IV. NEJISTOTY MĚŘENÍ A ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ

Měření patří mezi základní způsoby získávání kvantitativních informací o stavu sledované veličiny.

4.1 CHYBY MĚŘENÍ

Nedokonalost metod měření, našich smyslů, omezená přesnost měřicích přístrojů, proměnné podmínky měření a další vlivy způsobují, že měřením nemůžeme zjistit skutečnou hodnotu fyzikální veličiny x_0. Rozdíl skutečné a naměřené hodnoty nazýváme absolutní chybou měření. Tato chyba má dvě složky – systematickou a náhodnou.

4.1.1 Klasifikace chyb měření

Podle příčin vzniku dělíme chyby do tří skupin.

Systematické chyby jsou způsobeny použitím nevhodné nebo méně vhodné měřicí metody, nepřesným měřidlem či měřicím přístrojem, případně osobou pozorovatele. Tyto chyby zkreslují numerický výsledek měření zcela pravidelným způsobem; buď jej za stejných podmínek vždy zvětšují nebo vždy zmenšují a to bez ohledu na počet opakovaných měření. Často se navenek neprojevují a lze je odhalit až při porovnání s výsledky z jiného přístroje. Existují i systematické chyby s časovým trendem, způsobené stárnutím nebo opotřebováním měřicího přístroje.

Příklady: Při vážení ve vzduchu je v důsledku Archimédova zákona zjištěná hmotnost tělesa vždy menší než skutečná hmotnost pro tělesa, jejichž hustota je menší než hustota závaží. Systematická chyba vznikla zanedbáním vztlaku vzduchu a vhodnou korekcí (korekce na vakuum) ji lze odstranit. Při měření napětí voltmetrem je změřené napětí vždy menší než skutečné, protože voltmetr nemá nekonečně velký vnitřní odpor. Systematická chyba má původ v konstrukci přístroje a lze ji odstranit použitím přístroje s větším vnitřním odporem.
Protože víme z jakých příčin systematické chyby vznikají, můžeme odhadnout jejich velikost i znaménko a vyhodnocením jejich vlivu na výsledek měření je dovedeme odstranit (zavedením vhodné korekce).

Náhodné chyby, které kolísají náhodně co do velikosti i znaménka při opakování měření, vznikají spolupůsobením velkého počtu náhodných vlivů, které nemůžeme předvídat. Náhodné chyby jsou popsány určitým pravděpodobnostním rozdělením.

Systematické chyby ovlivňují správnost, náhodné pak přesnost výsledku.

Hrubé chyby (označované jako vybočující nebo odlehlé hodnoty) jsou způsobeny výjimečnou příčinou, nesprávným zapsáním výsledku, náhlým selháním měřicí aparatury, nesprávným nastavením podmínek pokusu apod. Naměřená hodnota se při opakovaném měření značně liší od ostatních hodnot. Takové měření je třeba ze zpracování vyloučit, aby nezkreslovalo výsledek měření.

4.1.2 Náhodné chyby

Na rozdíl od hrubých a systematických chyb, které můžeme správnou metodou měření, přesnými přístroji a pečlivostí práce odstranit, se náhodné chyby vyskytují zcela zákonitě při každém měření a nemůžeme je ovlivnit. Na okolnostech měření závisí, jak se ke skutečné hodnotě veličiny přiblížíme.

Nekontrolovatelné vlivy, které se při opakování měření mění náhodně a nezávisle na vlivech kontrolovaných, jsou příčinou vzniku náhodné chyby. Výsledkem měření je hodnota veličiny x_i, která se od skutečné hodnoty x_0 liší. Jejich rozdíl je chyba měření ε_i

$$\varepsilon_i = x_i - x_0 \,. \tag{1}$$

Chybu ε_i nemůžeme nikdy stanovit, můžeme ji pouze odhadnout.

Chyba určená jako rozdíl naměřené hodnoty a skutečné hodnoty veličiny se nazývá *absolutní chyba*. Vyjadřujeme ji v jednotkách veličiny. *Relativní chyba,* definována vztahem

$$\varepsilon_{r,i} = \frac{\varepsilon_i}{x_0}, \tag{2}$$

je veličinou bezrozměrnou. Často se udává v %.

Náhodné chyby, které při opakování měření kolísají náhodně co do velikosti i znaménka, vznikají spolupůsobením velkého počtu náhodných vlivů, které nemůžeme předvídat. Náhodné chyby se chovají jako náhodné veličiny a řídí se matematickými zákony počtu pravděpodobnosti. Při velkém počtu opakovaných měření tak statistické zákonitosti můžeme použít k odhadu vlivu náhodných chyb na přesnost měření.

4.1.3 Normální rozdělení [1]

Předpokládejme, že byl korigován vliv systematických chyb.

Vezmeme-li v úvahu četnost, s kterou je daná hodnota naměřena, a vyneseme-li do grafu závislost této četnosti na hodnotě veličiny, zjistíme, že v případě velkého počtu měření $n \to \infty$ (základní soubor) bude křivka hladká a rozdělení naměřených hodnot dokonale symetrické. Skutečná hodnota x_0 odpovídá maximu křivky (obr.1). Toto normální (tzv. Gaussovo) rozdělení vychází z předpokladu, že

a) výsledná chyba každého měření je výsledkem velkého počtu velmi malých, navzájem nezávislých chyb
b) kladné i záporné odchylky od skutečné hodnoty jsou stejně pravděpodobné.

Funkce normálního rozdělení se uvádí nejčastěji ve tvaru

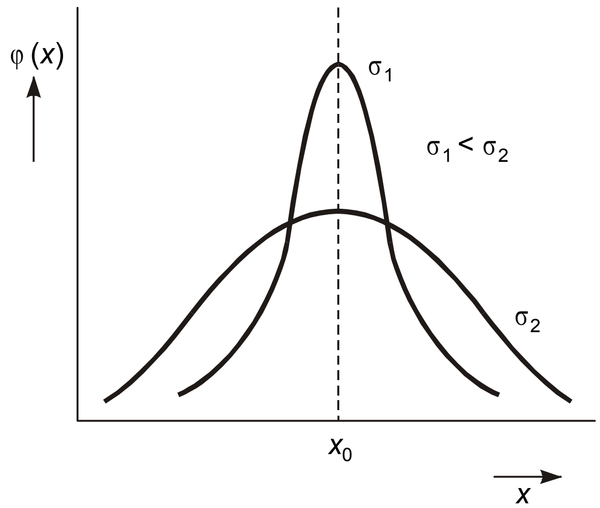
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{3}$$

kde σ^2 - rozptyl,
σ - směrodatná odchylka (průměrná odchylka naměřené hodnoty x od skutečné hodnoty x_0),
x - hodnota některého z nekonečné řady provedených měření,
$\varphi(x)$ - hustota pravděpodobnosti hodnot veličiny x.

