osmi polí, kde může stát věž, ve druhém sloupci lze vybírat ze sedmi polí, atd. až v osmém sloupci je příslušné pole určeno jednoznačně. Vzhledem k rozlišitelnosti věží platí  $s = 8! \cdot 8!$ , takže

$$v - s = \frac{64!}{56!} - (8!)^2 = 64 \cdot 63 \cdot \dots \cdot 57 - (8!)^2 = 178\,461\,361\,935\,360 \doteq 1,8 \cdot 10^{14}.$$

15. Požadovaný trojúhelník dostaneme právě tehdy, když vybereme trojici bodů, která neleží na téže hraně. Protože krychle má 12 hran je hledaných trojúhelníků

$$\binom{12n}{3} - 12 \cdot \binom{n}{3} = \dots = 22n^2(13n - 3).$$

K uvedenému výsledku se lze dostat i následující úvahou. Každý vyhovující trojúhelník má buď dva vrcholy na jedné hraně a třetí vrchol na jiné hraně (označme  $p_1$  počet takových trojúhelníků) nebo má každý vrchol na jiné hraně (označme  $p_2$  počet těchto trojúhelníků). Pak  $p_1 = 12 \cdot \binom{n}{2} \cdot 11n$ , neboť dvanácti způsoby lze vybrat hranu, na ní  $\binom{n}{2}$  způsoby 2 body a na každé ze zbývajících hran zůstává  $n$  bodů, z nichž máme vybrat jeden - poslední vrchol trojúhelníka. Dále  $p_2 = \frac{12n \cdot 11n \cdot 10n}{3!}$ , protože první vrchol vybíráme ze všech  $12n$  zadaných bodů, pro výběr druhého máme  $11n$  možností (nesmí ležet na téže hraně s prvním vybraným bodem) a poslední vrchol trojúhelníka volíme ze zbývajících  $10n$  bodů. Součin dělíme  $3!$  vzhledem k tomu, že na pořadí výběru nezáleží. Součtem  $p_1 + p_2$  rovněž dostaneme hledaný počet.

Leží-li trojúhelník na povrchu krychle, musí ležet v některém ze šesti čtverců, které tento povrch tvoří. V každém čtverci máme zadáno  $4n$  bodů, nesmíme však vybrat takové tři, které by ležely na jeho stejné straně. Vyhoví tedy

$$6 \left[ \binom{4n}{3} - 4 \cdot \binom{n}{3} \right] = \dots = 12n^2(5n - 3)$$

trojúhelníků.

I tento výsledek lze odvodit jinou úvahou. Podobně jako v předchozí části každý vyhovující trojúhelník má buď dva vrcholy na jedné hraně a třetí vrchol na jiné hraně (označme  $\overline{p}_1$  počet takových trojúhelníků) nebo má každý vrchol na jiné hraně (označme  $\overline{p}_2$  počet těchto trojúhelníků). Pak  $\overline{p}_1 = 6 \cdot 4 \cdot \binom{n}{2} \cdot 3n$ , neboť šesti způsoby lze vybrat stěnu, v ní čtyřmi způsoby stranu čtverce, na ní  $\binom{n}{2}$  způsoby 2 body a na každé ze tří zbývajících stran zůstává  $n$  bodů, z nichž máme vybrat jeden - poslední vrchol trojúhelníka. Dále  $\overline{p}_2 = 6 \cdot 4 \cdot n^3$ , protože šesti způsoby lze opět vybrat stěnu, v ní čtyřmi způsoby zvolit stranu, na níž nebude ležet žádný vrchol trojúhelníka a zbývá z  $n$  bodů ležících na každé z ostatních stran čtverce vybrat po jednom bodu. Výrazem  $\overline{p}_1 + \overline{p}_2$  je též určit hledaný počet trojúhelníků ležících na povrchu krychle.

16. a) Nejmenší přirozené dvojciferné číslo je číslo 10, ovšem „01“ není dvojciferné číslo. Proto nejmenším zajímavým číslem je číslo 22, neboť platí  $22 = 11 + 11$ . Vzhledem k tomu, že největším dvojciferným číslem je 99, a protože  $99 + 99 = 198$ , je číslo 198 největším zajímavým číslem.
- b) Podle uvedené definice platí, že libovolné zajímavé číslo  $x$  je možné vyjádřit ve tvaru

$$x = 10a + b + 10b + a = 11(a + b), \quad (1)$$

kde  $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . Ze tvaru (1) vidíme, že libovolné zajímavé číslo je jednoznačně určeno pomocí součtu cifer  $a + b$  (změníme-li totiž hodnotu  $a + b$ , dojde tím zřejmě i ke změně čísla  $x$ ). To tedy znamená, že zajímavých čísel existuje právě tolik, kolika různých hodnot může nabývat součet  $a + b$ . Protože  $a + b$  může být rovno kterémukoliv číslu z množiny  $\{2, 3, \dots, 18\}$ , je všech zajímavých čísel právě 17.

