(1) $\frac{1}{x}\cdot y' = \frac{1}{x^2+1}$ $\qquad x \neq 0$

$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{x^2+1} \quad | \cdot x$

separace proměnných

$dy = \frac{x}{x^2+1}\,dx \quad | \int$

$\int dy = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$u(x) = y = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$ $\qquad$ zkouškou ověříme

řešení

---

(2) $y' = \cos^2 x$

$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x$ $\qquad$ separace proměnných

$dy = \cos^2 x\,dx \quad | \int$

vzorec

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$

$\int dy = \int \cos^2 x\,dx$

$u(x) = y = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right] + C \leftarrow$

řešení

---

(3) Cauchyho úloha = DR + počáteční podmínka

$y' = 2(\sqrt{y})\ln x \quad |$ při $u(e) = y(e) = 1$

(hodnota f-ce y v bodě $x = e$)

$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2\ln x$ $\qquad$ separace proměnných

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2\ln x\,dx \quad \Big|\int$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2\int \ln x\,dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy = 2\cdot y^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \ln x\,dx = \int 1.\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x} & v=x \end{matrix}\right| = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\cancel{2}\sqrt{y} = \cancel{2}\left[x\ln x - x\right] + C$$

$$\sqrt{y} = x(\ln x - 1) + C \quad \Big|^2$$

$$u(x) = y = \left[x(\ln x - 1) + C\right]^2$$

obecné řešení

počáteční podmínka $u(e) = 1 = \left[e(\ln e - 1) + C\right]^2$

$$1 = \left[e(1-1) + C\right]$$

$$1 = C$$

Cauchyho úloha: $\underline{u(x) = \left[x(\ln x - 1) + 1\right]^2}$

---

④ $$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

(Homogenní DR $f(x,y) = f(t.x, t.y)$)

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1} \quad \Big| \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

transformace

$$y = z.x \qquad z = \frac{y}{x}$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{z^2}{z-1}$$

separace

$$\frac{z-1}{z}\,dz = \frac{dx}{x} \quad \Big|\int$$

$$z - \ln|z| = \ln|x| + C_1 \quad C_1 = \ln C$$

upravíme

$$\ln e^z - \ln|z| = \ln|x| + \ln C \longrightarrow e^z = C.x.z$$

$$\boxed{e^{\frac{y}{x}} = C.y \qquad e^{\frac{u(x)}{x}} = C.u(x) \quad \text{řešení musí vyhovovat}}$$

(5) Závislost teploty T ochlazujícího se tělesa hmotnosti m na čase t je dána:

$$mK\,dT = -\alpha(T-T_p)\,dt$$

K – tepelná kapacita tělesa $K>0$

α – koef. úměrnosti $\alpha>0$

T_p – teplota prostředí

Nechť v čase $t=0$ je teplota tělesa T_0, jaká bude teplota tělesa v čase t?

Separace proměnných

$$\frac{dT}{T-T_p} = -\frac{\alpha}{mK}\,dt \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{dT}{T-T_p} = \int -\frac{\alpha}{mK}\,dt$$

$$\ln(T-T_p) = -\frac{\alpha}{mK}\cdot t + C_1 \qquad C_1 = \ln C$$

(dáme na druhou stranu)

odlogaritmujeme

$$\frac{T-T_p}{C} = e^{-\frac{\alpha}{mK}t}$$

teplota v čase t

$$T(t) = C\cdot e^{-\frac{\alpha}{mK}t} + T_p$$

Poč. podmínka:

$$T(t_0=0) = T_0 = C e^{-\frac{\alpha}{mK}\cdot 0} + T_p$$

$$T_0 - T_p = C$$

$$\underline{T(t) = (T_0-T_p)\,e^{-\frac{\alpha}{mK}\cdot t} + T_p}$$

⑥ $y' + \frac{2}{x} y = 0$

Lineární dif. rovnice LDR bez pravé strany (homogenní)

separace p.

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{2}{x} dx \quad \Big| \int$$

$$\ln y = -2 \ln x + C_1 \quad C_1 = \ln C$$

$$\ln y = \ln \frac{C}{x^2} \quad \text{odlogaritmujeme}$$

$$\underline{u(x) = y = \frac{C}{x^2}}$$

---

⑦ $y' + 2xy = 4x$ NLDR s pravou stranou

nejprve bez pravé strany

$$y' + 2xy = 0 \quad \text{separace}$$

$$\frac{1}{y} dy = -2x\, dx \quad \Big| \int$$

$$\ln y = -x^2 + C_1 \quad C_1 = -\ln C$$

odlogaritmujeme

$$\frac{y}{C} = e^{-x^2}$$

$$y = C \cdot e^{-x^2}$$

Variace konstanty:

$$y = C(x)\, e^{-x^2} \quad \text{dosadíme do NLDR:}$$

$$y' = C'(x) e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$C'(x) e^{-x^2} + \cancel{C(x) e^{-x^2}(-2x) + 2x \cdot C(x) e^{-x^2}} = 4x$$

$$C'(x) = 4x e^{x^2} \quad \Big| \int$$

$$C(x) = 2e^{x^2} + C_1$$

$$\underline{u(x) = y = [2e^{x^2} + C_1] e^{-x^2} = C_1 e^{-x^2} + 2}$$

(1)

$\vec{a} = (1,2,3)$ $\qquad \vec{a} \perp \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(0+1) - \vec{j}(-1-1) - \vec{k}\cdot 1$$