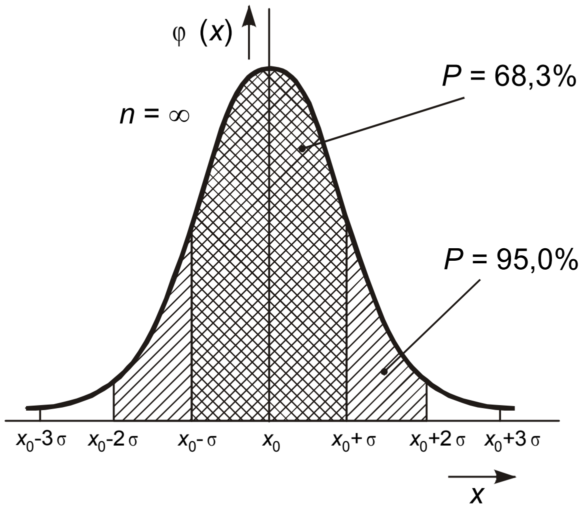
S pomocí funkce $\varphi(x)$ je možné určit pravděpodobnost tak, aby naměřená veličina byla v určitém intervalu (obr. 2). Pokud

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x = 0{,}683, \tag{4}$$

pak pravděpodobnost, že se naměřená hodnota nachází v intervalu $x_0 - \sigma,\ x_0 + \sigma$, je 68,3 %. V intervalu $x_0 \pm 2\sigma$ je to 95 %, mimo interval $x_0 \pm 3\sigma$ bude pouze 3 promile hodnot.



Obr. 1 Gaussovo rozdělení



Obr. 2 Intervaly pravděpodobnosti

U souboru s konečným počtem měření (výběrový soubor) můžeme ale mluvit jen o nejpravděpodobnější hodnotě měřené veličiny, která se skutečné hodnotě bude blížit. Jako nejlepší odhad skutečné hodnoty x_0 použijeme aritmetický průměr $\overline{x}$ z n naměřených hodnot x_1, x_2,….. x_n.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{5}$$

kde n – počet měření,

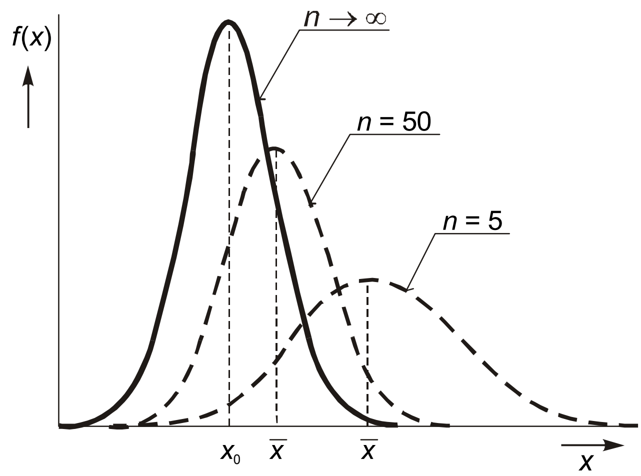
x_i – hodnoty naměřených veličin (i = 1,2,…….n).

Jestliže zvětšujeme počet měření, hodnota aritmetického průměru se přibližuje skutečné hodnotě (obr. 3). Přesto nelze opakovaným měřením dosáhnout libovolně velké přesnosti výsledku.

Mírou rozptylu v základním souboru je směrodatná odchylka σ. Rozptyl hodnot výběrového souboru charakterizuje výběrová směrodatná odchylka s jednoho měření

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}} . \tag{6}$$

S rostoucím počtem n měření se přesnost měření zvyšuje. Proto pro opakovaná měření zavádíme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického (výběrového) průměru $\overline{s}$, která závisí na tom, jak se od sebe liší x_0 a $\overline{x}$ (viz obr.3).



Obr. 3 Vliv počtu měření na hodnotu $\overline{x}$

Plná křivka znázorňuje rozložení hodnot x kolem skutečné hodnoty x_0, zatímco čárkované křivky znázorňují rozložení naměřených hodnot kolem aritmetického průměru. Z obr. 3 vyplývá, že s rostoucím n se hodnota aritmetického průměru přibližuje ke skutečné hodnotě x_0. Výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru vypočteme ze vztahu

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \,. \tag{7}$$

- **Poznámka:**

Provádíme-li výpočty na kalkulačce, je možno vztah pro výpočet směrodatné odchylky $\bar{s}$ upravit na tvar, který je pro výpočet méně pracný:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n(n-1)}} \,.$$

Některé kalkulačky mají zabudovaný program pro výpočet směrodatné odchylky ve tvarech:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \qquad \text{nebo} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}} \,.$$

kde značení s a σ neodpovídají značení v předchozím textu. Některé kalkulačky mají případně místo s a σ značení $\sigma_{n\text{-}1}$ a σ_n.

Pak platí: $$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \,.$$

4.1.4 Systematické chyby

Systematické chyby zkreslují při opakovaném měření za stejných podmínek hodnotu měřené veličiny stále stejným způsobem. Pokud bychom je chtěli vyloučit, museli bychom použít přesnější přístroje nebo zavést korekce. V laboratorním cvičení několikdy nelze tento požadavek splnit. Proto provedeme odhad systematických chyb tak, aby maximální chyba, kterou určíme, byla vždy větší nebo nejvýše rovna chybě, které se při měření dopouštíme. Chyby, které se podílejí na systematické chybě, jsou způsobeny omezenou přesností měřicích přístrojů a zařízení, chybou metody a chybou pozorovatele.

Odhad chyby každého měření samozřejmě závisí na konkrétních podmínkách pokusu a experimentální zkušenosti pozorovatele. Měříme-li např. délku, jejíž velikost se nastavuje splněním některých podmínek pokusu, vyskytne se při měření kromě chyby čtení na stupnici ještě chyba v nastavení, která bývá zpravidla mnohem větší než chyba čtení. Obdobně budou chyby čtení na stupnicích elektrických měřicích přístrojů zanedbatelné vůči chybě, zadané výrobcem prostřednictvím třídy přesnosti. Z tohoto hlediska pozorovatel rovněž musí posoudit, zda jsou chyby čtení na stupnici menší než možné chyby náhodné. Pouze v tomto případě lze totiž měření opakováním a statistickým zpracováním zpřesnit. Naopak, dostáváme-li při opakovaných měřeních stále stejné hodnoty, neznamená to, že měříme přesně skutečnou hodnotu, ale že chyba čtení na stupnici je mnohem větší než chyba náhodná a chybu měření musíme odhadnout.

4.1.4.1 Výrobní údaje

Výrobním údajem o chybě je ***třída přesnosti*** u elektrických měřicích přístrojů a odporových dekád a výrobní tolerance závaží, odporů, kapacit kondenzátorů apod.

U analogových (ručkových) měřicích přístrojů třída přesnosti určuje největší přípustnou chybu, se kterou přístroj měří. Je zadaná v procentech rozsahu celé stupnice a představuje absolutní chybu hodnoty změřené při daném rozsahu. Třída přesnosti 1,5 na stupnici voltmetru s rozsahem 60 V znamená, že každá hodnota změřená na tomto rozsahu je naměřena s absolutní chybou ± 0,9 V (1,5 % ze 60 V).