- c) Podle části b) již víme, že dané zajímavé číslo  $x$  je jednoznačně určeno pomocí součtu cifer  $a + b$ . Označme  $c = a + b$ . Vzhledem k tomu, že na pořadí sčítanců nebereme ohled, budeme dále bez újmy na obecnosti předpokládat, že první sčítanec je větší nebo roven sčítanci druhému. K vyřešení zadané úlohy je potřebné zjistit, kdy lze číslo  $c$  za podmínky  $a \geq b$  a  $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$  vyjádřit největším možným počtem způsobů. Číslo  $c$  nejprve uvažme v takovém tvaru, kdy je rozdíl prvního a druhého sčítance největší možný. Další vyjádření čísla  $c$  získáme tak, že prvního sčítance snížíme o 1 a druhého naopak o 1 zvětšíme. Tuto úvahu lze provádět tak dlouho, dokud první sčítanec není menší než sčítanec druhý. Odtud plyne, že největší počet vyjádření téhož zajímavého čísla získáme, jestliže při prvním popsaném vyjádření bude rozdíl sčítanců největší možný, tj.  $9 + 1$ . Hledaným zajímavým číslem je tedy číslo 110, které lze vyjádřit pěti různými způsoby:

$$110 = 91 + 19 = 82 + 28 = 73 + 37 = 64 + 46 = 55 + 55.$$

Poznamenejme ještě, že popsaným způsobem lze snadno ukázat, že zajímavá čísla 88, 99, 121 a 132 je možné vyjádřit čtyřmi způsoby, čísla 66, 77, 143 a 154 třemi způsoby, čísla 44, 55, 165 a 176 dvěma způsoby a konečně, že definiční vyjádření zajímavých čísel 22, 33, 187 a 198 je ve smyslu této úlohy jednoznačné.

17. Podle zadání se součty čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci a na libovolné úhlopříčce vzájemně rovnají. Označme hodnotu tohoto součtu  $s$ .

- a) Sečteme-li všechna čísla v magickém čtverci, dostaneme tím trojnásobek hledaného součtu, tj. dostaneme rovnici

$$x + x + 1 + x + 2 + \dots + x + 8 = 3s.$$

Po její snadné úpravě vychází

$$s = 3x + 12. \quad (2)$$

Hodnota  $s$  tedy závisí pouze na  $x$  a po pevném zvolení tohoto parametru je jednoznačně určena.

- b) Pro  $x = 1$  podle (2) platí, že  $s = 15$ . Vypišme si proto všechny možné rozklady čísla 15 na součet tvořený přirozenými čísly  $x, y, z$ , která splňují podmínky  $x < y < z$  a  $x + y + z = 15$ . Snadno zjišťujeme, že vyhovuje těchto 8 součtů:

$$15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 2 + 5 + 8 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6. \quad (3)$$

Přesně 8 součtů musí vyhovovat požadavkům kladeným na magický čtverec 3. řádu (3 součty svisle, 3 součty vodorovně a dva součty na úhlopříčkách). Vidíme, že ve čtyřech součtech se vyskytuje pouze číslo 5, které proto musí být ve středu hledaného magického čtverce. Každé ze sudých čísel (a žádné jiné) se pak objevuje právě ve třech sčítancích. Čísla 2, 4, 6 a 8 tedy obsadí rohy čtverce. Konečně překontrolujeme, že libovolné ze zbylých čísel vystupuje právě ve dvou z uvedených součtů. To znamená, že rozmístěním sudých čísel do rohů čtverce je už jednoznačně určena poloha ostatních čísel. Pro umístění sudých čísel je navíc třeba dodržet zde je navíc třeba dodržet podmínku, která vyplývá z (3), že na jedné úhlopříčce musí být 2 a 8 a na druhé 4 a 6. Úloha má tedy jediné řešení

6	1	8
7	5	3
2	9	4

ostatní řešení jsou symetrická a nepovažujeme je za různá.