

<b>6. URČITÝ INTEGRÁL .....</b>	<b>68</b>
<b>6.1. Výpočet určitého integrálu .....</b>	<b>68</b>
Úlohy k samostatnému řešení .....	68
<b>6.2. Geometrické aplikace.....</b>	<b>69</b>
6.2.1. Obsah rovinného obrazce .....	69
Úlohy k samostatnému řešení.....	69
6.2.2. Délka oblouku rovinné křivky .....	70
Úlohy k samostatnému řešení.....	70
6.2.3. Objem rotačního tělesa .....	70
Úlohy k samostatnému řešení.....	70
6.2.4. Povrch rotačního tělesa.....	71
Úlohy k samostatnému řešení.....	71
<b>6.3. Nevlastní integrál.....</b>	<b>71</b>
Úlohy k samostatnému řešení.....	71
Výsledky úloh k samostatnému řešení .....	73
Nápověda k úlohám k samostatnému řešení.....	74
Obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami .....	74
Délku oblouku rovinné křivky.....	75
Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy $x$ .....	77
Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy $y$ .....	79
Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy $x$ .....	79

## 6. URČITÝ INTEGRÁL

### 6.1. Výpočet určitého integrálu



#### Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte integrál:

$$a) \int_1^4 \left( x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx,$$

$$c) \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx,$$

$$e) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx,$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx,$$

$$i) \int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx,$$

$$k) \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx,$$

$$b) \int_0^{\pi} (\cos 2x - 2 \sin x + 2) dx,$$

$$d) \int_4^9 \left( \frac{x^2 - 5\sqrt{x} + x}{x^3} \right) dx,$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

$$h) \int_0^1 \left( e^{2x} - 4^{3x} + \frac{1}{2^x} \right) dx,$$

$$j) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx,$$

$$l) \int_0^2 \frac{x^2}{4+x^2} dx.$$

#### Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte integrál:

$$a) \int_0^1 (x-1)e^x dx,$$

$$c) \int_0^{\pi} x \sin 2x dx,$$

$$e) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx,$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$$

$$i) \int_1^e \ln^2 x dx,$$

$$k) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx,$$

$$b) \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx,$$

$$d) \int_1^4 x^2 \ln x dx,$$

$$f) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx,$$

$$h) \int_0^{\pi} (x^2 - 2x + 2) \sin x dx,$$

$$j) \int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos \frac{x}{2} dx,$$

$$l) \int_0^1 x \ln(x+1) dx.$$

#### Výsledky úloh k samostatnému řešení

## 3. Vypočítejte integrál:

a)  $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx,$

b)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} dx,$

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x dx,$

d)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx,$

e)  $\int_0^1 \sin(\pi\sqrt{x}) dx,$

f)  $\int_1^e \frac{5\ln^4 x}{x} dx,$

g)  $\int_0^1 \frac{e^x(2e^x+2)}{e^{2x}+2e^x+2} dx,$

h)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x+3} dx,$

i)  $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx,$

j)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(x+1)} dx,$

k)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x+2}{\cos^2 x} dx,$

l)  $\int_0^5 \frac{\sqrt{x+4}}{x+3} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

## 4. Vypočítejte integrál:

a)  $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3(x+1)} dx,$

b)  $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} dx,$

c)  $\int_1^2 \frac{4}{x^2+4x} dx,$

d)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x(x^2+1)} dx,$

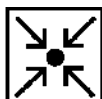
e)  $\int_3^5 \frac{x+4}{x^2-4x+4} dx,$

f)  $\int_4^5 \frac{2x}{x^2-x-6} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

## 6.2. Geometrické aplikace

## 6.2.1. Obsah rovinného obrazce



## Úlohy k samostatnému řešení



## 5. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

a)  $x=0, y=0, 3x+4y-12=0,$

b)  $y=0, y=x, y=6-x,$

c)  $y=\sin x+1, y=0, x \in \langle 0, \pi \rangle,$

d)  $y=e^x, y=e^{-x}, y=e,$

e)  $y=\ln(x-1), y=0, x=5,$

f)  $y=-x^2-2x+4, y=x^2-4x-8,$

g)  $x=r \cos t, y=r \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

kružnice

h)  $x=a \cos t, y=b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

elipsa

i)  $x=r(t-\sin t), y=r(1-\cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

cykloida

j)  $x=2a \sin t \cos t, y=a \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)[Neumím nakreslit obrázek](#)

## 6.2.2. Délka oblouku rovinné křivky



## Úlohy k samostatnému řešení



6. Vypočítejte délku oblouku rovinné křivky:

a)  $y = \ln \cos x, x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle,$

b)  $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$

c)  $y = \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle,$

d)  $y = \ln(1-x^2), x \in \left\langle 0, \frac{3}{4} \right\rangle,$

e)  $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$

f)  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in \langle 1, 3 \rangle,$

g)  $x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

h)  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$

asteroida

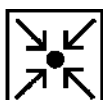
i)  $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle,$

j)  $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

## 6.2.3. Objem rotačního tělesa



## Úlohy k samostatnému řešení



7. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy  $x$ :

a)  $y = x^2 - 4, y = 0,$

b)  $y = \ln x, y = 0, x = e,$

c)  $xy = 3, x = 1, x = 3, y = 0,$

d)  $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2},$

e)  $y = x^3, y^2 = x,$

f)  $y = \arccos x, y = 0, x = 1,$

g)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0,$

h)  $x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

i)  $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

j)  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

8. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy  $y$  :
- $y = x^2 - 4, y = 0,$
  - $y = x^3, y = 1, x = 0,$
  - $y = 1 - x, y = 1, x = 1,$
  - $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

### 6.2.4. Povrch rotačního tělesa



#### Úlohy k samostatnému řešení



9. Vypočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy  $x$  :
- $y = 3 - x, x \in \langle -1, 2 \rangle,$
  - $y = x^3, x \in \langle 1, 3 \rangle,$
  - $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 2 \rangle,$
  - $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in \langle 0, 1 \rangle,$
  - $x = a \sin 2t, y = 2a \sin^2 t, t \in \langle 0, \pi \rangle,$
  - $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0,$
  - $x = r \cos t, y = r \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle,$
  - $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$
  - $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

