Aplikace geometrických posloupností

1) Racionální čísla a jejich dekadické zápisy

Čísla

1. $a = 1{,}7\overline{36}$
2. $b = 0{,}\overline{9}$

vyjádřete zlomkem v základním tvaru.

Řešení.

1.
   - *1. způsob.* Platí
   $$\left.\begin{aligned} 10a &= 17{,}\overline{36} \\ 1\,000a &= 1\,736{,}\overline{36} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 990a = 1\,719 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1\,719}{990} = \frac{191}{110}\,.$$
   - *2. způsob.* Číslo a si představíme ve tvaru součtu, ve kterém vystupuje nekonečná geometrická řada s prvním členem $a_1 = 0{,}036$ a kvocientem $q = 0{,}01$
   $$a = 1{,}7\overline{36} = 1{,}7 + 0{,}036 + 0{,}000\,36 + 0{,}000\,003\,6 + \cdots\,.$$
   Užitím vztahu pro součet nekonečné geometrické řady
   $$s = \frac{a_1}{1-q} \tag{1}$$
   dostáváme
   $$a = 1{,}7\overline{36} = \frac{17}{10} + \frac{\frac{36}{1\,000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{17}{10} + \frac{36}{990} = \frac{187}{110} + \frac{4}{110} = \frac{191}{110}\,.$$
2.
   - *1. způsob.* Platí
   $$\left.\begin{aligned} b &= 0{,}\overline{9} \\ 10b &= 9{,}\overline{9} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 9b = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 1\,.$$
   - *2. způsob.* Číslo b si představíme ve tvaru součtu nekonečné geometrické řady s prvním členem $b = 0{,}9$ a kvocientem $q = 0{,}1$
   $$b = 0{,}\overline{9} = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots\,,$$
   pro jejíž součet užitím (1) vypočteme
   $$b = 0{,}\overline{9} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1\,.$$
   Podobně platí $1{,}4\overline{9} = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $2{,}06\overline{9} = \frac{207}{100} = 2{,}07$, $\ldots$, což jsou pro studenty mnohdy překvapivé skutečnosti.

2) Úlohy z finanční matematiky

A) Penzijní připojištění

- Státní podpora (maximálně 150 Kč při měsíční úložce 500 Kč) je osvobozena od daně z příjmu.
- Nulové poplatky (uzavření smlouvy, vedení účtu, výpisy - vše zdarma).
- Garantovaná „kladná nula” - penzijní fond při špatném hospodářském výsledku nemusí za daný rok připsat klientovi žádné úroky, klient však má garantovánu částku svých vkladů + státní podpory.

- Tzv. odložená daňová povinnost - klient neplatí daň z příjmu z připsaných úroků ihned, ale až souhrnně při ukončení smlouvy (tzn. díky složenému úrokování je to pro klienta „drobná” výhoda).
- Smlouvu může uzavřít občan starší 18 let, smlouva musí trvat minimálně 5 let a nejméně do dovršení 60 let věku klienta.
- Další výhody (např. možnost snížení základu daně z příjmu fyzických osob až o 12 000 Kč ročně, příspěvky zaměstnavatele), možnosti nakládání se smlouvou (např. výběr až poloviny uspořených prostředků po dovršení 15 let spoření, přechod k jinému penzijnímu fondu), podmínky a pravidla ...

Modelový případ. Klient uzavře dne 1. dubna 2011 smlouvu o penzijním připojištění a měsíčně chce vkládat částku $v = 500$ Kč. K ní bude dostávat státní podporu $p = 150$ Kč za měsíc. Penzijní fond může připsat klientovi úrok $u\%$ p.a. Pro jednoduchost předpokládejme splnění následujících podmínek.

- Klient vždy „předspoří” své vklady na období jednoho roku dopředu, tzn. jednorázově vloží při uzavření smlouvy částku $V = 12v$. Tento postup pravidelně každoročně opakuje po celou dobu trvání smlouvy.
- Státní podpory jsou klientovi připisovány pravidelně vždy po ukončeném roce spoření, tedy jednorázově ve výši $P = 12p$.
- Úrok u je konstantní po celou dobu spoření.

