

<i>Posloupnosti - rekurentní zadání</i>

Příklad 1.

Napište prvních pět členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí

1. $a_{n+1} = 2a_n - 1, a_1 = 2,$
2. $a_{n+2} = n + a_n, a_1 = 0, a_2 = -1,$
3. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$ - tzv. Fibonacciho posloupnost
4. $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_1 = 1, a_2 = -2.$

Příklad 2. Pro každou z posloupností zadaných vzorcem pro n -tý člen najděte alespoň dva různé rekurentní vzorce tak, aby v prvním případě stačila jedna počáteční podmínka, ve druhém byly potřeba alespoň dvě počáteční podmínky.

1. $a_n = \frac{n+1}{n},$
2. $b_n = (n-1)^2,$
3. $c_n = 2^n.$

Příklad 3. Každou z uvedených konečných posloupností zapište vzorcem pro n -tý člen

1. 9, 25, 49, 81, 121,
2. -1, 4, -7, 10, -13,
3. 30, 20, 15, 12, 10.

Příklad 4.

Najděte vzorec pro n -tý člen každé z rekurentně zadaných posloupností. Svě tvrzení dokažte.

1. $a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 2,$
2. $b_{n+1} = 2b_n, b_1 = 3,$
3. $c_{n+1} = -\frac{n}{c_n(n+2)}, c_1 = \frac{1}{2}.$

Příklad 5. Ukažte, že vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti je tvaru

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$