### 6.3. Nevlastní integrál



#### Úlohy k samostatnému řešení



10. Vypočítejte nevlastní integrál:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int_1^2 \frac{x}{x-1} dx, & \text{b) } \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx, & \text{c) } \int_0^1 \frac{x-1}{x(x+1)} dx, \\
 \text{d) } \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)} dx, & \text{e) } \int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx, & \text{f) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx,
 \end{array}$$

g)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx,$

h)  $\int_0^{\infty} x \sin x dx,$

i)  $\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x} dx,$

j)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx,$

k)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+x^2} dx,$

l)  $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



## Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a)  $2 \ln 2 + \frac{7}{3}$ ; b)  $2\pi - 4$ ; c)  $\ln 2 + \frac{\pi}{4}$ ; d)  $2 \ln \frac{3}{2} - \frac{25}{162}$ ; e)  $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{4}$ ; f)  $\frac{\pi}{6} - \frac{7\sqrt{3}}{8}$ ;  
g)  $1 - \frac{\pi}{4}$ ; h)  $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{10}{\ln 2}$ ; i)  $\ln 2 + 1$ ; j)  $\ln 2$ ; k)  $\frac{\ln 10}{2}$ ; l)  $2 - \frac{\pi}{2}$ . 2. a)  $2 - e$ ; b)  $e - \frac{5}{e}$ ;  
c)  $-\frac{\pi}{2}$ ; d)  $\frac{128}{3} \ln 2 - 7$ ; e)  $0$ ; f)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ; g)  $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{1}{2}$ ; h)  $\pi^2 - 2\pi$ ; i)  $e - 2$ ; j)  $2\pi^2 - 18$ ;  
k)  $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ ; l)  $\frac{1}{4}$ . 3. a)  $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ ; b)  $4 \ln 2 - 3$ ; c)  $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ; d)  $\frac{1}{4}$ ; e)  $\frac{2}{\pi}$ ; f)  $1$ ;  
g)  $\ln \frac{e^2 + 2e + 2}{5}$ ; h)  $\frac{\sqrt{3}}{18} \pi$ ; i)  $1 - \ln \frac{e+1}{2}$ ; j)  $2 - \frac{\pi}{2}$ ; k)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ; l)  $\ln \frac{3}{2} + 2$ . 4. a)  $2 \ln \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$ ;  
b)  $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$ ; c)  $\ln \frac{5}{3}$ ; d)  $\ln \frac{3}{2} + \frac{\pi}{12}$ ; e)  $\ln 3 + 4$ ; f)  $\frac{2}{5} \ln \frac{98}{9}$ . 5. a)  $6$ ; b)  $9$ ; c)  $\pi + 2$ ; d)  $2$ ;  
e)  $8 \ln 2 - 4$ ; f)  $\frac{125}{3}$ ; g)  $\pi r^2$ ; h)  $\pi ab$ ; i)  $3\pi r^2$ ; j)  $\frac{4}{3} a^2$ . 6. a)  $\ln(\sqrt{3} + 2)$ ; b)  $4 - 2\sqrt{2}$ ;  
c)  $\ln\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1}{2}\right) + \sqrt{5} - \sqrt{2}$ ; d)  $\ln 7 - \frac{3}{4}$ ; e)  $2$ ; f)  $\ln(e^4 + e^2 + 1) - 2$ ; g)  $2\pi$ ;  
h)  $\frac{3}{2}$ ; i)  $2\sqrt{3}$ ; j)  $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$ . 7. a)  $\frac{512}{15} \pi$ ; b)  $\pi(e - 2)$ ; c)  $6\pi$ ; d)  $\frac{\pi^2}{4}$ ; e)  $\frac{5}{14} \pi$ ;  
f)  $\pi^2 - 2\pi$ ; g)  $5\pi^2 a^3$ ; h)  $\frac{4}{3} \pi$ ; i)  $\frac{4}{3} \pi ab^2$ ; j)  $\frac{52}{105} \pi a^3$ . 8. a)  $8\pi$ ; b)  $\frac{3}{5} \pi$ ; c)  $\frac{2}{3} \pi$ ;  
d)  $2\pi$ . 9. a)  $15\sqrt{2}\pi$ ; b)  $\frac{\pi}{27}(730\sqrt{730} - 10\sqrt{10})$ ; c)  $\frac{13}{3} \pi$ ; d)  $\frac{\pi}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$ ; e)  $4\pi^2 a^2$ ;  
f)  $\frac{64}{3} \pi a^2$ ; g)  $4\pi r^2$ ; h)  $\frac{2\sqrt{2}}{5} \pi(e^\pi - 2)$ ; i)  $\frac{6}{5} \pi a^2$ . 10. a) diverguje; b)  $2$ ; c) diverguje;  
d)  $2 - \pi$ ; e) diverguje; f)  $\sqrt{2}$ ; g)  $0$ ; h) diverguje; i)  $0$ ; j)  $\frac{\pi}{2}$ ; k)  $1 - \ln 2$ ; l)  $2$ .