U digitálních (číslicových) měřicích přístrojů je maximální chyba udávaná výrobcem stanovena ze dvou složek. Jedna je závislá na velikosti měřené hodnoty a je vyjádřena v % měřené hodnoty. Druhá je závislá buď na použitém rozsahu a nebo vyjádřená počtem jednotek (digitů) nejnižšího místa číslicového displeje na zvoleném rozsahu.

Výrobce udává u měřicího přístroje METEX M-3850 pro měření střídavého napětí v rozsahu 400 mV až 400 V největší přípustnou odchylku 0,8 % z měřené hodnoty a 3 jednotky (digity) nejnižšího místa číslicového displeje. Změříme napětí U = 49,7 V. Chyba z procentického údaje je (0,8/100) · 49,7 = 0,3976 V. Údaj tři jednotky nejnižšího místa číslicového displeje znamená chybu 0,3 V. Celková chyba (0,3976 + 0,3) = 0,6976 V = 0,7 V. Relativní chyba naměřené hodnoty 0,7/49,7 = 0,0140, tj. 1,4 %.

Výrobní tolerance je rovněž údaj o chybě. Např. výrobní tolerance sady analytických závaží 10^{-4} znamená, že každé závaží této sady má svoji hodnotu zatíženu relativní chybou 0,01 %.

Údaj na odporu M 1 ± 15 % znamená, že odpor má hodnotu 100 kΩ v mezích tolerance ± 15 kΩ.

Nemáme-li k dispozici údaje o přesnosti měřidla, musíme sami odhadnout maximální chybu naměřené hodnoty.

4.1.4.2 Odhad chyb čtení na stupnici

V přesnosti čtení na stupnici přístroje (měřidla) existují jistá omezení. Čtení na stupnici provádíme tak, abychom získali co nejpřesnější výsledek. Nejčastěji se ukazatel velikosti měřené veličiny na stupnici nekryje přímo s žádným dílkem stupnice, ale leží např. mezi k-tou a (k + 1) - ní dělicí čárkou. Čtená hodnota je větší než k dílků stupnice a menší než (k + 1) dílek. Pro přesnější výsledek velikost čtené hodnoty v desetinách dílku odhadujeme.

Řídíme se přitom následujícími empirickými zásadami:

c) je-li dělení stupnice husté a má-li dělicí čárky (rysky) tlusté (široké), odhadujeme alespoň poloviny dílků,

d) jsou-li dělicí čárky dostatečně tenké proti jejich vzdálenostem, je pravidlem odhadovat desetiny nejmenších dílků stupnice,

e) je-li stupnice opatřena desetinným noniem - pomocnou stupnicí, čteme přesně desetiny dílku hlavní stupnice a odhadujeme poloviny desetin,

f) má-li pomocná stupnice n-tinové dělení (n > 10), čteme přesně n-tiny dílku hlavní stupnice a odhadujeme poloviny n-tin.

Čtením na stupnici získáme číselný údaj o hodnotě měřené veličiny s daným počtem platných cifer. Poslední platná cifra je neurčitá, získaná odhadem desetin dílku, a je tedy již zatížena chybou měření.

Při odhadu velikosti chyby čtení vycházíme z uvedených empirických pravidel pro čtení na stupnici:

g) odhadujeme-li při čtení polovinu dílku základní stupnice, je přiměřený odhad chyby 0,5 dílku,

h) odhadujeme-li při čtení desetiny dílku, přiměřený odhad chyby činí 0,1 až 0,2 dílku,

i) má-li stupnice pomocnou stupnici (nonius), je pravidlem odhadovat chybu na polovinu zlomku (n-tiny) dílku, který přečteme přesně.

Příklady odhadu chyb pro některá měřidla jsou uvedeny v tabulce č. 1.

Tabulka č. 1 Chyby nejběžnějších měřidel

Měřidlo	Velikost jednoho dílku	Počet dílků pomocné stupnice	Přesnost čtení	Příklad	Odhad chyb
skládací metr	1 mm		1 mm	843 mm	± 1 mm
ocelové měřítko	1 mm		0,1 mm	174,6 mm	± 0,2 mm
posuvné měřítko	1 mm	10	0,05 mm	83,85 mm	± 0,05 mm
mikrometr	0,5 mm	50	0,005 mm	12,115 mm	± 0,005 mm
stopky	0,1 s	-	0,1 s	36,9 s	± 0,2 s
teploměr	0,2 °C	-	0,1 °C	21,7 °C	± 0,1 °C
stupnice anal. vah	1 d	-	0,5 d	9,5 d	± 0,5 d
obchodní váhy	5 g	-	2,5 g	325 g	± 3 g

4.2 NEJISTOTY MĚŘENÍ

Na základě nového přístupu k hodnocení přesnosti měření se základem pro hodnocení výsledků měření staly nejistoty měření*.

Nejistota měření je parametr přiřazený k výsledku měření, udávající interval hodnot měřené veličiny kolem výsledku měření, který obsahuje skutečnou hodnotu x_0 měřené veličiny.

Nejistota měření zahrnuje obecně mnoho složek. Některé z nich lze vyhodnotit na základě statistického rozložení výsledků série měření a charakterizovat výběrovou směrodatnou odchylkou. Nejistota se však nevztahuje pouze k výsledkům měření, ale také na měřidla, použité konstanty, korekce atd.

Nejistoty jsou určovány na základě statistického přístupu. Předpokládá se určité rozdělení pravděpodobnosti, které popisuje, jak se může naměřená hodnota měřené veličiny lišit od skutečné hodnoty. Z tohoto rozdělení pravděpodobnosti můžeme určit pravděpodobnost, s jakou se v intervalu daném nejistotou skutečná hodnota může nacházet.

Mírou nejistoty je směrodatná odchylka udávané hodnoty (odhadu skutečné hodnoty). Takto vyjádřená nejistota se označuje jako standardní nejistota u a udává rozsah hodnot $\langle -u,\ +u \rangle$ okolo naměřené (stanovené) hodnoty, ve kterém se s danou pravděpodobností nachází skutečná hodnota (např. pro normální rozdělení je tato pravděpodobnost rovna 68,3 %).

Standardní nejistoty se podle zdrojů, z kterých vznikají, dělí na standardní nejistoty typu A a standardní nejistoty typu B.

Standardní nejistoty typu A (u_A) jsou způsobovány náhodnými vlivy, jejichž příčiny nejsou známy. Stanovují se z opakovaných měření určité hodnoty dané veličiny za stále stejných podmínek na základě statistického přístupu. Charakteristické pro nejistotu typu A je, že se její hodnota zmenšuje se zvětšujícím se počtem opakovaných měření.