Vypočtěte, jakou celkovou částku si bude moci klient vyzvednout za těchto podmínek při ukončení smlouvy o penzijním připojištění, tj. po n letech trvání jeho smlouvy ($n \geq 5$). Počítejte s daní z příjmu ve výši 15% (uvažujte odloženou daňovou povinnost).

Řešení. Označme z_i zůstatek klienta (bez zdanění) na konci i-tého roku (v okamžiku hned po připsání státních podpor ale těsně před vložením následujícího vkladu) a „úrokovací činitel” $q = 1 + \frac{u}{100}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
&z_1 = Vq + P\,,\\
&z_2 = z_1 q + Vq + P = V\left(q^2 + q\right) + P\left(q + 1\right)\,,\\
&z_3 = z_2 q + Vq + P = V\left(q^3 + q^2 + q\right) + P\left(q^2 + q + 1\right)\,,\\
&\vdots\\
&z_n = V\left(q^n + q^{n-1} + \ldots + q^2 + q\right) + P\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) = (Vq + P)\cdot\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1\right)\,.
\end{aligned}$$

Výraz $A = 1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}$ je součtem prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem q. Pro $u = 0$ je $q = 1$, takže platí $A = n$, tedy

$$z_n = n(V + P)\,,$$

což je částka, kterou klient dostane, neboť mu nebyly připsány žádné úroky, které by měl danit. Pokud $u > 0$, dostáváme

$$A = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{\left(1 + \frac{u}{100}\right)^n - 1}{\frac{u}{100}}\,.$$

Takže

$$z_n = (Vq + P)\cdot\frac{q^n - 1}{q - 1} = \left[V\left(1 + \frac{u}{100}\right) + P\right]\cdot\frac{\left(1 + \frac{u}{100}\right)^n - 1}{\frac{u}{100}}\,.$$

Částka ke zdanění (tedy výsledný úrok za celou dobu spoření) je $z_n - n(v + p)$ a klient z ní dostane pouze 85%. K výplatě je tudíž pro klienta suma

$$[z_n - n(V + P)]\cdot 0{,}85 + n(V + P) = 0{,}85\cdot\left[V\left(1 + \frac{u}{100}\right) + P\right]\cdot\frac{\left(1 + \frac{u}{100}\right)^n - 1}{\frac{u}{100}} + 0{,}15\cdot n(V + P)\,.$$

Například po dosazení číselných hodnot $n = 5$, $u = 1$ dostáváme 39 930, pro $n = 25$ (začátek spoření v 35 letech), $u = 2$ vychází 244 878. Nezajímavý není ani údaj o tom, jakou roli hraje tzv. odložená daňová povinnost. Tento výpočet již ponecháme na čtenáři.

B) Stavební spoření

Příklad. Stavební spoření u Wüstenrotu.

- Doba trvání smlouvy (tzv. vázací doba) minimálně 6 let, poplatek za její uzavření 1% z cílové částky (ta nesmí být nižší než součet celkové naspořené částky, všech přiznaných státních podpor a úroků snížený o poplatky).
- Roční poplatek za vedení účtu $p = 240$ Kč, výpisy z účtu v elektronické formě zdarma. Tyto poplatky jsou garantovány v neměnné výši po celou dobu trvání vázací doby.
- Státní podpora, která je osvobozena od daně z příjmu, činí 10% z roční úložky, maximálně však 2 000 Kč ročně.
- Úrok $u = 2{,}5\%$ p.a. je neměnný po celou dobu vázací doby.

Modelový případ. Klient uzavře dne 1. dubna 2011 smlouvu o stavebním spoření s cílovou částkou 200 000. Jakou částku naspoří, bude-li jeho smlouva za výše uvedených podmínek trvat do 31. 12. 2017. Počítejte s daní z příjmu ve výši 15%. Pro jednoduchost předpokládejme splnění následujících podmínek.