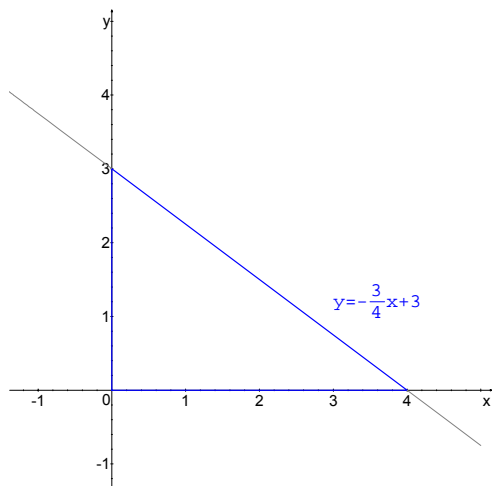


### Nápověda k úlohám k samostatnému řešení

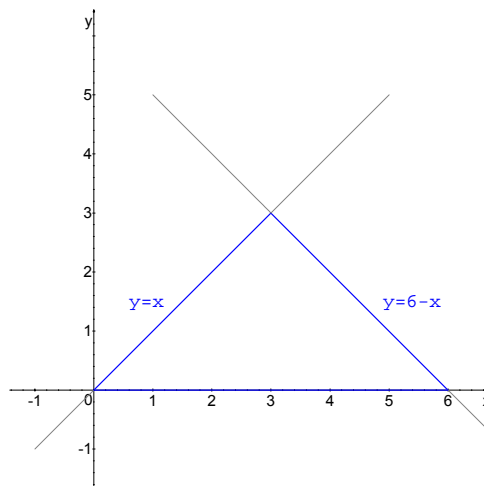


#### Obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

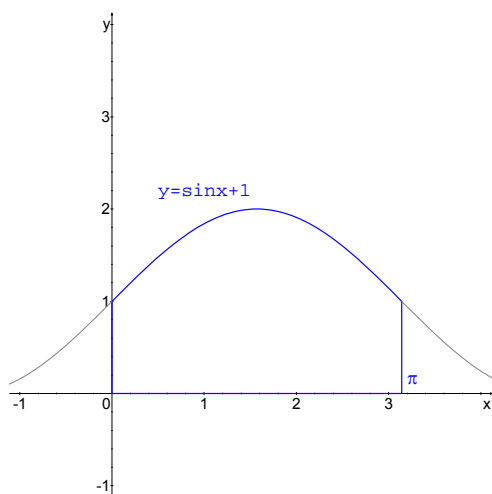
a)



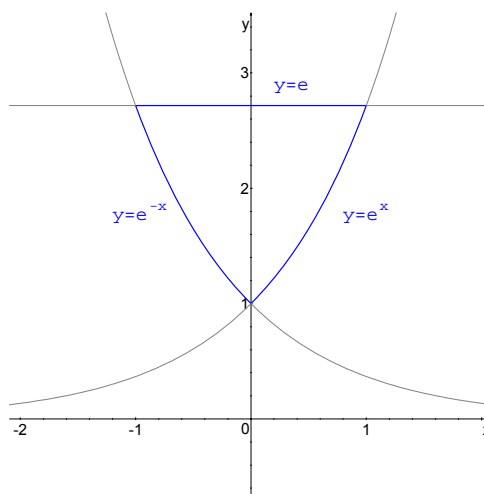
b)



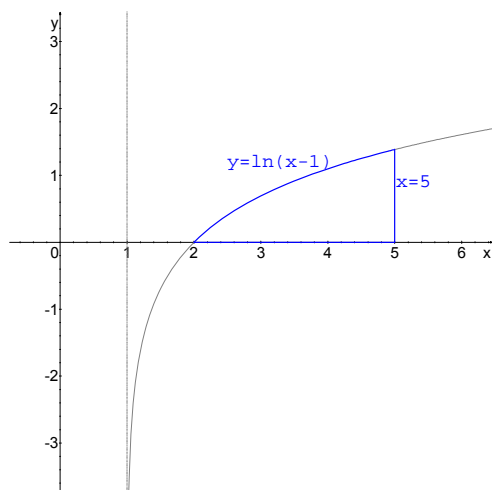
c)



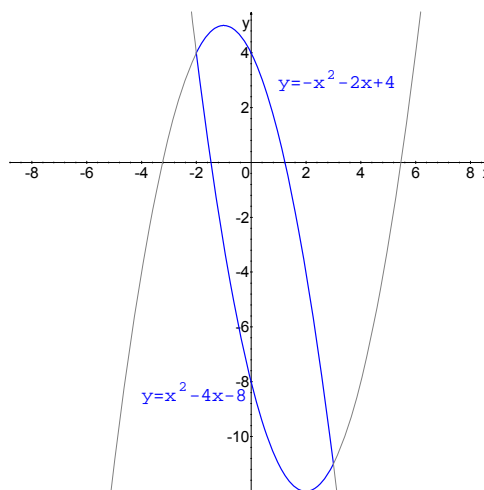
d)



e)

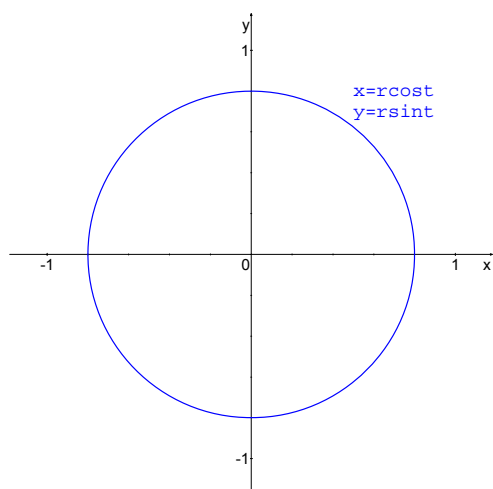


f)

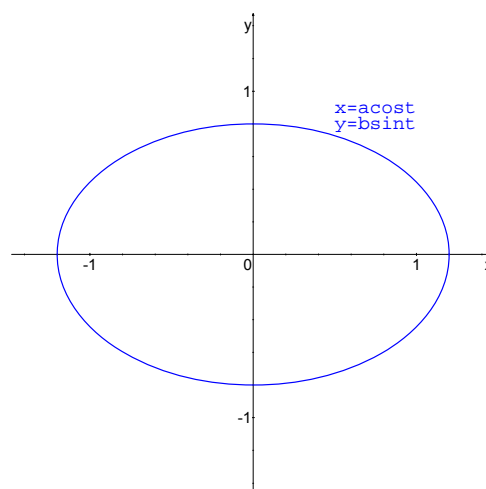




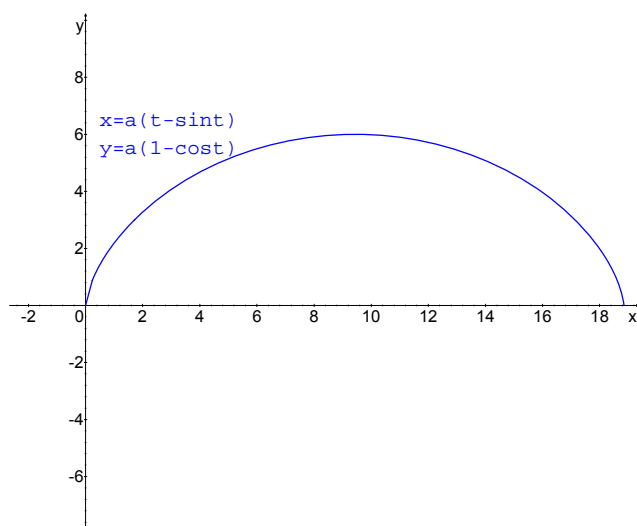
g)



