1. FUNKCE N-PROMĚNNÝCH (N ≥ 2)

Def. 1.0: *N*-rozměrným eukleidovským prostorem E_n nazýváme množinu všech uspořádaných *n*-tic ($x_1, x_2, \dots, x_n$) reálných čísel, v níž vzdálenost $\rho (X, Y)$ dvou bodů $X [x_1, x_2, \dots, x_n]$ a $Y [y_1, y_2,\dots, y_n]$ je definována vzorcem

$$\rho (X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Vzdálenost $\rho (X, Y)$ splňuje tyto axiomy:

1. pro každé dva body $X, Y \in E_n$ platí $\rho (X, Y) \geq 0$, přičemž $\rho (X, Y) = 0$ právě když je $X = Y$

2. pro každé dva body $X, Y \in E_n$ platí $\rho (X, Y) = \rho (Y, X)$

   axiom symetričnosti

3. pro každé tři body $X, Y, Z \in E_n$ platí $\rho (X, Z) \leq \rho (X, Y) + \rho (Y, Z)$

   trojúhelníková nerovnost

Def. 1.1: Reálnou funkcí *n* reálných proměnných nazýváme zobrazení *f* množiny $M \subset E_n$ do množiny E_1. Množinu $M = D(f)$ nazýváme definičním oborem funkce *f*. Číslo *y*, které je funkcí *f* přiřazeno bodu $X \in M$ nazýváme funkční hodnotou funkce *f* v bodě *X*, $y = f(X) = f (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Množinu všech funkčních hodnot funkce *f* nazýváme oborem funkčních hodnot $f(M) = H(f)$.

Def. 1.2: Jsou-li *f* a *g* dvě funkce se společným definičním oborem *M*, pak jejich součtem $f + g$ nazýváme funkci *h*, která je na *M* definována rovnicí: $h(X) = f(X) + g(X)$. Obdobně se definuje rozdíl, součin, podíl ($g(X) \neq 0$ pro $X \in M$).

Def. 1.3: Funkci *f* nazýváme shora (resp. zdola) ohraničenou na množině *M*, $M \subseteq E_n$, je-li množina *M* částí definičního oboru funkce *f* a $\exists\ k$ takové, že $f(X) < k$ (resp. $> k$) pro $\forall\ X \in M$. Funkcí *f*, která je na *M* ohraničená shora a zároveň zdola, nazýváme ohraničenou na *M*. ($\exists\ k$, že $|f(X)| < k$ pro $\forall\ X \in M$).

Def. 1.4: Grafem funkce *f* s definičním oborem $M \subseteq E_2$ nazýváme množinu všech bodů $[x, y, z]$ prostoru E_3, pro které platí $[x, y] \in M$ a $z = f(x, y)$.

Vrstevnicí funkce *f* dvou proměnných *x, y* nazýváme množinu $\{ [x, y] \in M \subseteq E_2, f(x, y) = c, c = konst.\}$

Hladinou (ekvipotenciální plochou) funkce *f* *n*-rozměrných prostorů (n > 2) nazýváme množinu všech bodů $X \in M$, pro něž je $f(X) = konst$.

Def. 1.5: (Spojitost)

Nechť M je množina bodů prostoru E_n a $X \in M$.

Nechť f je funkce n proměnných. Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě X vzhledem k množině M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ $\exists$ takové $\delta > 0$, že pro $\forall$ $X' \in M$, jehož vzdálenost od bodu X je menší než δ [tj. $\rho(X, X') < \delta$], platí $\left|f(X') - f(X)\right| < \varepsilon$.

Věta 1.1: Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $K \subseteq E_n$, pak je na množině K ohraničená.

Věta 1.2: Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě X vzhledem k množině M, $M \subseteq E_n$. Pak funkce $|f|$, $c \,.\, f$, $f + g$, $f \,.\, g$, f / g (pokud $g \neq 0$) pro $\forall$ $X \in M$ jsou rovněž spojitými v bodě X na M.