Standardní nejistoty typu B (u_B) vznikají ze známých a odhadnutelných příčin. Mohou pocházet z různých zdrojů. Jejich určení vychází z odhadu systematických chyb naměřených hodnot. Standardní nejistota typu B je dána odmocninou ze součtu kvadrátů nejistot od

* Termín nejistota byl zaveden po dohodě mezinárodních organizací. Podnět k novému přístupu hodnocení přesnosti měření vzešel roku 1978 z Comité International des Poids et Mesures (CIPM). Technický předpis metrologický TPM 0051-93 obsahuje zásady, metody a postupy pro stanovení nejistot při vyhodnocování měření ve výzkumu a technické praxi. Tento předpis respektuje doporučení přijatá na 70. a 75. zasedání CIPM a je konformní s dokumentem WECC "Guidelines for the Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration".

jednotlivých zdrojů. Hodnoty standardní nejistoty typu B nezávisí na počtu opakovaných měření.

Shodný přístup k stanovení nejistot typu A i B umožňuje sloučit všechny standardní nejistoty (tj. typu A a B) do jediné hodnoty. Sumací kvadrátů standardních nejistot typů A a B se dostane kvadrát **kombinované standardní nejistoty *u***, která je dána vztahem

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}\ . \tag{8}$$

V laboratoři fyziky budete výsledek měření nejčastěji udávat s touto standardní nejistotou u.V praxi se doporučuje udávat nejistoty intervalem, u kterého je jen malá pravděpodobnost, že bude překročen. Proto se zavádí **rozšířená standardní nejistota *U***, která je dána vztahem

$$U = k_u\, u, \tag{9}$$

kde k_u je koeficient rozšíření (koeficient pokrytí). Konvenční hodnota k_u se obvykle volí 2. Při $k_u = 2$ je $U = 2\ u$, což při normálním rozdělení pravděpodobnosti znamená, že skutečná hodnota leží s pravděpodobností 95 % v intervalu, vymezeném rozšířenou nejistotou.*

4.2.1 Model měření

Z teoretického hlediska lze stanovení hodnoty měřené veličiny vyjádřit modelem měření. Model měření vyjadřuje závislost výstupní veličiny Y (výsledek měření) na vstupních veličinách ($X_1, X_2, \ldots X_n$). Obecně lze pro výslednou veličinu Y psát

$$Y = \mathrm{f}\,(X_1, X_2, \ldots X_n). \tag{10}$$

Vztah popisující měření a představující model měření má být co nejobecnější a má umožňovat zahrnout všechny vlivy projevující se na výsledku měření, tedy i pracovní prostředí, v kterém měření probíhá a znalosti a zkušenosti experimentátora.

4.2.2 Standardní nejistota typu A

Standardní nejistota typu A je rovna výběrové směrodatné odchylce $\bar{s}$ aritmetického průměru

$$u_A = \bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}\ . \tag{11}$$

Pokud je počet opakovaných měření menší než 10 a není možné učinit kvalifikovaný odhad na základě zkušeností, lze standardní nejistotu typu A přibližně stanovit[2] ze vztahu

$$u_A = k_s\,\bar{s}\ , \tag{12}$$

kde k_s je koeficient, jehož velikost závisí na počtu měření (viz tab.č. 2).

Tabulka č. 2 Velikost koeficientu k_s v závislosti na počtu měření

n	9	8	7	6	5	4	3	2
k_s	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7,0

Z tabulky vyplývá, že zmenšování počtu měření vede k neúměrnému zvyšování nejistoty. Při počtu měření menším než 5 tak mají naměřené hodnoty pouze informativní charakter.

* Rozšířenou nejistotu aplikujeme pouze na nejistotu výsledku měření.(ne na průběžné výpočty).

4.2.3 Standardní nejistota typu B

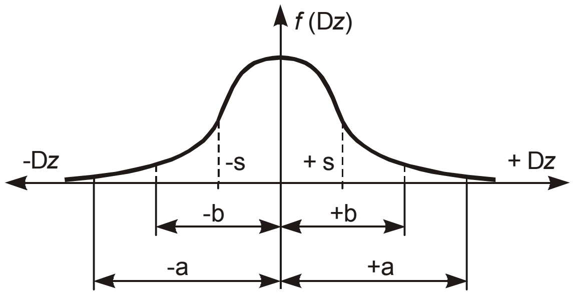
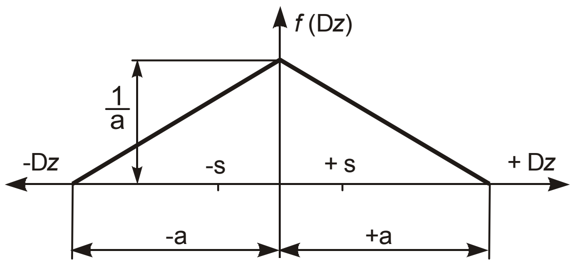
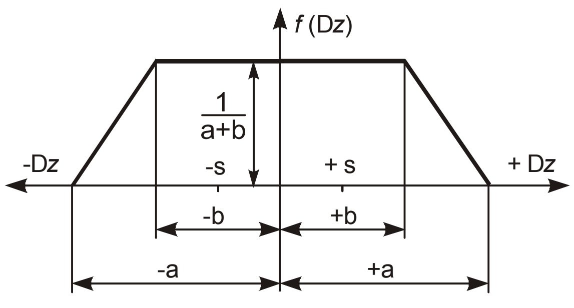
Zdroji standardních nejistot typu B (u_B) při měření jsou známé a odhadnutelné příčiny. Jsou jimi nedokonalosti způsobené použitými měřicími přístroji a měřicí technikou, použitými měřicími metodami, použitými konstantami, podmínkami, za kterých měření probíhá, nedostatečnými teoretickými znalostmi nebo nedostatečnými praktickými zkušenostmi.

Korelace mezi jednotlivými zdroji nejistot typu B při našich výpočtech nebudeme brát v úvahu.

Při odhadu standardní nejistoty typu B u_{Bz} ze zdroje Z nejprve odhadneme maximální rozsah odchylek (změn) $\pm \Delta z_{max}$ od hodnoty veličiny příslušející zdroji tak, aby překročení Δz_{max} bylo málo pravděpodobné (např. z výrobních údajů či z chyby čtení na stupnici). V tabulce 3 vybereme rozdělení pravděpodobnosti, které nejlépe vystihuje výskyt hodnot Δz v intervalu $\pm \Delta z_{max}$.

- **Poznámka:**

Volba rozdělení pravděpodobnosti odchylek Δz vychází z teoretických znalostí, zkušeností nebo jinak získaných poznatků o rozdělení velikostí Δz. Pokud pravděpodobnost odchylek s jejich rostoucí hodnotou klesá a největší pravděpodobnost mají odchylky malé, je vhodnou aproximací Gaussovo nebo trojúhelníkové (Simpsonovo) rozdělení. V opačném případě použijeme některé rozdělení bimodální. Rovnoměrné rozdělení použijeme v případě, kdy pravděpodobnost malých i velkých odchylek v intervalu $\langle -\Delta z_{max}, +\Delta z_{max} \rangle$ je přibližně stejná.