- Klient vloží svůj první vklad v okamžiku uzavření smlouvy. Z tohoto vkladu si spořitelna ihned odečte vstupní poplatek $p_0 = 2\,000$ Kč (1% z cílové částky).
- K pohybu na účtu bude v každém roce docházet pouze k datu 1. dubna (předpokládejme, že k tomuto datu bude připsána státní podpora za předchozí kalendářní rok a klient případně provede nový vklad) a k datu 31. prosince (k tomuto datu budou zaúčtovány a zdaněny úroky za uplynulý rok a bude odečten poplatek $p = 240$ Kč za vedení účtu.
- Uvažujme, že částky zaúčtované k datu 1. dubna jsou v daném roce úročeny úrokem $\frac{3}{4} \cdot 2{,}5\% = 1{,}875\%$ (tj. poměrnou částí celkového úroku).

Výpočet proveďte ve dvou oddělených variantách:

1. Klient vloží na účet při jeho založení jednorázově vklad $v = 140\,000$ Kč, později už žádné další vklady nedává.
2. Klient vloží na účet při jeho založení vklad 22 000 Kč a dále každý rok přidává částku 20 000 Kč (tzn. postupně vloží celkem 6 vkladů ve výši 20 000 Kč).

Řešení (1. varianta). Označme ještě z_i zůstatek klienta na konci i-tého kalendářního roku, s výši připisované státní podpory (v našem případě je $s = 2\,000$) a „úrokovací činitele" $q = 1 + \frac{u}{100} \cdot 0,85$ a $\overline{q} = 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{u}{100} \cdot 0,85$. Platí

$$\begin{array}{ll} z_1 = (v - p_0)\,\overline{q} - p & 31.\,12.\,2011\,, \\ z_2 = z_1 q + s\overline{q} - p = (v - p_0)\,\overline{q}q + s\overline{q} - p\,(q+1) & 31.\,12.\,2012\,, \\ z_3 = z_2 q + s\overline{q} - p = (v - p_0)\,\overline{q}q^2 + s\overline{q}\,(q+1) - p\,(q^2+q+1) & 31.\,12.\,2013\,, \\ \vdots & \vdots \\ z_7 = (v - p_0)\,\overline{q}q^6 + s\overline{q}\,(q^5+q^4+\ldots+q+1) - p\,(q^6+q^5+\ldots+q+1) & 31.\,12.\,2017\,. \end{array}$$

Výraz $q^5+q^4+\ldots+q+1$ představuje součet šesti čísel (to odpovídá šesti dosud připsaným státním podporám v letech 2012 až 2017), výraz $q^6+q^5+\ldots+q+1$ je tvořen sedmi sčítanci, neboť klient poplatek p za vedení účtu hradí celkem sedmkrát. Oba výrazy mají společné to, že se jedná o součet několika prvních členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem q. Užitím vztahu pro součet s_n prvních n členů takové posloupnosti

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

dostáváme

$$z_7 = (v - p_0)\,\overline{q}q^6 + s\overline{q} \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} - p \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1}\,. \tag{2}$$

Po dosazení zadaných číselných hodnot vychází $z_7 = 170\,118$. Doplňme, že k této částce ještě klientovi navíc přísluší poslední státní podpora ve výši 2 000 Kč, která by mu byla doplacena v dubnu 2018. Celková naspořená částka tedy činí 172 118 Kč. Pro zajímavost lze uvažovat, jak vysoký úrok by musel být na spořícím účtu (který je ve většině bank nabízen bez jakýchkoliv poplatků), aby klient za uvažovanou dobu naspořil z výchozí částky 140 000 Kč právě částku 172 118 Kč. Obdobnými úvahami bychom dospěli k rovnici

$$172\,118 = 140\,000\overline{q}q^6 = 140\,000\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{u}{100}\cdot 0,85\right)\left(1 + \frac{u}{100}\cdot 0,85\right)^6$$

s neznámou u. Jejím numerickým řešením (s využitím matematického software) obdržíme $u = 3{,}65$.