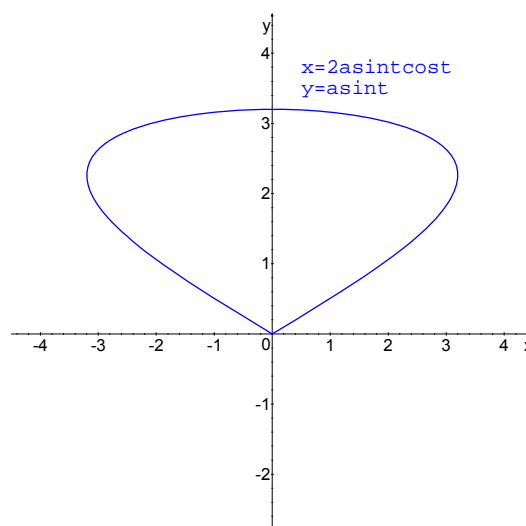
h)



i)

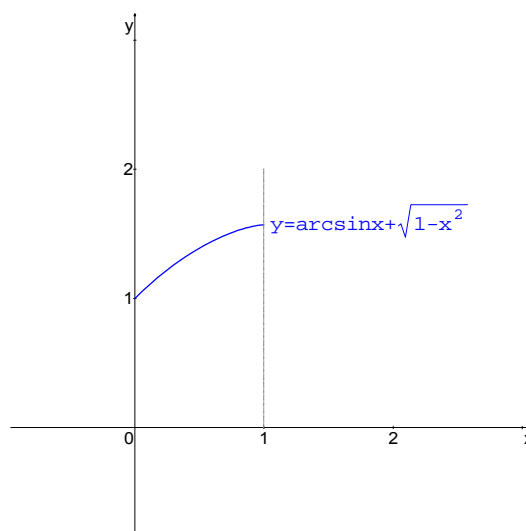
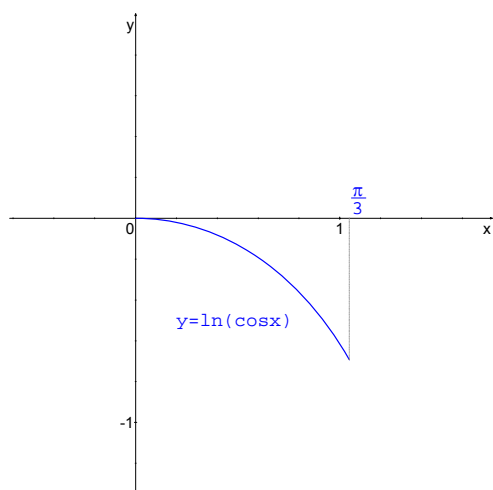


j)

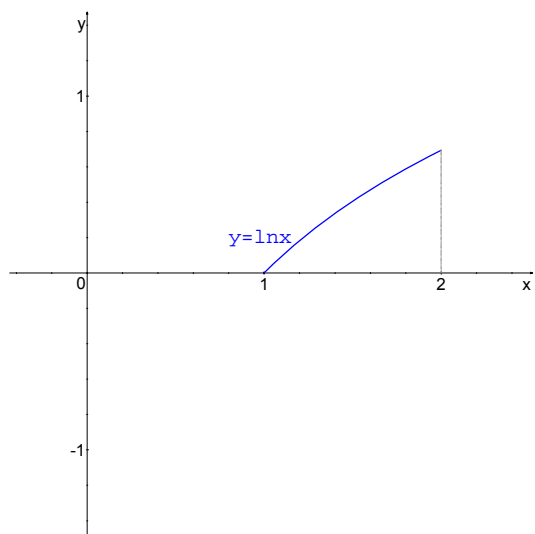


### Délku oblouku rovinné křivky

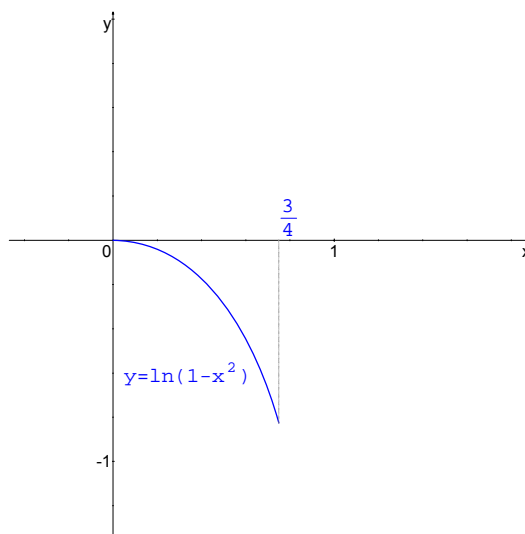
a)



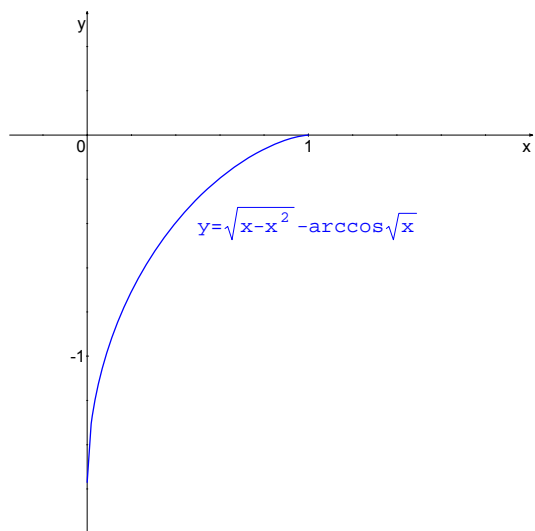
c)