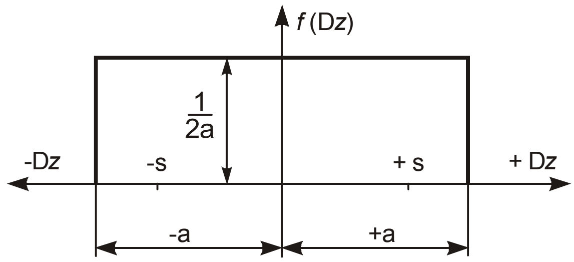
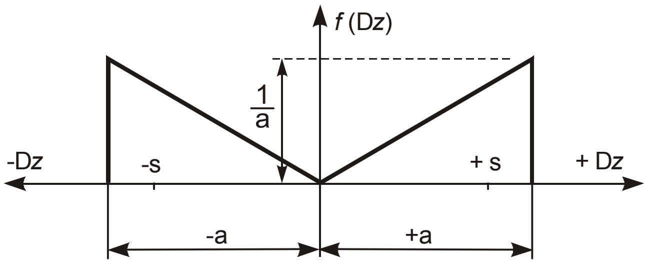
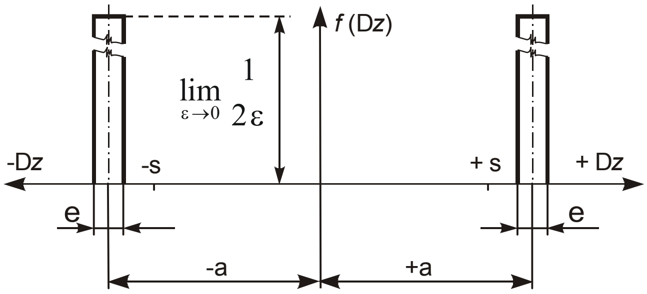
<table>
<tr><th>Rozdělení</th><th>z_{max}</th><th>Q</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Normální - Gaussovo
</td><td>a</td><td>3</td></tr>
<tr><td>b</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Trojúhelníkové-Simpsonovo
</td><td>a</td><td>$\sqrt{6}$
~ 2,45</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Lichoběžníkové
</td><td>a
při $b=\frac{a}{3}$</td><td>~ 2,32</td></tr>
<tr><td>a
při $b=\frac{a}{2}$</td><td>~ 2,19</td></tr>
<tr><td>a
při $b=\frac{2a}{3}$</td><td>~ 2,04</td></tr>
</table>

Pokud nelze odpovědně rozhodnout o rozložení pravděpodobnosti odchylek a lze-li vyjít z předpokladu, že všechny hodnoty Δz v intervalu $\langle -\Delta z_{max}, +\Delta z_{max} \rangle$ se mohou vyskytovat se stejnou pravděpodobností, pak se volí rovnoměrné rozdělení. Tento případ je nejjednodušší, a proto i když přináší největší nejistoty, se používá nejčastěji.

Nejistoty typu B jednotlivých zdrojů Z_j se určí ze vztahu

$$u_{Bz_j} = \frac{\Delta z_{j\,\max}}{\Theta} \tag{13}$$

kde parametr Θ se odečte z tabulky 3 pro zvolené rozdělení pravděpodobnosti.

Rozdělení	z_{max}	Q
Rovnoměrné - pravoúhlé 	a	$\sqrt{3}$ ~ 1,73
Bimodální (trojúhelníkové) 	a	$\sqrt{2}$ ~ 1,41
Bimodální (Diracovo) 	a	1

Odhadnuté nejistoty jednotlivých zdrojů Z_j se promítají přes funkční závislost $X = f(Z_1, \ldots Z_j, \ldots Z_m)$ do nejistoty hodnoty měřené veličiny X a tvoří její složky $u_{x,zj}$, které se vypočtou ze vztahu

$$u_{x,zj} = A_{x,zj} u_{z,j} \tag{14}$$

kde je u_{zj} standardní nejistota odhadu vlivu zdroje Z_j a

$$A_{x,zj} = \frac{\partial X}{\partial Z_j}$$

koeficient citlivosti.

Protože při přímém měření jedné veličiny lze předpokládat, že korelace mezi jednotlivými zdroji nejistot typu B jsou zpravidla zanedbatelné a u ostatních měření jsme řekli, že je nebudeme uvažovat, lze výslednou nejistotu typu B stanovit podle Gaussova zákona rozdělení nejistot z výrazu

$$u_{Bx} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_{x,z_j}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} A_{x,z_j}^2 \; u_{z_j}^2} \; . \tag{15}$$

4.3 POSTUPY URČOVÁNÍ STANDARDNÍCH NEJISTOT

Postup při stanovení standardních a rozšířených nejistot se liší podle toho, zda se jedná o přímé či nepřímé měření veličiny.

4.3.1 Přímé měření jedné veličiny

Při opakovaném měření veličiny X získáme sérii n hodnot $x_1, \ldots x_n$. Výsledkem měření je aritmetický průměr $\bar{x}$ daný vztahem (5). Standardní nejistota typu A je rovna výběrové směrodatné odchylce aritmetického průměru

$$u_A = \bar{s}_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}\,.$$

Měříme-li méně než 10 hodnot, dosadíme do vztahu (12) pro výpočet u_A koeficient k_s z tabulky č. 2.

Standardní nejistoty typu B určíme na základě vztahů (13) až (15), kombinovanou nejistotu podle vztahu (8) a rozšířenou nejistotu dle vztahu (9).

4.3.2 Nepřímé měření veličin

Často nelze hledanou fyzikální veličinu měřit přímo a musíme ji získat z více přímo měřených veličin na základě odpovídajících závislostí. Předpokládejme nyní, že hledaná veličina W je funkcí několika přímo měřených veličin a konstant:

$$w = f(x, y, z, V_1, V_2, V_3), \tag{16}$$

kde X, Y a Z jsou přímo měřené veličiny a V_1, V_2, V_3 jsou konstanty.

- **Poznámka**

Funkce W obecně zahrnuje i konstanty. V laboratoři fyziky však budete všechny použité konstanty považovat za přesné, takže se do funkční závislosti nepromítnou.

V případě, že měřené veličiny X, Y, Z budou stanoveny z většího počtu naměřených hodnot, střední hodnotu hledané veličiny $\bar{W}$ získáte, když hodnoty měřených veličin, získané ze vztahu (5), dosadíte do funkce

$$\bar{W} = f\left(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\right). \tag{17}$$

Pokud jsou měřené veličiny X,Y a Z vzájemně nezávislé, může být výběrová směrodatná odchylka s_W vypočtena ze vztahu

$$s_W = \sqrt{s_X^2\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} + s_Y^2\left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)^2_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} + s_Z^2\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)^2_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}}\,, \tag{18}$$

kde výrazy v závorkách jsou parciální derivace funkce W, odpovídající koeficientům citlivosti ve vztazích (14) a (15).

