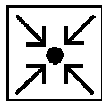


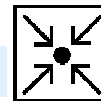
12. ŘADY	122
12.1. Číselné řady	122
Úlohy k samostatnému řešení.....	122
12.2. Řady s kladnými členy	122
Úlohy k samostatnému řešení.....	122
12.3. Alternující řady	123
Úlohy k samostatnému řešení.....	123
12.4. Mocninné řady	123
Úlohy k samostatnému řešení.....	123
12.5. Fouriérový řady	124
Úlohy k samostatnému řešení.....	124
Výsledky úloh k samostatnému řešení	126

12. ŘADY

12.1. Číselné řady



Úlohy k samostatnému řešení



1. Pomocí posloupnosti částečných součtů rozhodněte, zda je řada konvergentní nebo divergentní, najděte její součet, jestliže existuje:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Najděte součet geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5^{n-1}}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}$,

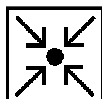
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^{n+1}}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}}$,

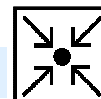
f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+1}}{5^{2n+1}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.2. Řady s kladnými členy



Úlohy k samostatnému řešení



3. Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{2n}}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}$,

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+1}$,

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$,

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$,

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+4}$,

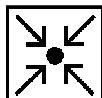
m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n}$,

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$,

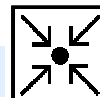
o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{2^n}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.3. Alternující řady



Úlohy k samostatnému řešení

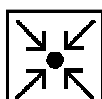


4. Rozhodněte o konvergenci alternující řady:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2}, & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}, & \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+2)!}, \\
 \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n, & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n, \\
 \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}, & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}, & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}, \\
 \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n-1}}, & \text{k) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{(n-1)!}.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

12.4. Mocninné řady



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte obor konvergence mocninné řady, pokud lze řadu sečíst, tak ji sečtěte:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}, & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n}, & \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+2)^{2n}, \\
 \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n}, & \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}, & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{4^n}, \\
 \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}, & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+4)^n}{3^n \cdot n!}, & \text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} n(x-2)^n, \\
 \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}, & \text{k) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-1)^n, & \text{l) } \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6. Proveďte rozvoj funkce v Maclaurinovu řadu:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = e^{2x}, & \text{b) } f(x) = \frac{\cos x}{x}, & \text{c) } f(x) = e^{-x}, \\
 \text{d) } f(x) = \frac{1}{1-x}, & \text{e) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & \text{f) } f(x) = \sin x^2.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

7. Vypočítejte integrál pomocí rozvoje funkce v Maclaurinovu řadu:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{e^x}{x} dx, & \text{b) } \int \frac{\cos x}{x} dx, & \text{c) } \int \frac{\sin x}{x} dx, \\ \text{d) } \int \frac{\cos x^2}{x} dx, & \text{e) } \int \sin x^2 dx, & \text{f) } \int \frac{\arctg x}{x} dx, \\ \text{g) } \int_0^1 e^{x^2} dx, & \text{h) } \int_{0,1}^1 \frac{\cos 2x}{x} dx, & \text{i) } \int_0^1 \arctg x^2 dx. \end{array}$$

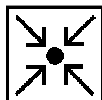
Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnici:

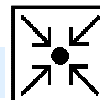
$$\begin{array}{l} \text{a) } y' = 2y + x^3, \text{ počáteční podmínka } y(0) = 1, \\ \text{b) } y'' = y' \sin x + \cos x, \text{ počáteční podmínka } y(0) = 2, y'(0) = 1, \\ \text{c) } y' = xy^2 + x^2 y, \text{ počáteční podmínka } y(1) = -1, \\ \text{d) } y' = \sin x + xy, \text{ počáteční podmínka } y(0) = 0, \\ \text{e) } y'' = y \ln x + e^{-xy}, \text{ počáteční podmínka } y(1) = 0, y'(1) = -1, \\ \text{f) } y' = \frac{1}{x} + x^2 y, \text{ počáteční podmínka } y(1) = 1, \\ \text{g) } y' = 3y + 2xe^y, \text{ počáteční podmínka } y(0) = 0. \end{array}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12.5. Fourierovy řady



