Posloupnosti - základní pojmy a vlastnosti

Definice. Posloupností rozumíme funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{Z}$ nebo její libovolná podmnožina. Prvky každé posloupnosti nazýváme jejími členy.

Poznámky.

1. Nejčastěji budeme pracovat s posloupnostmi, jejímiž definičními obory bude množina $\mathbb{N}$.
2. Je-li definičním oborem posloupnosti konečná množina, hovoříme o *konečné* posloupnosti, v opačném případě říkáme, že posloupnost je *nekonečná*.
3. Místo obvyklého zápisu pro funkce tvaru $a(n)$ v případě posloupností píšeme a_n. Posloupnost s definičním oborem $\mathbb{N}$ pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V takové posloupnosti tedy a_n značí její n-tý člen.
4. Podobně jako u funkcí také u posloupností používáme pojmy: prostá posloupnost, monotonie, omezenost, obor hodnot, ... Tyto pojmy tedy nyní není třeba nově definovat.
5. Grafem jakékoliv posloupnosti je množina *izolovaných* bodů.
6. Posloupnost zpravidla zadáváme předpisem (tj. explicitním vzorcem pro n-tý člen), např. $a_n = n^2 - 3n + 2$. Méně častým způsobem zadání posloupnosti je tabulka hodnot či graf, které můžeme použít spíše v případě konečných posloupností.
7. Na rozdíl od funkcí můžeme posloupnosti zadávat také *rekurentně* (viz dále).

Úlohy.

1. Napište prvních pět členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a načrtněte její graf, je-li
   (a) $a_n = (n-2)^2$,
   (b) $a_n = \frac{6}{n}$.
2. Vyšetřete monotonii posloupností
   (a) $\left\{\frac{3n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$,
   (b) $\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde $[x]$ značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které číslo x nepřevyšuje,
   (c) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
3. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti prosté
   (a) $\{7-4n\}_{n=1}^{\infty}$,
   (b) $\left\{\frac{4}{(2n-5)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$,
   (c) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.
4. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti omezené, případně alespoň jednostranně omezené
   (a) $\{3\sin n\}_{n=1}^{\infty}$,
   (b) $\left\{\frac{1}{n}-2\right\}_{n=1}^{\infty}$,
   (c) $\{3-n^2\}_{n=1}^{\infty}$,
   (d) $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$.
5. Vyšetřete obor hodnot následujících posloupností

(a) $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$,
(b) $\left\{\sin \frac{n\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

6. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž je posloupnost
$$\left\{\frac{nx}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$
klesající.

7. Vzorcem pro n-tý člen uveďte příklad posloupnosti následujících vlastností. Případně zdůvodněte, proč příslušná posloupnost nemůže existovat.

(a) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená hodnotami -1 a 3, přičemž obě dvě patří do jejího oboru hodnot.
(b) Obor hodnot posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je množina, která má právě 7 prvků.
(c) Posloupnost $\{c\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, ale není klesající.
(d) Posloupnost $\{d\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená.
(e) Posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a jejím oborem hodnot je nekonečná množina.
(f) Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a není prostá.
(g) Posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ není ani jednostranně omezená a není ani prostá.

Návody a výsledky úloh.

1. Platí

(a) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 4$, $a_5 = 9$,
(b) $a_1 = 6$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = \frac{3}{2}$, $a_5 = \frac{6}{5}$.

2. Posloupnost

(a) je rostoucí (návod: $a_{n+1} - a_n = \frac{3n+2}{n+3} - \frac{3n-1}{n+2} = \ldots = \frac{7}{(n+2)(n+3)} > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$),
(b) je neklesající,
(c) není ani rostoucí ani klesající.

3. Prosté jsou posloupnosti v (a) a (c). Je u nich třeba ukázat, že pro $i \neq j$ je též $a_i \neq a_j$. U (b) je např. $a_2 = a_3 = 4$.

4. Posloupnosti v (a) a (b) jsou omezené, posloupnost v (c) je shora omezená, a posloupnost v (d) není omezená ani jednostranně.

5. Oborem hodnot je

(a) množina všech lichých přirozených čísel,
(b) $\left\{0; \pm 1; \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

6. Ekvivalentními úpravami nerovnice
$$\frac{(n+1)\,x}{n+2} < \frac{nx}{n+1}$$
vypočteme, že $x < 0$.

7. Neexistuje pouze posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, neboť každá klesající funkce (a tedy i posloupnost) je prostá. Vyhoví například
$$a_n = (-1)^n \cdot 2 + 1\,, \quad b_n = \cos\frac{n\pi}{6}\,, \quad c_n = -\left[\frac{n}{3}\right]\,, \quad d_n = e_n = \frac{-1}{n}\,, \quad g_n = (-1)^n \cdot \left[\frac{n}{4}\right]\,.$$

Rekurentní určení posloupnosti

Rekurentní (slovo odvozeno z latiny) vzorec je takový vztah, pomocí něhož lze určit libovolný člen posloupnosti, „vrátíme-li“ se na začátek a budeme-li postupně počítat následující členy. Rekurentní vzorec musí kromě jisté uvedené závislosti na předchozím členu (či více členech) obsahovat též příslušný počet počátečních podmínek (tolik o kolik členů zpět se rekurentní vyjádření vrací), aby bylo „odkud začít počítat“.

Úlohy.

1. Napište prvních pět členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí
   - (a) $a_{n+1} = 2a_n - 1$, $a_1 = 2$,
   - (b) $a_{n+2} = n + a_n$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$,
   - (c) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$ - tzv. Fibonacciho posloupnost
   - (d) $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $a_1 = 1$, $a_2 = -2$.
2. Pro každou z posloupností zadaných vzorcem pro n-tý člen najděte alespoň dva různé rekurentní vzorce tak, aby v prvním případě stačila jedna počáteční podmínka, ve druhém byly potřeba alespoň dvě počáteční podmínky.
   - (a) $a_n = \frac{n+1}{n}$,
   - (b) $b_n = (n-1)^2$,
   - (c) $c_n = 2^n$.
3. Každou z uvedených konečných posloupností zapište vzorcem pro n-tý člen
   - (a) 9, 25, 49, 81, 121,
   - (b) -1, 4, -7, 10, -13,
   - (c) 30, 20, 15, 12, 10.
4. Zamyslete se, zda jsou vámi nalezená řešení v předchozí úloze jednoznačná. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti, která má těchto prvních 6 členů

   $$1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;x\,,\ \text{kde } x \text{ značí libovolné předem zvolené číslo.}$$

5. Najděte vzorec pro n-tý člen každé z rekurentně zadaných posloupností. Své tvrzení dokažte.
   - (a) $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 2$,
   - (b) $b_{n+1} = 2b_n$, $b_1 = 3$,
   - (c) $c_{n+1} = -\frac{n}{c_n(n+2)}$, $c_1 = \frac{1}{2}$.
6. Ukažte, že vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti je tvaru

   $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

   Uhodli byste jej?