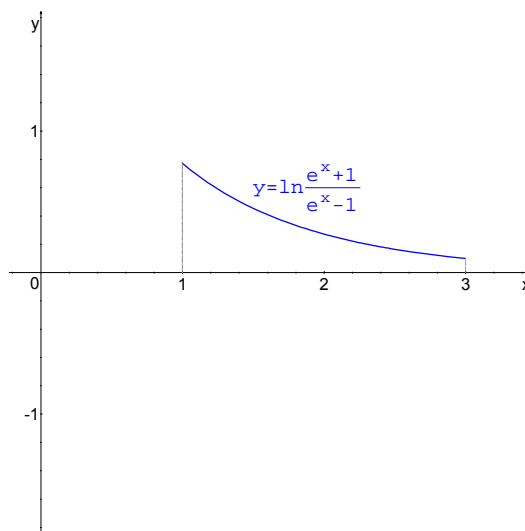
d)



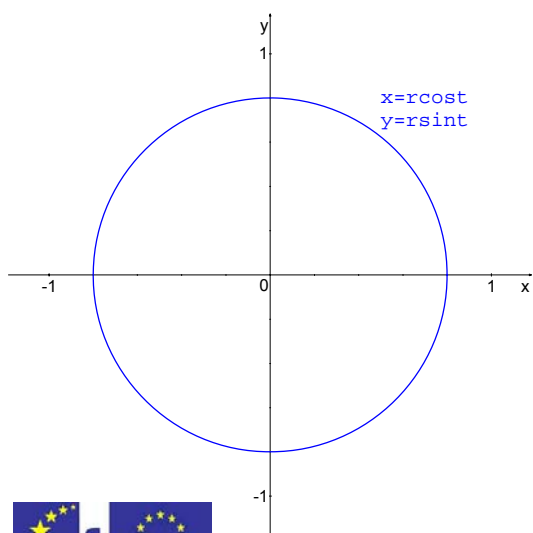
e)



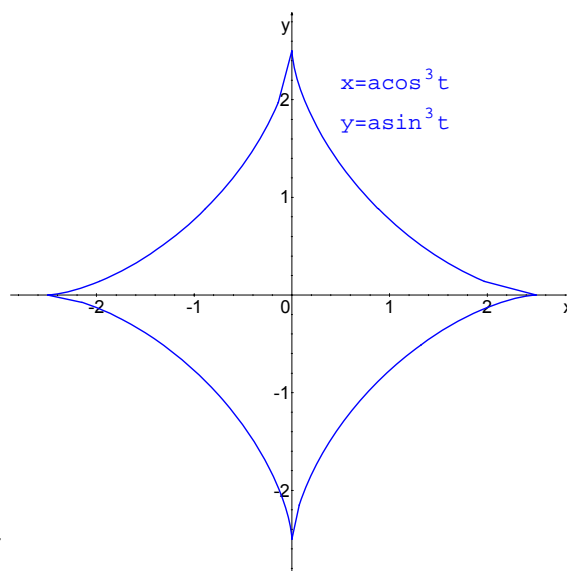
f)



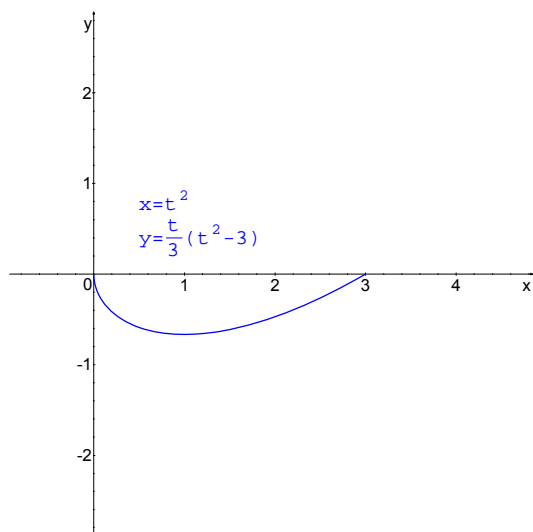
g)



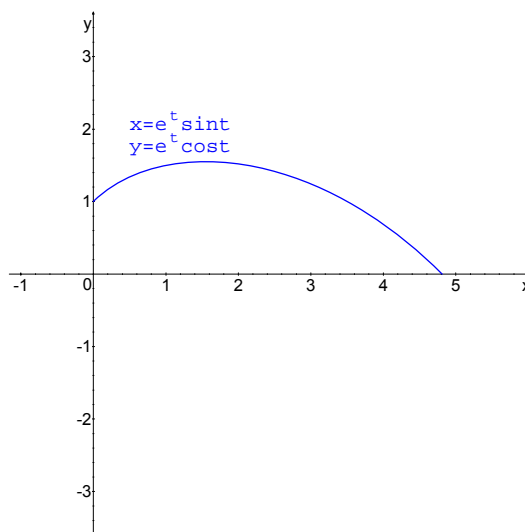
h)



i)

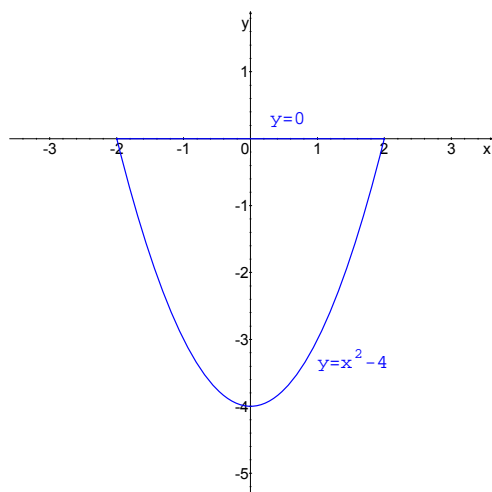


j)