Úlohy k samostatnému řešení



9. Rozviňte ve FR:

$$\begin{array}{l} \text{a) } f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}, \\ \text{b) } f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \text{ sinová i kosinová} \\ \text{c) } f(x) = x^2, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \\ \text{d) } f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \text{e) } f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \text{ sinová,} \\ \text{f) } f(x) = x, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \\ \text{g) } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 3, & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}, \\ \text{h) } f(x) = x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ \text{i) } f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 2 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}, \end{array}$$

$$j) f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1 & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases},$$

$$k) f(x) = 1, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \text{ sinová,}$$

$$l) f(x) = \pi - x, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) řada konverguje, $s = \frac{3}{4}$; b) řada konverguje, $s = 1$; c) řada konverguje, $s = \frac{3}{4}$;
d) řada konverguje, $s = \frac{1}{2}$; e) řada konverguje, $s = 1$; f) řada konverguje, $s = \frac{1}{2}$. 2. a) řada konverguje, $s = 2$; b) řada konverguje, $s = \frac{5}{6}$; c) řada konverguje, $s = \frac{12}{25}$; d) řada diverguje; e) řada konverguje, $s = \frac{3}{2}$; f) řada konverguje, $s = \frac{20}{29}$. 3. a) řada konverguje; b) řada konverguje; c) řada konverguje; d) řada konverguje; e) řada konverguje; f) řada konverguje; g) řada konverguje; h) řada diverguje; i) řada konverguje; j) řada konverguje; k) řada diverguje; l) řada diverguje; m) řada diverguje; n) řada konverguje; o) řada diverguje; p) řada diverguje; q) řada diverguje; r) řada diverguje; s) řada diverguje; t) řada konverguje; u) řada konverguje; v) řada konverguje; w) řada konverguje; z) řada konverguje. 4. a) konvergentní; b) absolutně konvergentní; c) absolutně konvergentní; d) absolutně konvergentní; e) divergentní; f) divergentní; g) absolutně konvergentní; h) divergentní; i) konvergentní; j) absolutně konvergentní; k) konvergentní; l) absolutně konvergentní. 5. a) $\langle 0, 2 \rangle$, $s = -\ln(2-x)$; b) $(0, 6)$, $s = \frac{x-3}{6-x}$; c) $(-3, -1)$, $s = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$;
d) $\langle -5, 3 \rangle$, $s = \ln \frac{4}{3-x}$; e) $(1, 3)$, $s = \ln(x-1)$; f) $(-4, 4)$, $s = \frac{x}{x+4}$; g) $(-\infty, \infty)$;
h) $(-\infty, \infty)$; i) $(1, 3)$; j) $\langle -1, 1 \rangle$, $s = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; k) $(0, 2)$, $s = \frac{1}{(2-x)^2}$;
l) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $s = \frac{1}{1-4x}$.
6. a) $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$;
b) $\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots = \frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$;
c) $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$;
d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_0^{\infty} x^n$;

$$\text{e) } \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_0^{\infty} (-1)^n x^{2n};$$

$$\text{f) } \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!};$$

$$\text{g) } e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!};$$

$$\text{h) } \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\text{i) } e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \dots + \frac{3^n x^n}{n!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$$

$$\text{7. a) } \int \frac{e^x}{x} dx = c + \ln x + x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \dots = c + \ln x + \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n.n!};$$

$$\text{b) } \int \frac{\cos x}{x} dx = c + \ln x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} - \frac{x^6}{6.6!} + \dots = c + \ln x + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n).(2n)!};$$

$$\text{c) } \int \frac{\sin x}{x} dx = c + x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \dots = c + \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!};$$

$$\text{d) } \int \frac{\cos x^2}{x} dx = c + \ln x - \frac{x^4}{4.2!} + \frac{x^8}{8.4!} - \frac{x^{12}}{12.6!} + \dots = c + \ln x + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(4n).(2n)!};$$

$$\text{e) } \int \sin x^2 dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + c;$$

$$\text{f) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = c + x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \dots = c + \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}; \quad \text{g) } 1,4625; \quad \text{h) } 1,4652;$$

$$\text{i) } 0,2979.$$

$$\text{8. a) } y = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{11}{30}x^5 + \dots;$$

$$\text{b) } y = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \dots;$$

$$\text{c) } y = -1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots;$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \dots;$$

$$\text{e) } y = -(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots;$$

$$\text{f) } y = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{2}(x-1)^3 + \frac{13}{8}(x-1)^4 + \dots,$$

$$\text{g) } y = x^2 + x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \dots;$$

$$\mathbf{h)} \quad y = 1 - x - \frac{1}{6}x^3 + \dots; \quad \mathbf{i)} \quad y = 2 + 4(x-1) + 8(x-1)^2 + \frac{47}{3}(x-1)^3 + \frac{95}{3}(x-1)^4 + \dots;$$

$$\mathbf{j)} \quad y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots; \quad \mathbf{k)} \quad y = 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{35}{24}x^4 + \dots; \quad \mathbf{l)} \quad y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots;$$

$$\mathbf{m)} \quad y = 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots; \quad \mathbf{n)} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots$$

$$\mathbf{9. a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)}; \quad \mathbf{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}; \quad \mathbf{c)} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n};$$

$$\mathbf{d)} \quad 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)}; \quad \mathbf{e)} \quad \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}; \quad \mathbf{f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)}; \quad \mathbf{g)} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)};$$

$$\mathbf{h)} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}; \quad \mathbf{i)} \quad \pi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$