2. FUNKCE JEDNÉ A VÍCE PROMĚNNÝCH

Def. 2.1.
<u>Reálnou funkcí jedné reálné proměnné</u> nazýváme <u>zobrazení *f*</u> množiny A reálných čísel *x* do množiny B reálných čísel *y*.

Proměnná x – nezávisle proměnná
Proměnná y – závisle proměnná
Množina A – definiční obor funkce *f*
Množina všech y = *f*(x) pro x $\in$ A – obor funkčních hodnot *f*(A)

Def. 2.2.
Nechť *f* je funkce s def. oborem A. Jestliže pro dvě libovolná čísla x_1, x_2, $\in$ A ($x_1 \neq x_2$) platí $f(x_1) \neq f(x_2)$ pak se funkce *f* nazývá **<u>prostá</u>**.

Def.2.3.
Nechť *f* je prostá funkce s def. oborem A. **<u>Inverzní</u>** funkcí k funkci *f* nazýváme funkci φ pro niž platí :

$$y = f(x) \in B,\ \varphi(y) = x .$$

Def. 2.4.
Funkce *f* se nazývá

sudá pokud $f(x) = f(-x)$
lichá pokud $f(x) = -f(-x)$

Def. 2.5.
Jestliže existuje taková konstanta *k*, že pro všechna x $\in$ A platí $\boldsymbol{f(x) \leq k}$, pak se funkce *f* nazývá **shora ohraničená.**
Jestliže existuje taková konstanta *k*, že pro všechna x $\in$ A platí $\boldsymbol{f(x) \geq k}$, pak se funkce *f* nazývá **zdola ohraničená.**
Jestliže existuje taková konstanta *k*, že pro všechna x $\in$ A platí $|f(x)| \leq k$, pak se funkce *f* nazývá **ohraničená**.

Def. 2.6.
Jestliže pro libovolnou dvojici $x_1 < x_2 \in$ A platí:

$f(x_1) < f(x_2)$	nazveme *f*	**rostoucí** funkcí
$f(x_1) \leq f(x_2)$		**neklesající**
$f(x_1) > f(x_2)$		**klesající**
$f(x_1) \geq f(x_2)$		**nerostoucí**

Def.2.7.
Elementární funkce

Konstantní $y = c$

Lineární $y = kx + q$

Kvadratická $y = ax^2 + bx + c$

Lineárně lomená $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Mocninná $y = x^{\alpha}$

Exponenciální $y = a^{x}$

Logaritmická $y = \log_a x$

Goniometrické $y = \sin x$
$y = \cos x$
$y = \mathrm{tg}\, x$
$y = \mathrm{cotg}\, x$

Def. 2.8.
Funkce *f* se nazývá **spojitá v bodě *c***, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna x pro nějž $|x - c| < \delta$.

Def. 2.9.
Funkce *f* se nazývá **spojitá zleva** (zprava), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna x pro nějž $c - \delta < x \leq c$,
(resp. $c \leq x < c + \delta$).

Věta 2.1.
Funkce *f* je spojitá v bodě c, právě když je v bodě c spojitá zprava i zleva.

Věta 2.2.
Jsou-li funkce *f*, *g* spojité v bodě c, pak jsou spojité i funkce $|f|$, $f \pm g$, $f \cdot g$ a je-li $g(c) \neq 0$ pak i $\frac{f}{g}$.

Věta 2.3.
Jestliže funkce φ je spojitá v bodě c a *f* je spojitá v bodě $d = \varphi(c)$, pak funkce $f(\varphi(c))$ je spojitá v bodě c.

Věta 2.4.
Jestliže funkce *f* je spojitá na uzavřeném intervalu I pak platí:
- Funkce je na I ohraničená
- Funkce *f* nabývá na intervalu I svého maxima a minima.

Def. 2.10.
Říkáme, že funkce *f* má **v bodě c limitu A** ($\lim_{x \to c} f(x) = A$), jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ platí pro všechna x pro nějž $0 < |x - c| < \delta$.

Def. 2.11.
Říkáme, že funkce má v **bodě c limitu A zprava** (zleva) [($\lim_{x \to c^+} f(x) = A$, $\lim_{x \to c^-} f(x) = A$], jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ platí pro všechna $x \in (c, c + \delta)$ (resp. $(c - \delta, c)$).

Def. 2.12.
Říkáme, že funkce f má v nevlastním bodě $+\infty$ (resp. $-\infty$) limitu A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový bod x_0, že $| f(x) - A| < \varepsilon$ platí pro všechna x pro něž $x > x_0$, (resp. $x < x_0$).

Def. 2.13.
Říkáme, že funkce f má v bodě c **nevlastní limitu** $+\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže ke každému K>0 (resp.<0) existuje $\delta > 0$, že $f(x) > K$ (resp. $f(x) < K$) pro všechna x pro něž $0 < | x - c | < \delta$.

Věta 2.5.
Funkce f má v bodě c nejvýše jednu limitu (limitu zleva, limitu zprava).

Věta 2.6.
Platí $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ právě, když $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = A$.

Věta 2.7.
Funkce f je spojitá v bodě c, právě když $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Věta 2.8.
Nechť $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B$.

Pak $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |A|$

$\lim\limits_{x\to c} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

$\lim\limits_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

$\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ je- li $B \neq 0$