Analogicky k rovnici (18) platí pro výpočet nejistoty měření u_W

$$u_W = \sqrt{u_X^2\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} + u_Y^2\left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)^2_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}} + u_Z^2\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)^2_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}}\,. \tag{19}$$

V případě, že některá z veličin X, Y, Z byla změřena pouze jednou, místo střední hodnoty dané veličiny dosazujte ve vztazích (17) až (19) tuto hodnotu.

4.3.3 Stanovení standardních nejistot pro speciální případy nepřímých měření

Je-li souvislost mezi hledanou veličinou W a přímo měřenými veličinami dána jednoduchou funkcí (součet, rozdíl, součin, podíl, mocnina), vedou parciální derivace podle Gaussova zákona rozdělení chyb zase na jednoduchou funkci, takže obdržíme jednoduché výrazy pro nejistoty u_W.

$W = \mathrm{a}\,X \qquad u_W = \sqrt{\mathrm{a}^2 u_X^2} = \mathrm{a}\,u_X$

$W = X \pm Y \qquad u_W = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2 u_X^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)^2 u_Y^2} = \sqrt{u_X^2 + u_Y^2}$

$W = X^{\mathrm{k}} \qquad u_W = \sqrt{\mathrm{k}^2 \left(X^{\mathrm{k}-1}\right)^2 u_X^2}$ kde úpravou a rozšířením zlomkem $\frac{X}{X}$ dostaneme

$u_W = X^{\mathrm{k}}\mathrm{k}\frac{u_X}{X}$. Jestliže po úpravě $\frac{u_W}{X^{\mathrm{k}}} = \mathrm{k}\frac{u_X}{X}$ nazveme zlomky relativní nejistotou dané veličiny, můžeme zjednodušeně psát $u_{r,W} = k\,u_{r,X}$.

$W = X^{\mathrm{a}}Y^{\mathrm{b}} \qquad u_W = W\sqrt{\mathrm{a}^2\left(\frac{u_X}{X}\right)^2 + \mathrm{b}^2\left(\frac{u_Y}{Y}\right)^2}$ nebo $u_{r,W} = \sqrt{\mathrm{a}^2 u_{r,X}^2 + \mathrm{b}^2 u_{r,Y}^2}$

Obdobně dojdeme k výrazu pro nejistoty součinu a podílu.

$W = XY \qquad u_W = \sqrt{Y^2 u_X^2 + X^2 u_Y^2} = XY\sqrt{\left(\frac{u_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{u_Y}{Y}\right)^2}$

$W = X/Y \qquad u_W = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2 u_X^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)^2 u_Y^2} = \frac{X}{Y}\sqrt{\left(\frac{u_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{u_Y}{Y}\right)^2}$

Pokud použijeme relativní nejistotu, dostáváme pro součin i podíl identický výraz $u_{r,W} = \sqrt{u_{r,X}^2 + u_{r,Y}^2}$.

Standardní nejistotu můžeme vyjádřit v jednotkách měřené veličiny, pak pro ni budeme používat název absolutní standardní nejistota, nebo poměrem absolutní standardní nejistoty a hodnoty příslušné veličiny, a pak ji budeme nazývat relativní standardní nejistotou.

4.4 VÝSLEDEK MĚŘENÍ

Výslednou hodnotu veličiny W zapíšeme ve tvaru

$W = \left(\overline{w} \pm u_W\right) \cdot$ jednotka.

Nejistotu měření u budeme zaokrouhlovat vždy na jedno platné místo. Výjimkou budou číselné hodnoty, mající na začátku jedničku nebo dvojku, ty budeme zaokrouhlovat na dvě místa (relativní chyba zaokrouhlení). Počet cifer aritmetického průměru omezíme tak, aby řád jeho poslední platné cifry byl stejný jako řád poslední číslice nejistoty.

4.5 ZPRACOVÁNÍ NAMĚŘENÝCH HODNOT - PRAKTICKÉ POKYNY

Při měření pečlivě zapisujte naměřené hodnoty, abyste se zbytečně nedopustili hrubých chyb. Sledujte přitom, zda-li se jednotlivé hodnoty měření od sebe neliší více, než očekáváte. Zjistíte-li nepřiměřené odchylky, zkontrolujte podmínky pokusu.

Zapisujte údaje na tolik míst, kolik můžete odečíst ze stupnice (ne víc, ne méně). Naměřené hodnoty jsou neúplná čísla!

Měříte-li jednou, odhadněte nejistotu měření.

Měříte-li vícekrát tutéž veličinu za stejných podmínek, vypočítejte z naměřených hodnot aritmetický průměr a standardní nejistotu typu A (u_A) podle vztahů (5) a (11), případně

(12). V případě, že stanovujete i nejistotu typu B (u_B), bude měřená veličina zapsána s údajem kombinované nejistoty u (8). Je-li požadována vyšší přesnost, uveďte rozšířenou nejistotu U (9).

Nejistotu měření zaokrouhlete na jednu platnou cifru vždy směrem nahoru (např. 0,0327 na 0,04). Výjimka platí pouze pro případ, kdy nejistota začíná číslicí 1 nebo 2 (viz bod 4.4). Výsledek měření uvádějte na tolik míst, aby nejistota opravovala poslední platnou cifru výsledku. Výsledek zapište ve tvaru

$W = \left(\overline{w} \pm u_W\right) \cdot$ jednotka.

4.6 PŘÍKLADY A PRAVIDLA

1. **Správný zápis** neúplného čísla s nejistotou je

   d = (17,873 ± 0,003) mm.

2. **Nesprávné** jsou následující zápisy:

   f = (11,43 ± 0,728) cm;
   R = (252,7 ± 6) Ω;
   J = (0,01410 ± 0,0002145) kg m^2;
   C = (1,2 ± 0,05) μF.

   V prvním údaji je potřeba obě čísla zaokrouhlit na desetiny (nejistotu směrem nahoru).

   Správný zápis: f = (11,4 ± 0,8) cm.

   V druhém údaji je výsledek zbytečně přesný, nejistota opravuje jednotky.

   Správný zápis: R = (253 ± 6) Ω.

   Ve třetím údaji je nesprávně uvedena nejistota.

   Správný zápis: J = (0,01410 ± 0,00022) kg m^2 (údaj nejistoty začíná číslicí 2, proto uvádíme údaj na dvě desetinná místa).

   Ve čtvrtém údaji je naopak potřeba dopočítat výsledek v setinách, protože nejistota opravuje až druhé místo za desetinnou čárkou.
   Správný zápis: C = (1,20 ± 0,05) μF.

3. Nula je platnou cifrou, je-li uprostřed čísla a může být platnou cifrou na konci neúplného čísla. Při udávání velkých čísel nemusí být nuly na konci čísla platnými ciframi, např. v zápisu U = 14000 V jsou platné pouze první tři cifry. Údaj musíme zapsat tak, že buď zvětšíme jednotku (jde-li to: U = 14,0 kV) nebo číslo zapíšeme ve tvaru mocniny deseti ($U = 1{,}40 \cdot 10^4$ V), přičemž počet platných cifer musíme zachovat.