Řešení (2. varianta). Můžeme využít odvozeného vztahu (2), ovšem pro hodnoty $v = s = 22\,000$. Numericky pak vychází $z_7 = 162\,963$ (v této částce opět není zahrnuta poslední státní podpora ve výši 2 000 Kč, která by klientovi byla připsána až v dubnu následujícího roku). Zobecněním předchozích úvah pak lze vypočítat, že při této formě spoření docílíme zhodnocení přibližně o 1% vyšší než v předchozím případě. Stavební spořitelna Wüstenrot ve svých materiálech uvádí, že je možné docílit průměrného ročního zhodnocení vkladů až 5, 49%.

C) Spotřebitelské úvěry

Příklad. *Citi Shopping karta* - „Citi karta - kreditní karta, která šetří Vaše peníze" (jeden z reklamních sloganů poskytovatele).

- Sleva 2% (první 2 měsíce dokonce 10%, vždy však maximálně 500 Kč měsíčně) na vybrané kategorie nákupů - potraviny, oblečení, nábytek a bytové doplňky, sportovní potřeby, restaurace a bary.
- Poplatek za kartu 50 Kč měsíčně (další případné poplatky za výpisy z účtu v papírové formě, pojištění)
- Úrok 23, 99% p.a., bezúročné období až 55 dní (informace na výpise), úročení a výpisy jsou měsíčně.
- Minimální splátka 3, 2%, minimálně 200 Kč.

Modelový případ. Zákazník nakoupí v prvním měsíci používání karty zboží vybraných kategorií v celkové hodnotě $D = 10\,000$ Kč. Banka mu tedy přizná slevu $s = 500$ Kč. Další nákupy nekoná. Kolik by činila výše v jedné splátky, pokud by chtěl svůj dluh vůči bance vyrovnat v $n = 12$ stejných měsíčních splátkách (první z nich přesně na konci bezúročného období; pro zjednodušení předpokládejme, že se tak stane po dvou měsících od pořízení karty)? Kolik celkově zaplatí? Klient tedy dohromady hradí bance $n+1 = 13$ měsíčních poplatků $p = 50$ Kč za kartu. Pro jednoduchost uvažujme jednotné měsíční úroky ve výši $u = 2$ procenta.

Řešení. Odvoďme obecný vztah. Označme D_i aktuální výši dluhu klienta vůči bance na konci i-tého měsíce a „úrokovací činitel" $q = 1 + \frac{u}{100}$. Platí

$$\begin{aligned}
&D_1 = D - s + p\,,\\
&D_2 = D_1 + p - v = D - s + p + p - v\,,\\
&D_3 = D_2 q + p - v = (D - s + p)\,q + (p - v)\,(q + 1)\ ,\\
&D_4 = D_3 q + p - v = (D - s + p)\,q^2 + (p - v)\,(q^2 + q + 1)\ ,\\
&\vdots\\
&D_{n+1} = (D - s + p)\,q^{n-1} + (p - v)\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)\ .
\end{aligned}$$

Výraz $s_n = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1$ dále zjednodušíme s využitím skutečnosti, že se jedná o součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem q, pro jejíž součet platí

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Protože dle zadání platí $D_n = 0$, dostáváme

$$v \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = (D - s + p)\,q^{n-1} + p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Odtud

$$v=\frac{(D-s+p)\,q^{n-1}+p\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}{\frac{q^n-1}{q-1}}=\frac{(D-s+p)\,q^{n-1}\,(q-1)}{q^n-1}+p=\frac{(D-s+p)\left(1+\frac{u}{100}\right)^{n-1}\cdot\frac{u}{100}}{\left(1+\frac{u}{100}\right)^n-1}+p\,.$$

Po dosazení zadaných číselných hodnot dostáváme $v\doteq 935,34$. Klient tedy celkově bance zaplatí částku $12v$, tj. při zaokrouhlení11 224 Kč, což je o více než 12% více než byla původní cena kupovaného zboží. Například při částce $D=30\,000$ vychází výše jedné splátky na $2\,789,44$, tzn. klient by celkově zaplatil asi 33 473 Kč, což je asi o 11,5% více než byla původní cena kupovaného zboží.