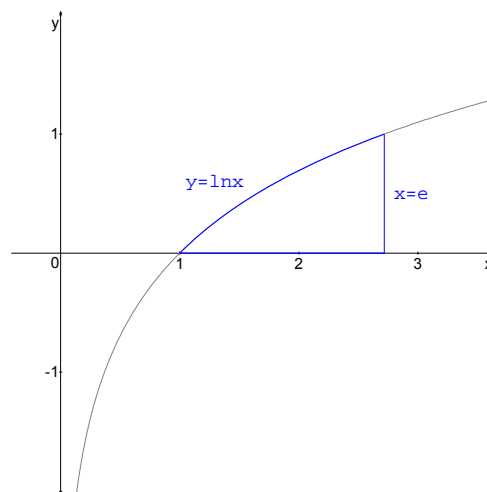


**Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy  $x$**

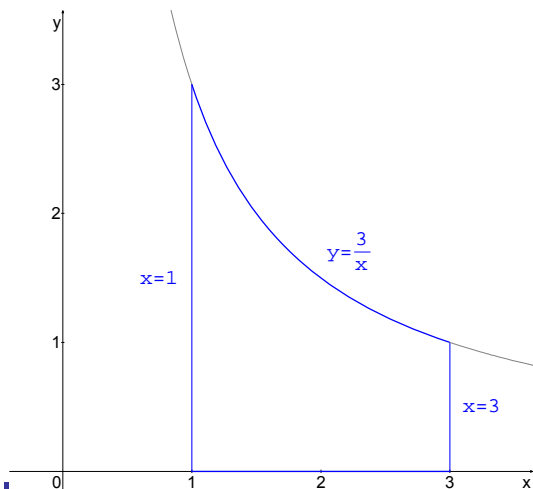
a)



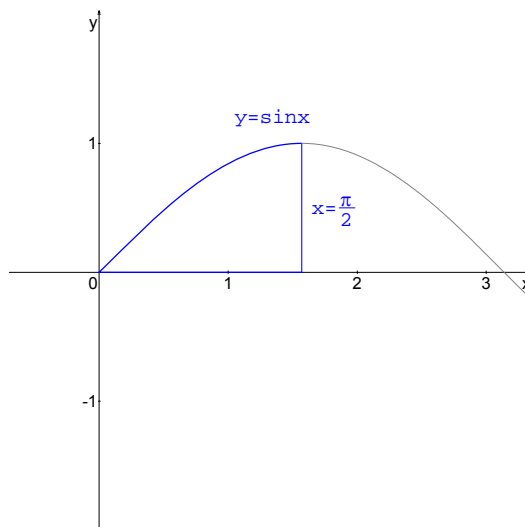
b)



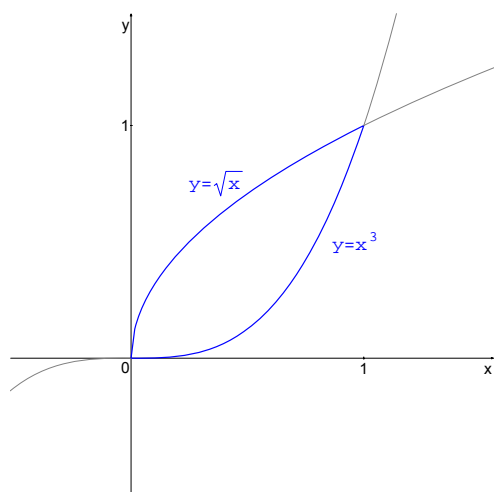
c)



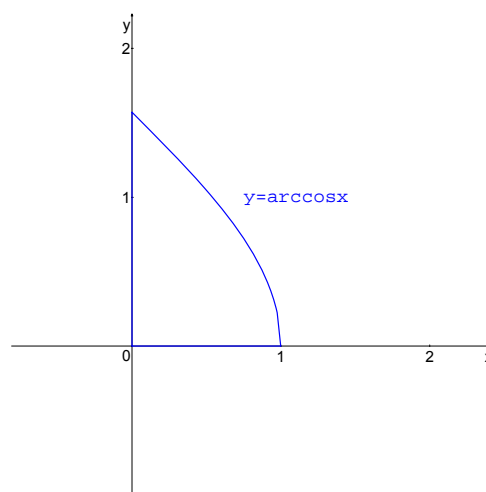
d)



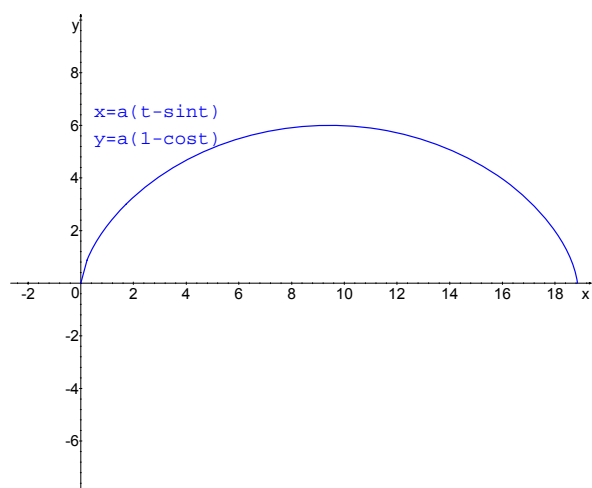
e)



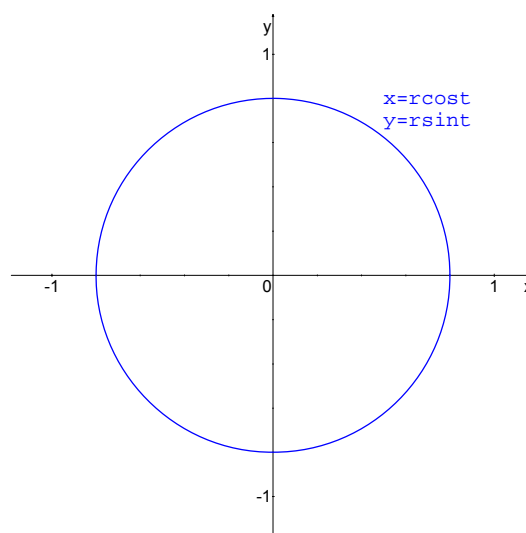
f)



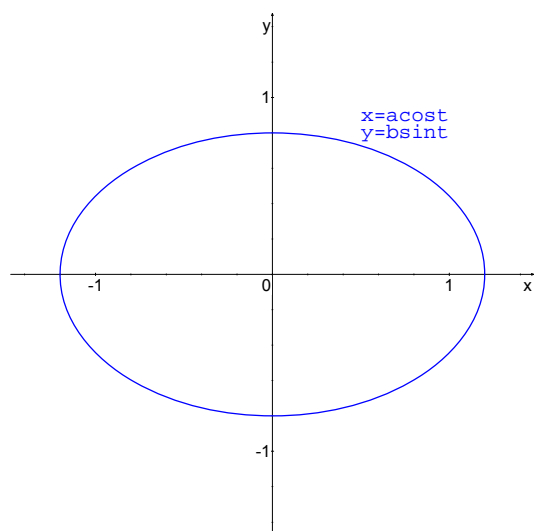
g)



