Limity posloupností - úlohy ke cvičení

Vypočtěte limity následujících posloupností

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3}{2-n^2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+2n-1}{9n^3+5}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n}{n^3+n^5}\,,$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}\,,\ \text{kde } P,\ (Q) \text{ značí polynom v proměnné } n \text{ stupně } k,\ (m)\,,$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} q^n\,,\ \text{kde } q\in\mathbb{R}\,,$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}-1}{2^n-1}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3^n}{3^n}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5^n+2^n}{2^n-2^{2n}}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 6^n}{5^n+6^n}\,,$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+5+5^2+\ldots+5^{n-1}}{1-25^n}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}\,, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)\,,$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot n^4}{3^n\cdot n^4-n\cdot 2^{n+2}}\,,$$

7.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right]\,,$$

8.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}\,,$$

9.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\cdot 2^{\frac{n}{n^2+1}}\right)\,.$$

Návody a výsledky.

1. -5, ∞, 0,
2.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}=\begin{cases}0 & \text{pro } k<m,\\ r, & \text{kde } r \text{ označuje podíl koef. u ved. členů polynomů } P \text{ a } Q \text{ pro } k=m,\\ \operatorname{sgn}(r)\cdot\infty, & \text{kde } r \text{ ozn. podíl koeficientů u vedoucích členů pol. } P \text{ a } Q \text{ pro } k>m,\end{cases}$$
3.
$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0 & \text{pro } q\in(-1;1)\,,\\ 1 & \text{pro } q=1,\\ \infty & \text{pro } q>1,\\ \text{neexistuje} & \text{pro } q\le -1,\end{cases}$$
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-1}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n-1)(2^n+1)}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}(2^n+1)=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{1}=-1$, $-\infty$, 2
5.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+5+5^2+\ldots+5^{n-1}}{1-25^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n-1}{4}}{1-5^{2n}}=\ldots=0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{\frac{n+1+2n}{2}\cdot n}=\ldots=\frac{4}{3}\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}\cdot n}{n^2}=\ldots=\frac{1}{2}\,,$$
6.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n^4}{3^n\cdot n^4-n\cdot 2^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1-\frac{4}{n^3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3\,,$$
7. Pozor
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\neq\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\lim_{n\to\infty}n\,.$$
Výpočet je třeba provést pomocí rozšíření
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\,.\quad \text{Podobně vypočteme, že také } \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right]=\frac{1}{2}\,.$$
8.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+1}=0\,,$$
$$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)\,n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2\cdot2}{1\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0\,,$$
9.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot2^{\frac{n}{n^2+1}}\right)=\left\|1\cdot2^0\right\|=1\,.$$
V tomto případě platí
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot2^{\frac{n}{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}2^{\frac{n}{n^2+1}}=1\cdot1=1\,.$$