3) Závěrečná úloha

Výraz

$$s_n=1+2\left(1+\frac{1}{n}\right)+3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+4\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1},$$

kde $n\in\mathbb{N}$ upravte do nejjednoduššího možného tvaru.

Řešení. Proveďme substituci $x=1+\frac{1}{n}$. Potom můžeme výraz s_n zapsat ve formálně jednodušším tvaru

$$s_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\,. \tag{3}$$

Čtenáře inspirovaného předchozími úlohami, ve kterých se sčítaly členy geometrické posloupnosti by mohla napadnout jedna ze dvou následujících úvah.

1. Upravme výraz (3) užitím základů diferenciálního a integrálního počtu

   $$s_n=\left(\int s_n\,\mathrm{d}x\right)'=\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^n+c\right)'=\left(x+x^2+\ldots+x^n\right)'+c'=\left(x+x^2+\ldots+x^n\right)'.$$

   Součtem n členů geometrické posloupnosti s prvním členem i kvocientem x dostáváme

   $$x+x^2+x^3+\ldots+x^n=x\cdot\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\,.$$

   Derivací podílu a následnou úpravou dále obdržíme

   $$s_n=\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)'=\frac{[(n+1)\,x^n-1]\cdot(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1}{(x-1)^2}\,.$$

   Odstraněním pomocné proměnné x konečně vychází

   $$s_n=\frac{x^n\cdot[n\,(x-1)-1]+1}{(x-1)^2}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left[n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)-1\right]+1}{\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{n^2}}=n^2\,.$$

2. Upravme výraz (3) podobným způsobem, jakým odvozujeme vztah pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Vynásobme tedy rovnici (3) číslem x, což je vzhledem k tomu, že $x\neq 0$ ekvivalentní úprava. Při „šikovném" zápisu obou vzniklých rovnic pod sebe pak dostáváme

   $$\begin{array}{rcccccccccccc} s_n &=& 1 &+& 2x &+& 3x^2 &+& \ldots &+& nx^{n-1}\,, && \\ xs_n &=& && x &+& 2x^2 &+& \ldots &+& (n-1)\,x^{n-1} &+& nx^n\,. \end{array}$$

   Odtud vidíme, že nyní bude vhodné rovnice od sebe odečíst. Tedy

   $$s_n-xs_n=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-nx^n\,.$$

   Podobně jako při prvním postupu vypočteme, že

   $$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}\,,$$

proto

$$s_n\,(1-x)=\frac{x^n-1}{x-1}-nx^n\,.$$

Dosadíme-li za x zpět ze substituční rovnice, obdržíme

$$s_n\left(1-1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1}{1+\frac{1}{n}-1}-n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,,$$

takže

$$s_n=-n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1}{\frac{1}{n}}+n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=-n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+n^2+n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n^2\,.$$

Ukázali jsme tedy, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$1+2\left(1+\frac{1}{n}\right)+3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+4\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=n^2\,. \qquad (4)$$

Poznamenejme, že právě vyřešenou úlohu lze formulovat různými způsoby. Například i jako úlohu k důkazu vztahu (4) matematickou indukcí. Při naší formulaci však vynikne to, že k odvození vztahu (4) není třeba znát jeho pravou stranu. Tuto úlohu lze nalézt ve sbírce [3, str. 32, Příklad. 3.7], kde autor při jejím řešení hovoří o tzv. aritmeticko-geometrické posloupnosti a důkaz provádí postupem, který jsme ukázali jako druhý v pořadí.

Reference

[1] Odvárko O., *Matematika pro gymnázia - Posloupnosti a řady*, Prometheus, 1995.

[2] Odvárko O., *Sbírka úloh z finanční matematiky pro střední školy*, Prometheus, 2005.

[3] Calda E., *Sbírka řešených úloh - Středoškolská matematika pod mikroskopem*, Prometheus, 2006.