Věta 1.3: Na kompaktní množině nabývá spojitá funkce nejmenší a největší hodnoty.

Věta 1.4: Polynomy a racionální funkce n proměnných jsou spojité funkce.

Def. 1.6: (Limita)

Nechť f je funkce s definičním oborem $D(f)$. Nechť M je neprázdná množina bodů prostoru E_n a bod A je hromadným bodem množiny M z $D(f)$. Pak říkáme, že číslo α je (vlastní) limitou funkce f v bodě A vzhledem k množině M, jestliže ke $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ takové $\delta > 0$, že pro $\forall$ $X \in M \cap D(f)$ různé od A, jejichž vzdálenost od A je menší než δ $(0 < \rho(A, X) < \delta)$ platí $\left|f(X) - \alpha\right| < \varepsilon$.

Ozn. $\lim\limits_{X \to A} f(X) = \alpha, \; X \in M$

nebo $\lim\limits_{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to [a_1, a_2, \ldots, a_n]} f\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] = \alpha \qquad \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] \in M$

Množina M je často určena vztahy mezi souřadnicemi jejich bodů, pak místo symbolu $X \in M$ připojujeme přímo tyto vztahy, např.:

$$\lim_{\substack{[x,y] \to [0,0] \\ y = x}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

Věta 1.5: Funkce f n proměnných má v bodě A vzhledem k množině M nejvýše jednu limitu.

Věta 1.6: Jestliže funkce f(X) má v bodě A limitu, pro niž platí $\lim\limits_{\substack{X \to A \\ X \in M}} f(X) > 0$ (resp. < 0), pak $\exists$ takové prstencové okolí P bodu A, že v každém bodě množiny $P \cap M$ platí f(X) > 0 (resp. < 0).

Věta 1.7: Funkce f je spojitá v bodě A vzhledem k množině M, právě když $\lim\limits_{\substack{X \to A \\ X \in M}} f(X) = f(A)$.

Věta 1.8: Nechť funkce $f(X)$ a $g(X)$ mají v bodě A vlastní limitu. Pak v bodě A mají limitu funkce $\left|f(X)\right|$, $c_1 f(X) + c_2 g(X)$, c_1, c_2 jsou konstanty, $f(X) \,.\, g(X)$, $f(X) / g(X)$ (je-li $\lim\limits_{X \to A} g(X) \neq 0$) a platí:

a) $\lim\limits_{X \to A} |f(X)| = \left|\lim\limits_{X \to A} f(X)\right|$

b) $\lim\limits_{X \to A} = [\, c_1 f(X) + c_2 g(X) \,] = c_1 \lim\limits_{X \to A} f(X) + c_2 \lim\limits_{X \to A} g(X)$

c) $\lim\limits_{X \to A} = [\, f(X).g(X) \,] = \lim\limits_{X \to A} f(X) . \lim\limits_{X \to A} g(X)$

d) $\lim\limits_{X \to A} \left[f(X)/g(X)\right] = \lim\limits_{X \to A} f(X) \,/\, \lim\limits_{X \to A} g(X)$

Pozn.: Předchozí limity označujeme jako dvojné. Limita $\lim\limits_{x\to x_0} [\, \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \,]$, kde $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \alpha(x)$ *a poté* $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [\, \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \,]$ se označuje jako dvojnásobná nebo postupná.

Příklad: Vypočítejte limitu funkce

1. $\lim\limits_{[x,y]\to[2,1]} \left(x^2 + xy + y^2\right)$

2. $\lim\limits_{[x,y]\to[2,1]} \dfrac{x+3}{2x - y + 7}$

3. $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to[2,3] \\ M: y = x+1}} \dfrac{y-3}{x + y - 5}$

4. $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to[2,3] \\ M: y = 3}} \dfrac{y-3}{x + y - 5}$

5. $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \dfrac{x + yz - xy + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1} - 1}$

Výsledky: 1. 7; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. 0; 5. $+\infty$