4. Jsou-li platné cifry vzdáleny od desetinné čárky, zapisujeme čísla v semilogaritmickém tvaru (číslo z intervalu (1 - 10) krát mocnina deseti). Zápisy

   $c = (2{,}99792 \pm 0{,}00001) \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,
   $e = (1{,}602 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-19}$ C,

   jsou správné a přehledné. Třetí údaj příkladu 2. budeme proto psát ve tvaru

   $J = (1{,}410 \pm 0{,}022) \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg\ m^2}$;

   obdobně čtvrtý údaj můžeme správně zapsat jako

   $C = (1{,}20 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-6}$ F.

5. Při počítání s neúplnými čísly zaokrouhlete výsledek na takový počet platných cifer, aby byl v souladu s přesností výchozích čísel:

a) Při sčítání a odčítání se výsledek zaokrouhluje na poslední platné místo toho řádu, který je u všech sčítanců platný.

Př.: 17,1 + 0,24 - 0,178 + 0,092 = 17,245 = 17,2.

b) Při násobení a dělení se výsledek zaokrouhluje na tolik platných cifer, kolik jich má číslo s nejmenším počtem platných cifer.

Př.: 24,152 x 3,46 = 83,56592 = 83,6;

1,29 : 0,9814 = 1,3144 ... = 1,31;

$(4{,}85)^3 = 114{,}084125 = 114$.

c) Konstanty (π, e, $\sqrt{2}$) uvádíme při výpočtu s neúplnými čísly tak, že uvedeme o jednu platnou cifru více než má číslo s nejmenším počtem platných cifer.

Př. : $\pi \cdot 0{,}9210 \cdot 17{,}249 = 3{,}1416 \cdot 0{,}9210 \cdot 17{,}249 = 49{,}908$,

$\sqrt{2} : 0{,}0180 = 1{,}414 : 0{,}0180 = 78{,}567$.

4.7 PŘÍKLAD ZPRACOVÁNÍ OPAKOVANÝCH MĚŘENÍ

Příklad 1

Úkol: Změřit výšku válečku posuvným měřítkem a průměr válečku mikrometrem.

Posuvným měřítkem měříme přesně desetiny mm a odhadujeme poloviny desetin (0,05 mm). Změřený údaj musí být zapsán s poslední platnou cifrou v setinách mm. Přesnost čtení na pomocné stupnici mikrometru je 0,5 dílku = 0,005 mm a přečtený údaj musí být zapsán s poslední platnou cifrou udávající tisíciny mm.

A. Příklad výpočtu standardní nejistoty přímo měřené veličiny

Tabulka naměřených hodnot

číslo měření	$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{(\Delta d)}{10^{-3}\,\text{mm}}$	$\frac{(\Delta d)^2}{10^{-6}\,\text{mm}^2}$
1	5,020	10,005	+ 1,5	2,25
2	5,020	10,010	+ 6,5	42,25
3	5,020	10,020	+ 16,5	272,25
4	5,020	9,995	- 8,5	72,25
5	5,020	9,990	- 13,5	182,25
6	5,020	10,000	- 3,5	12,25
7	5,020	10,010	+ 6,5	42,25
8	5,020	9,980	- 23,5	552,25
9	5,020	10,005	+ 1,5	2,25
10	5,020	10,020	+ 16,5	272,25

$\bar{h} = 5{,}020$ cm $\qquad \bar{d} = 10{,}0035$ mm $\qquad \sum(\Delta d)^2 = 1452{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{mm}^2$

Měření průměruválečku

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{n} = 10{,}0035 \text{ mm}.$$

Protože směrodatná odchylka výběrového průměru je rovna standardní nejistotě typu A, platí

$$u_{A\bar{d}} = s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum(\Delta d)^2}{10\cdot 9}} = \sqrt{\frac{1452{,}5\cdot 10^{-6}}{90}} = 0{,}00402 \text{ mm}.$$

Nejistota typu B je dána vztahem

$$u_B = \frac{\Delta z_{\max}}{\Theta},$$

kde $\Delta z_{\max}$ - maximální odchylka, jejíž překročení je málo pravděpodobné,

Θ - parametr, jehož hodnotu pro zvolené rovnoměrné rozdělení bereme z tabulky 3.

Předpokládáme-li chybu čtení na stupnici mikrometru $\Delta z_{\max} = 0{,}005$ mm a bereme-li v úvahu rovnoměrné rozdělení ($\Theta = \sqrt{3}$), pak

$$u_{Bd} = 0{,}005/\sqrt{3} = 0{,}00288675 \text{ mm}.$$

Kombinovaná standardní nejistota u_d bude

$$u_d = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0{,}00402^2 + 0{,}00288675^2} = 4{,}949\cdot 10^{-3} \text{ mm}.$$

Velikost průměru válečku *d* zapíšeme po zaokrouhlení

d = (10,004 ± 0,005) mm.

Při opakovaném měření výšky válečku posuvným měřítkem jsme obdrželi pokaždé stejnou hodnotu:

$$\bar{h} = 5{,}020 \text{ cm}.$$

Není to způsobeno tím, že bychom tak přesně měřili, ale tím, že náhodné odchylky jsou menší než odchylky vzniklé čtením na stupnici posuvného měřítka. Nemůžeme proto počítat standardní nejistotu typu A. Z odchylky přesnosti čtení posuvným měřítkem ($\Delta z_{\max} = 0{,}05$ mm) určíme nejistotu typu B. Opět předpokládáme rovnoměrné rozdělení ($\Theta = \sqrt{3}$):

$$u_{Bh} = 0{,}05/\sqrt{3} = 0{,}028867 \text{ mm}.$$

Výšku válečku zapíšeme ve tvaru

h = (50,20 ± 0,03) mm   nebo   **h = (5,020 ± 0,003) cm**.

B. Příklad výpočtu standardní nejistoty pro nepřímé měření

Úkol: Určit objem válečku z předchozího příkladu.

Objem válečku spočítáme ze vztahu:

$$V = \frac{1}{4}\pi d^2 h,$$

$$\bar{V} = \frac{1}{4}\pi\left(\bar{d}\right)^2 \bar{h} = \frac{1}{4}\pi\left(1{,}00035\right)^2\cdot 5{,}020 = 3{,}94546 \text{ cm}^3.$$

Nejistotu měření objemu válečku spočítáme podle vztahu

$$u_V = \overline{V}\sqrt{a^2\left(\frac{u_d}{\overline{d}}\right)^2 + b^2\left(\frac{u_h}{\overline{h}}\right)^2},$$

kde za u_d dosadíme kombinovanou nejistotu průměru válečku, za u_h dosadíme nejistotu u_{Bh} výšky válečku, konstanty jsou rovny $a = 2$, $b = 1$. Potom:

$$u_V = \overline{V}\sqrt{2^2\left(\frac{0,004949}{10,0035}\right)^2 + 1^2\left(\frac{0,028867}{50,2}\right)^2} = 3945,46 \cdot 1,1444 \cdot 10^{-3} = 4,515\ \mathrm{mm}^3.$$

Výsledek měření $V = (3945,46 \pm 4,515)\ \mathrm{mm}^3$ zapíšeme po úpravě a zaokrouhlení ve tvaru:

$V = (3,946 \pm 0,005)\ \mathrm{cm}^3$.