$\vec{c} = (1,0,-1)$ $\qquad \vec{b} \perp \vec{c},\ \vec{b} \perp \vec{d}$

$\vec{d} = (1,1,1)$

$\Rightarrow \vec{a} = k\vec{c} + l\vec{d}$

lin. kombinace

$\vec{a}$ leží v rovině dané $\vec{c}, \vec{d}$

1. souř: $1 = k\cdot 1 + l\cdot 1$

2. souř: $2 = k\cdot 0 + l(+1)$ $\qquad \Rightarrow l = 2$

3. souř: $3 = k\cdot(-1) + l(1)$ $\qquad \Rightarrow k = -1$

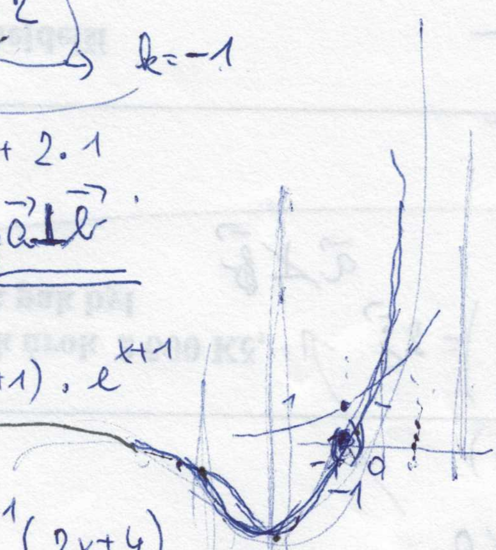
$3 = (-1)(-1) + 2\cdot 1$

$3 = 3$ ✓ $\quad \Rightarrow \underline{\vec{a} \perp \vec{b}}$

(2)

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\qquad f(x) = 2(x+1)\cdot e^{x+1}$

$H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f' = 2e^{x+1} + 2(x+1)e^{x+1} = e^{x+1}(2x+4)$

$(-\infty,-2): f' < 0$ $\qquad f' = 0 \Rightarrow \underline{x = -2}$

$(-2,-1) \cup (-1,\infty)\ f' > 0$

$\underline{\text{MIN}}$

$\underline{f(-2) = -2\cdot e^{-1}}$

$f'' = 2\cdot e^{x+1} + (2x+4)e^{x+1} = (2x+6)e^{x+1}$

$f''(-2) = (2\cdot(-2)+6)e^{-2+1} = 2e^{-1} > 0$

$\lim\limits_{x\to -1} = 0$

$f''\ (-\infty,-3)\ \ f'' < 0$ - konk

$(-3,0) \cup (0,\infty)\ \ f'' > 0$ konv

(3)

$P = I_1 + I_2$

$\int 2(x+1)e^{x+1}dx = \begin{vmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = 2\int te^t dt = \begin{vmatrix} u=t & v'=e^t \\ u'=1 & v=e^t \end{vmatrix}$

$= 2\left[te^t - \int 1\cdot e^t dt\right] = 2te^t - 2e^t = 2e^t(t-1) = 2e^{x+1}\cdot x$

$I_1 = -\int_{-2}^{-1} 2(x+1)e^{x+1}\,dx = -\left[2xe^{x+1}\right]_{-2}^{-1} = -\left(2(-1)e^0 - 2(-2)e^{-2+1}\right) = 2 - 4e^{-1}$

$I_2 = \int_{-1}^{3} 2(x+1)e^{x+1}dx = \left[2xe^{x+1}\right]_{-1}^{3} = 6e^4 + 2e^0 = 6e^4 + 2$

$\underline{P = 6e^4 - 4e^{-1} + 4}$

(8)

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$ charakteristická rovnice

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

kořeny char. r.

řešení $u_1(x) = e^{2x}$

$u_2(x) = e^{3x}$

obecné řešení

$$u(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$ (lin. kombinace)

---

(9)

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$ char. rovnice

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$ imaginární

$u_1 = \sin(2x)$

$u_2 = \cos(2x)$

obecné řešení $u(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x)$

---

(10)

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + 3i$$

$$\lambda_2 = 2 - 3i$$

$u_1 = e^{2x} \cdot \sin(3x)$

$u_2 = e^{2x} \cdot \cos(3x)$

obecné řešení $u(x) = C_1 e^{2x} \sin(3x) + C_2 e^{2x} \cos(3x)$

---

(11)

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -3$$ ← dvojnásobný kořen

řešení $u_1 = e^{-3x}$

$u_2 = \underline{x} \cdot e^{-3x}$

obecné řešení: $u(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

(12) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$\lambda_{1,2,3} = 1$ ← trojnásobný koreň

$u_1 = e^{1.x}$ koreň

$u_2 = x e^{1.x}$

$u_3 = x^2 e^{1.x}$

obecné řešení

$\underline{u(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x}$

(13) $y'' + 16y = 1$

nejprve "bez pravé" strany

$y'' + 16y = 0$

$\lambda^2 + 16 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 4i$ řešení $u(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$

a "plnou rovnici"

$w(x) = u(x) + Y$ ← partikulární řešení

"modifikovaný odhad"

obecné ř. s pravou stranou

$w(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{16}$

$Y = ax^2 + bx + c \rightarrow Y' = ax + b;\ Y'' = a$

dosadím do NLDR

$Y'' + 16Y = 1$

$a + 16(ax^2 + bx + c) = 1$

x^2: $16a = 0 \Rightarrow a = 0$

x^1: $16b = 0 \Rightarrow b = 0$

x^0: $a + 16c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{16}$

$\underline{Y = \frac{1}{16}}$