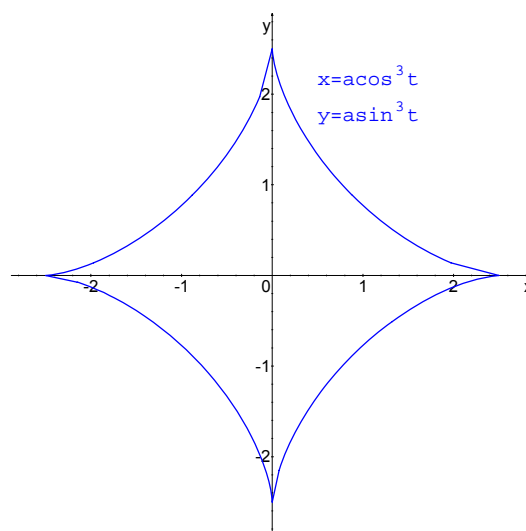
h)



i)

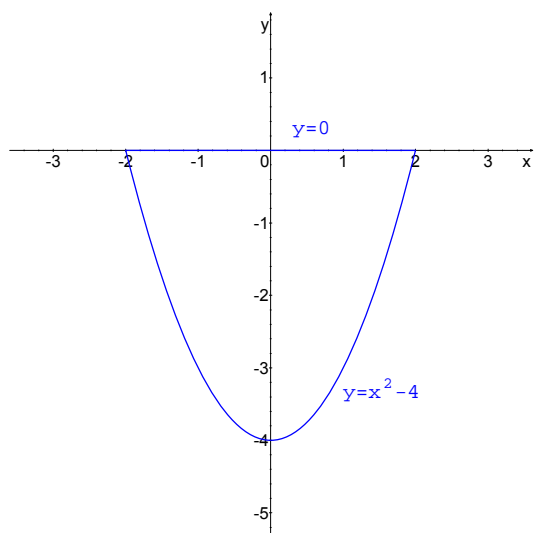


j)

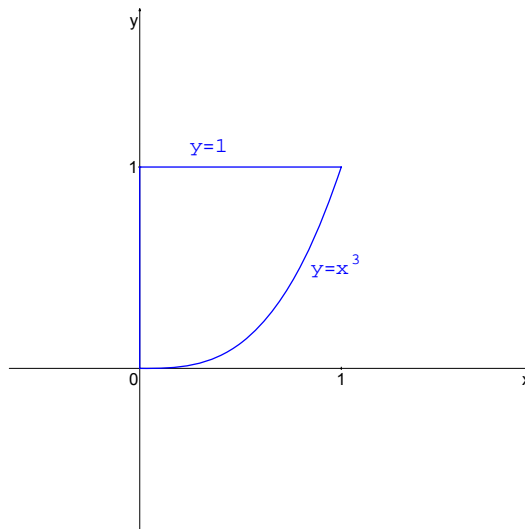


**Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy  $y$**

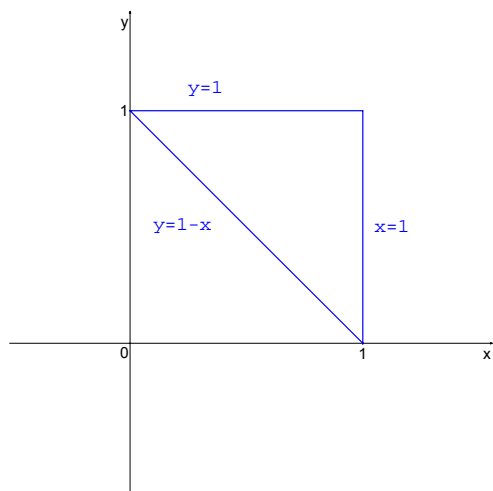
a)



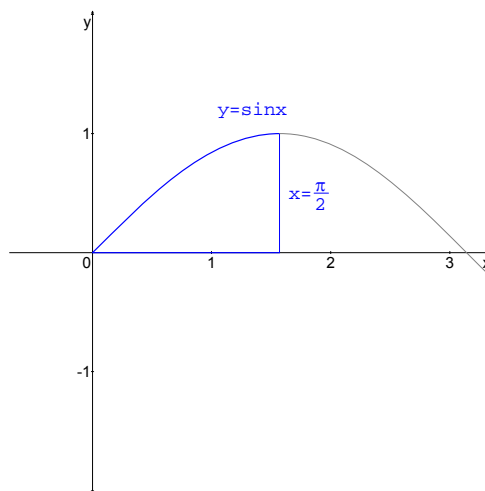
b)



c)

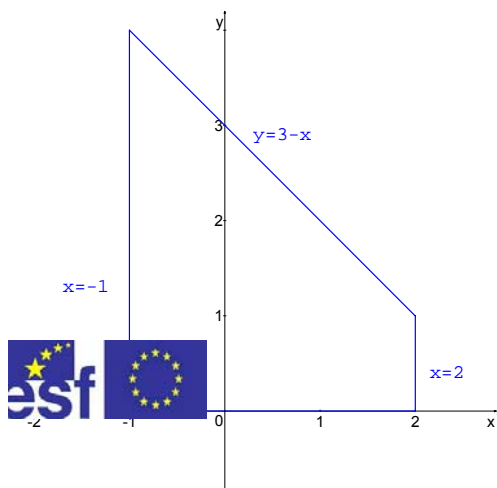


d)