Příklad 2

Úkol: Na základě měření napětí a proudu určit velikost odporu.

V tabulce jsou vedeny naměřené hodnoty *U, I* a vypočtené hodnoty odporů.

Tabulka naměřených hodnot

číslo měření	U	I	R	ΔI	$(\Delta I)^2 \cdot 10^{-4}$
	V	mA	Ω	mA	mA^2
1	1,1	11,46	95,98	-0,016	2,56
2	1,1	11,45	96,07	-0,026	6,76
3	1,1	11,48	95,82	0,004	0,16
4	1,1	11,50	95,65	0,024	5,76
5	1,1	11,49	95,74	0,014	1,96

$\overline{U} = 1,1\ \mathrm{V}$ $\quad \overline{I} = 11,476\ \mathrm{mA}$ $\quad \overline{R} = 95,852\ \Omega$ $\quad \sum(\Delta I)^2 = 17,2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{mA}^2$

Nejprve spočítáme nejistoty každé přímo měřené veličiny. Z naměřených hodnot v tabulce vyplývá, že standardní nejistotu typu A můžeme určit pouze pro hodnoty proudu. Protože se jedná o přímo měřenou veličinu, bude nejistota typu A dána vztahem

$$u_{A,I} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(\Delta I)^2}{5 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{17,2 \cdot 10^{-4}}{20}} = \sqrt{0,86 \cdot 10^{-4}} = 0,927 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mA} = 0,927 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A}.$$

Protože počet měření je menší než 10, použijeme vztah (12) a dostaneme pro $k_s = 1,4$:

$u_{A,I} = 1,4 \cdot 0,927 \cdot 10^{-5} = 1,2978 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A}$,

$u_{A,I}^2 = 1,6843 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{A}^2$.

U analogového ampérmetru třídy přesnosti 1 jsme použili rozsah 12 mA. Znamená to tedy, že hodnoty proudu jsme naměřili s chybou $\pm 0,12$ mA ($0,12 \cdot 10^{-3}$ A). Parametr Θ volíme z tabulky 3 pro rovnoměrné rozdělení. Nejistotu typu B spočteme ze vztahu

$$u_{B,I} = \frac{0,12 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 0,06928 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A},$$

$$u_{B,I}^2 = 47,997 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{A}^2.$$

Pro výslednou kombinovanou nejistotu proudu platí

$$u_I = \sqrt{u_{A,I}^2 + u_{B,I}^2} = \sqrt{(1{,}684 + 47{,}997)^{-10}} = 7{,}0485 \cdot 10^{-5}\,\text{A}.$$

V uvedeném vztahu je možné zanedbat nejistotu $u_{A,I}$, protože je mnohem menší než nejistota $u_{B,I}$.

Hodnotu proudu po zaokrouhlení zapíšeme ve tvaru

***I* = (11,48 ± 0,07) ·10^{-3} A**.

Voltmetr má třídu přesnosti 1, zvolený rozsah je 1,2 V. Znamená to tedy, že napěťové hodnoty jsme naměřili s chybou ± 0,012 V. Parametr Θ volíme jako u ampérmetru pro rovnoměrné rozdělení. Nejistotu typu B spočteme ze vztahu

$$u_{B,U} = \frac{\Delta z_{\max}}{\Theta} = \frac{0{,}012}{\sqrt{3}} = 6{,}928 \cdot 10^{-3}\ \text{V}.$$

Výslednou hodnotu napětí zapíšeme ve tvaru

***U* = (1,100 ± 0,007) V**.

Neznámý odpor spočítáme z Ohmova zákona ze vztahu $R = U/I$. Jedná se tedy o nepřímé měření a proto musíme při výpočtu celkové nejistoty vzít v úvahu koeficient citlivosti $A_{x,zj}$ (viz (14)), který je definován derivací $A_{x,zj} = \left(\frac{\partial X}{\partial Z_j}\right)$, takže v našem případě dostáváme pro napětí a proud koeficienty citlivosti A_U a A_I

$$A_U = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial U} = \frac{1}{I} \qquad A_I = \frac{\partial\left(\frac{U}{I}\right)}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}.$$

Výsledná nejistota je dána pouze příspěvky nejistot typu B a určí se ze vztahu:

$$u_{B,R}^2 = \sum_{j=1}^{m} A_{xj}^2 u_{Bxj}^2 = \left(\frac{1}{I}\right)^2 u_{B,U}^2 + \left(-\frac{U}{I^2}\right)^2 u_{B,I}^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{11{,}476 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \left(6{,}928 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(-\frac{1{,}100}{\left(11{,}476 \cdot 10^{-3}\right)^2}\right)^2 \cdot \left(6{,}928 \cdot 10^{-5}\right)^2 =$$

$$= 0{,}36445 + 0{,}33484 = 0{,}69929\ \Omega^2$$

$$u_{B,R} = 0{,}8362\ \Omega\,.$$

Hodnotu odporu R = (95,852 ± 0,8362) Ω zaokrouhlíme a zapíšeme ve tvaru

***R* = (95,9 ± 0,9) Ω**.

Nejistotu odporu R můžeme spočítat i jednodušším způsobem. Použijeme vztah (viz článek 4.3.3) pro veličinu danou podílem přímo měřených veličin.

$$u_R = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \sqrt{\left(\frac{u_I}{\bar{I}}\right)^2 + \left(\frac{u_U}{\bar{U}}\right)^2} = \frac{1{,}100}{11{,}476 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\left(\frac{7{,}0485 \cdot 10^{-5}}{11{,}476 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{6{,}928 \cdot 10^{-3}}{1{,}100}\right)^2} =$$

$$= 95{,}8522 \cdot 0{,}8798 \cdot 10^{-2} = 0{,}8424\,\Omega$$

Naměřenou hodnotu odporu zapíšeme ve tvaru

***R* = (95,9 ± 0,9) Ω**.

Pokud chceme výsledek uvést s rozšířenou nejistotou U_R, pak na základě vztahu (9) platí

$U_R = 2\, u_R = 2 \cdot 0{,}8424 = 1{,}6848\ \Omega$,

a výsledek zapíšeme ve tvaru

$\underline{\boldsymbol{R} = \mathbf{(95{,}9 \pm 1{,}7)}\ \Omega}$.

Literatura

1. Meloun M., Militký J.: Statistické zpracování experimentálních dat, East Publishing Praha, 1998
2. Vítovec J.: Stanovení nejistot měření, ČMÚ Praha
3. ČSN IEC 484
4. Technický předpis metrologický TPM 0051-93, Stanovenie neistôt při meraniach, 1. a 2. diel, ČSMÚ, Bratislava 1993