12. ŘADY

12.1. Číselné řady

Úlohy k samostatnému řešení

1. Pomocí posloupnosti částečných součtů rozhodněte, zda je řada konvergentní nebo divergentní, najděte její součet, jestliže existuje:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Najděte součet geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5^{n-1}}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{3^{n+1}}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{2n+1}}$, f) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}}{5^{2n+1}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.2. Řady s kladnými členy

Úlohy k samostatnému řešení

3. Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{2n}}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n!}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}$, i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n^3+1}$,

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$, l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+4}$,

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n}$, n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}$, o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n!}{2^n}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.3. Alternující řady

Úlohy k samostatnému řešení

4. Rozhodněte o konvergenci alternující řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+2)!}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n+1}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}$, k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{(n-1)!}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.4. Mocninné řady

Úlohy k samostatnému řešení

5. Vypočítejte obor konvergence mocninné řady, pokud lze řadu sečíst, tak ji sečtěte:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3^n}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^{2n}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^n}$, e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{4^n}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+4)^n}{3^n\cdot n!}$, i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(x-2)^n$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n}$, k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$, l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}4^n x^n$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Proveďte rozvoj funkce v Maclaurinovu řadu:

a) $f(x)=e^{2x}$, b) $f(x)=\frac{\cos x}{x}$, c) $f(x)=e^{-x}$,

d) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, e) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, f) $f(x)=\sin x^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7. Vypočítejte integrál pomocí rozvoje funkce v Maclaurinovu řadu:

a) $\int \frac{e^x}{x} dx$, b) $\int \frac{\cos x}{x} dx$, c) $\int \frac{\sin x}{x} dx$,

d) $\int \frac{\cos x^2}{x} dx$, e) $\int \sin x^2 dx$, f) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$,

g) $\int_0^1 e^{x^2} dx$, h) $\int_{0,1}^1 \frac{\cos 2x}{x} dx$, i) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 dx$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnici:

a) $y' = 2y + x^3$, počáteční podmínka $y(0) = 1$,

b) $y'' = y' \sin x + \cos x$, počáteční podmínka $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$,

c) $y' = xy^2 + x^2 y$, počáteční podmínka $y(1) = -1$,

d) $y' = \sin x + xy$, počáteční podmínka $y(0) = 0$,

e) $y'' = y \ln x + e^{xy}$, počáteční podmínka $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$,

f) $y' = \frac{1}{x} + x^2 y$, počáteční podmínka $y(1) = 1$,

g) $y' = 3y + 2xe^y$, počáteční podmínka $y(0) = 0$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.5. Fouriérovy řady

Úlohy k samostatnému řešení

9. Rozviňte ve FŘ:

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$,

b) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, sinová i kosinová

c) $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$,

d) $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

e) $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, sinová,

f) $f(x) = x$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$,

g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 3, & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$,

h) $f(x) = x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$,

i) $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 2 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$,

j) $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\langle -\pi,0\rangle \\ 1 & x\in\langle 0,\pi\rangle \end{cases}$,

k) $f\left(x\right)=1\;,\; x\in\langle 0,\pi\rangle$, sinová,

l) $f\left(x\right)=\pi-x\;,\; x\in\langle -\pi,\pi\rangle$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) řada konverguje, $s=\frac{3}{4}$; **b)** řada konverguje, $s=1$; **c)** řada konverguje, $s=\frac{3}{4}$; **d)** řada konverguje, $s=\frac{1}{2}$; **e)** řada konverguje, $s=1$; **f)** řada konverguje, $s=\frac{1}{2}$. **2. a)** řada konverguje, $s=2$; **b)** řada konverguje, $s=\frac{5}{6}$; **c)** řada konverguje, $s=\frac{12}{25}$; **d)** řada diverguje; **e)** řada konverguje, $s=\frac{3}{2}$; **f)** řada konverguje, $s=\frac{20}{29}$. **3. a)** řada konverguje; **b)** řada konverguje; **c)** řada konverguje; **d)** řada konverguje; **e)** řada konverguje; **f)** řada konverguje; **g)** řada konverguje; **h)** řada diverguje; **i)** řada konverguje; **j)** řada konverguje; **k)** řada diverguje; **l)** řada diverguje; **m)** řada diverguje; **n)** řada konverguje; **o)** řada diverguje; **p)** řada diverguje; **q)** řada diverguje; **r)** řada diverguje; **s)** řada diverguje; **t)** řada konverguje; **u)** řada konverguje; **v)** řada konverguje; **w)** řada konverguje; **z)** řada konverguje. **4. a)** konvergentní; **b)** absolutně konvergentní; **c)** absolutně konvergentní; **d)** absolutně konvergentní; **e)** divergentní; **f)** divergentní; **g)** absolutně konvergentní; **h)** divergentní; **i)** konvergentní; **j)** absolutně konvergentní; **k)** konvergentní; **l)** absolutně konvergentní. **5. a)** $\langle 0,2)$, $s=-\ln(2-x)$; **b)** $(0,6)$, $s=\frac{x-3}{6-x}$; **c)** $(-3,-1)$, $s=\frac{1}{x^2+4x+5}$; **d)** $\langle -5,3)$, $s=\ln\frac{4}{3-x}$; **e)** $(1,3\rangle$, $s=\ln(x-1)$; **f)** $(-4,4)$, $s=\frac{x}{x+4}$; **g)** $(-\infty,\infty)$; **h)** $(-\infty,\infty)$; **i)** $(1,3)$; **j)** $\langle -1,1)$, $s=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; **k)** $(0,2)$, $s=\frac{1}{(2-x)^2}$; **l)** $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, $s=\frac{1}{1-4x}$.