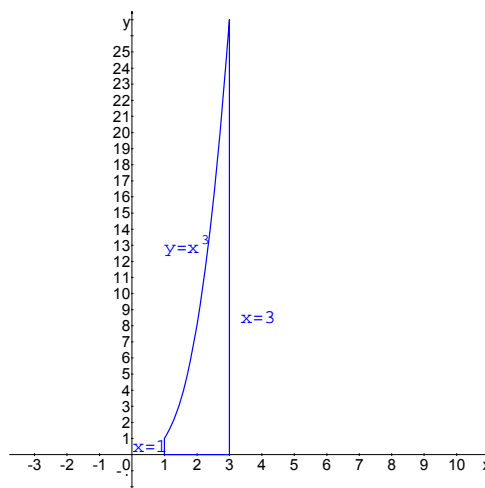


**Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy  $x$**

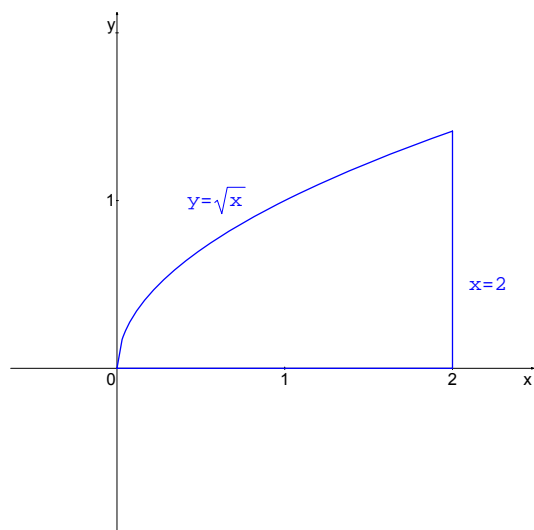
a)



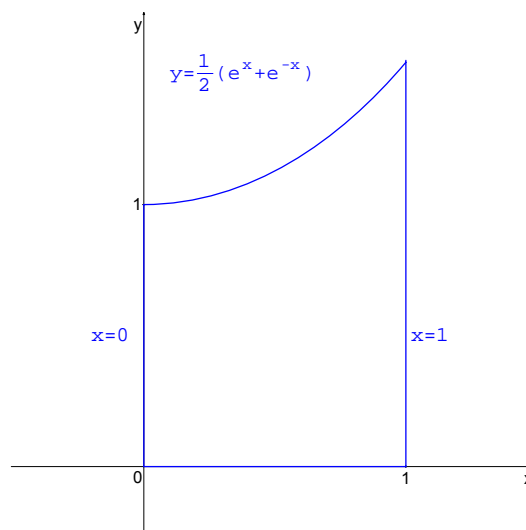
b)



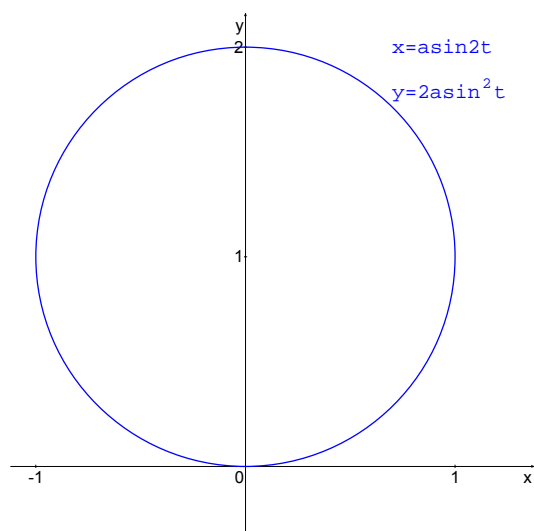
c)



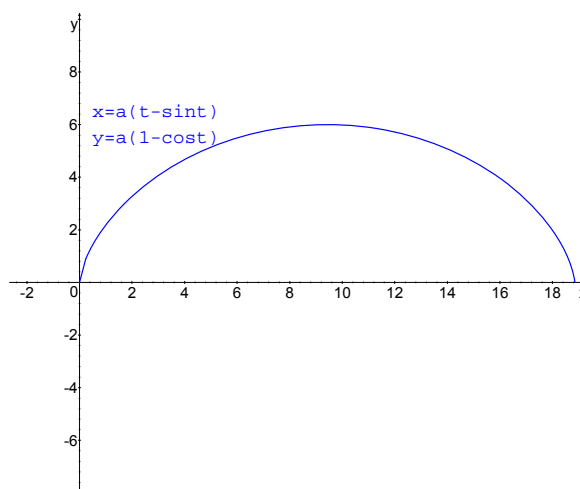
d)



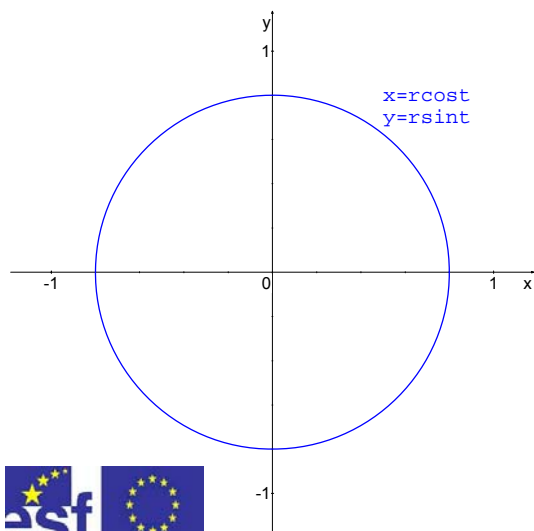
e)



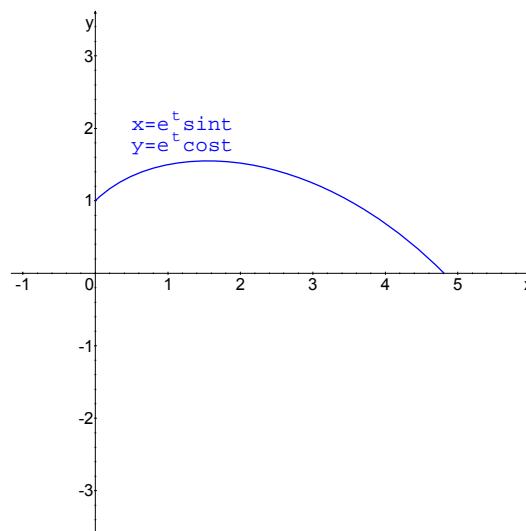
f)



g)



h)



i)