6. a) $e^{2x}=1+2x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\cdots+\frac{2^n x^n}{n!}+\cdots=\sum_0^\infty \frac{2^n x^n}{n!}$;

b) $\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots=\frac{1}{x}+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$;

c) $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\cdots=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n x^n}{n!}$;

d) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\sum_0^\infty x^n$;

e) $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}$;

f) $\sin x^2 = x^2-\dfrac{x^6}{3!}+\dfrac{x^{10}}{5!}\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_0^\infty \dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$;

g) $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^6}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{n!}+\cdots=\sum_0^\infty \dfrac{x^{2n}}{n!}$;

h) $\operatorname{arctg} x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_0^\infty (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

i) $e^{3x}=1+3x+\dfrac{9x^2}{2!}+\dfrac{27x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{3^n x^n}{n!}+\cdots=\sum_0^\infty \dfrac{3^n x^n}{n!}$.

7. a) $\int \dfrac{e^x}{x}dx=c+\ln x+x+\dfrac{x^2}{2.2!}+\dfrac{x^3}{3.3!}+\ldots=c+\ln x+\sum_1^\infty \dfrac{x^n}{n.n!}$;

b) $\int \dfrac{\cos x}{x}dx=c+\ln x-\dfrac{x^2}{2.2!}+\dfrac{x^4}{4.4!}-\dfrac{x^6}{6.6!}+\cdots=c+\ln x+\sum_1^\infty (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n).(2n)!}$;

c) $\int \dfrac{\sin x}{x}dx=c+x-\dfrac{x^3}{3.3!}+\dfrac{x^5}{5.5!}-\dfrac{x^7}{7.7!}+\cdots=c+\sum_0^\infty (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!}$;

d) $\int \dfrac{\cos x^2}{x}dx=c+\ln x-\dfrac{x^4}{4.2!}+\dfrac{x^8}{8.4!}-\dfrac{x^{12}}{12.6!}+\cdots=c+\ln x+\sum_1^\infty (-1)^n\dfrac{x^{4n}}{(4n).(2n)!}$;

e) $\int \sin x^2 dx=\sum_0^\infty (-1)^n\dfrac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}+c$;

f) $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx=c+x-\dfrac{x^3}{3^2}+\dfrac{x^5}{5^2}-\dfrac{x^7}{7^2}+\cdots=c+\sum_0^\infty (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$; **g)** $1{,}4625$; **h)** $1{,}4652$;

i) $0{,}2979$.

8. a) $y=1+2x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{11}{12}x^4+\dfrac{11}{30}x^5+\ldots$;

b) $y=2+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{60}x^5+\ldots$;

c) $y=-1-\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{6}(x-1)^3+\dfrac{1}{24}(x-1)^4+\ldots$; **d)** $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{12}x^4+\ldots$;

e) $y=-(x-1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{6}(x-1)^3-\dfrac{1}{12}(x-1)^4+\ldots$;

f) $y=1+2(x-1)+\dfrac{3}{2}(x-1)^2+\dfrac{5}{2}(x-1)^3+\dfrac{13}{8}(x-1)^4+\ldots$, **g)** $y=x^2+x^3+\dfrac{5}{4}x^4+\ldots$;

h) $y=1-x-\frac{1}{6}x^3+\dots;$ **i)** $y=2+4(x-1)+8(x-1)^2+\frac{47}{3}(x-1)^3+\frac{95}{3}(x-1)^4+\dots;$

j) $y=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\dots;$ **k)** $y=2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{35}{24}x^4+\dots;$ **l)** $y=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\dots;$

m) $y=1+2(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^3-\frac{1}{12}(x-1)^4+\dots;$ **n)** $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^4+\dots.$

9. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)};$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2};$ **c)** $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n};$

d) $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)};$ **e)** $\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n};$ **f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)},$ **g)** $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)};$

h) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)};$ **i)** $\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$