4. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

4.1. Derivace

Úlohy k samostatnému řešení

1. Derivujte:

a) $y = x - \frac{1}{x} + 4$, b) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

c) $y = \sqrt[4]{x^3} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Derivujte:

a) $y = \left(x^2 - 4\right)\left(2x + x^2\right)$, b) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 6x^4\right)$,

c) $y = \left(1 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^2}}\right)\left(x - 2x^3\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Derivujte:

a) $y = \frac{1-x}{1+x}$, b) $y = \frac{x+1}{x}$, c) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. Derivujte:

a) $y = \sin x \cos x$, b) $y = e^x \ln x$, c) $y = x \cos x$,

d) $y = 4\sqrt{x} \arcsin x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. Derivujte:

a) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}$, b) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$, c) $y = \frac{\operatorname{arccotg} x}{\arccos x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Derivujte:

a) $y = \frac{\ln x \sin x}{\operatorname{cotg} x}$, b) $y = \frac{\arccos x}{x \operatorname{tg} x}$, c) $y = \left(\ln x + \log x\right)\frac{\operatorname{arccotg} x}{e^x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

7. Derivujte:

a) $y=\sqrt{x^2-3x+6}$, b) $y=\left(6+5x^4\right)^7$,

c) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x^2+4}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3+3x^2-6}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

8. Derivujte:

a) $y=\sin(2x+1)$, b) $y=\cos\left(5-2x+x^2\right)$, c) $y=\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}-2\right)$,

d) $y=\operatorname{cotg}\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9. Derivujte:

a) $y=\sin^2 x$, b) $y=\cos^3 x$, c) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$,

d) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. Derivujte:

a) $y=\sin(\cos 3x)$, b) $y=\cos x^2$, c) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2(4x-6)}$,

d) $y=\operatorname{cotg}\sqrt{x^2+3x-2}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11. Derivujte:

a) $y=\dfrac{2x-\sin x}{x^2+1}$, b) $y=\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{3\sin 2x}$, c) $y=\sqrt{\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}}$,

d) $y=\dfrac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{1+\sin\dfrac{x}{2}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

12. Derivujte:

a) $y=\log_4(x+2)$, b) $y=\ln^2 x$, c) $y=\ln x^2$,

d) $y=\ln\sin x$, e) $y=\ln\ln x$, f) $y=\log_2(\operatorname{arctg} x)$,

g) $y=\ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$, h) $y=\ln\sqrt{\dfrac{\cos x}{1-\sin x}}$, i) $y=x\cdot\ln x$,

j) $y=\ln\arcsin\sqrt{x}$, k) $y=\log_2\left(\log_3\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

13. Derivujte:

a) $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, b) $y=2^{\sin 2x+\cos 3x}$, c) $y=\arccos\left(2^{x+1}\right)$,

d) $y=5^{\ln\sin x}$, e) $y=\sin x^2 e^{\sin x}$, f) $y=e^{\ln x\,\mathrm{tg}\,x}$,

g) $y=e^{\arcsin x^2}$, h) $y=\dfrac{1}{4^{\mathrm{cotg}\,4x}}$, i) $y=\dfrac{e^{\sin 2x}}{\sin 2x}$,

j) $y=e^{\frac{\mathrm{cotg}\,2x}{x^2+1}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

14. Derivujte:

a) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$, b) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{2x}$, c) $y=\arccos\sqrt{2x-x^2}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

15. Derivujte:

a) $y=\mathrm{arccotg}\dfrac{x}{x-1}$, b) $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$, c) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{x}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

16. Derivujte:

a) $y=\mathrm{arccotg}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, b) $y=\arcsin\left(\dfrac{\sin x}{x-1}\right)$, c) $y=\mathrm{arctg}\left(\ln^2 x\right)$,

d) $y=\arccos\left(e^{2x\sin x}\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

17. Derivujte:

a) $y=x^x$, b) $y=(\sin x)^{\cos x}$, c) $y=(x+3)^{\mathrm{tg}\,x}$,

d) $y=(\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$, e) $y=(\mathrm{arctg}\,x)^{\sin x}$, f) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

18. Vypočítejte druhou derivaci:

a) $y=\dfrac{x-1}{3x^2}$, b) $y=x\sqrt{x^2+3}$, c) $y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$,

d) $y=\dfrac{e^x}{x}$, e) $y=x^2\sin 3x$,f) $y=\mathrm{arctg}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

19. Derivujte funkce dané parametricky:

a) $\begin{cases} x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$, b) $\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$,

c) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, d) $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$,

e) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$, f) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4.2. Tečna a normála

Úlohy k samostatnému řešení

20. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = x^2 + 6x - 4$ v bodě $T[1,?]$.

21. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = x\sin x$ v bodech $T_1[0,?]$ a $T_2\left[\frac{\pi}{2},?\right]$.

22. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = e^x\cos x$ v bodě $T[0,?]$.

23. Napište rovnici tečny ke křivce $y = x^2 - 3x + 4$, která je rovnoběžná s přímkou $a: x + y + 1 = 0$.

24. Napište rovnici tečny ke křivce $y = e^{2x}$, která je rovnoběžná s přímkou $a: 2x - y + 3 = 0$.

25. Napište rovnici tečny ke křivce $y = x^2 - 3x + 4$, která je kolmá k přímce $p: x + y - 1 = 0$.

26. Napište rovnice tečen ke křivce $y = x^2 + 1$, které procházejí bodem $P[1,-2]$.

27. Určete konstantu a tak, aby přímka $p: y = 4x - 1$ byla tečnou křivky $y = x^2 + ax$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4.3. Taylorův a Maclaurinův polynom

Úlohy k samostatnému řešení

28. Sestavte pro danou funkci Taylorův polynom n-tého řádu v okolí bodu x_0:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $n = 4$, b) $y = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 4$,

c) $y = x\sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $n = 3$, d) $y = \dfrac{1}{\sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $n = 3$

e) $y = \ln\left(1 + x^2\right)$, $x_0 = 1$, $n = 4$ f) $y = \dfrac{x-1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 4$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

29. Sestavte pro danou funkci Maclaurinův polynom n-tého řádu:

a) $y = \operatorname{tg} x,\ n = 3$, b) $y = \sin 2x,\ n = 6$,

c) $y = \cos 3x,\ n = 6$, d) $y = e^{-x},\ n = 5$,

e) $y = \sqrt{1+x},\ n = 4$, f) $y = xe^{x},\ n = 5$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4.4. L´Hospitalovo pravidlo

Úlohy k samostatnému řešení

30. Vypočítejte limitu L´Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-4x^2+4x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{3^{2x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^4-4x^3+3x^2-5x+4}{3x^4-4x^2+5x-3}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 2x}{2x+\sin 3x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 x}{4x^2}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

31. Vypočítejte limitu L´Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^{2x}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

32. Vypočítejte limitu L´Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{4}{x^2-2x-3}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{x^2}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

33. Vypočítejte limitu L´Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+2x\right)^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4.5. Průběh funkce

Úlohy k samostatnému řešení

34. Najděte intervaly monotonnosti funkce a její extrémy:

a) $y=x^3-2x^2-4x+5$, b) $y=\frac{x^2}{x+4}$,

c) $y=e^{x^2+2x-4}$, d) $y=\ln\frac{x-2}{x+1}$,

e) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$, f) $y=\sin x\cos x$,

g) $y=\arcsin\frac{x}{x+1}$, h) $y=\frac{3}{4}\ln\frac{x+2}{2-x}-x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

35. Najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní a konkávní, najděte inflexní body:

a) $y=x^3-3x^2+5x+1$, b) $y=\frac{x^2}{x+4}$,

c) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$, d) $y=\ln\frac{x-1}{x}$,

e) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$, f) $y=e^{x^2+1}$,

g) $y=\left(-x^2+4x-5\right)e^x$, h) $y=\sin x\cos x$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

36. Určete globální (absolutní) extrémy funkce na daném intervalu:

a) $y=x^2-4x+3,\ I=\langle -6,9\rangle$, b) $y=x-\frac{1}{x+1},\ I=\langle -4,-1)$,

c) $y=x^3+3x^2-9x-3,\ I=\langle -4,4\rangle$, d) $y=\sqrt{x^2-4x+5},\ I=\langle -3,0\rangle$,

e) $y=x+\sin 2x,\ I=\left\langle \frac{\pi}{4},\pi\right\rangle$, f) $y=e^{x^2+2x-3},\ I=\langle -2,1\rangle$,

g) $y=x^2e^{-x},\ I=\left\langle -\frac{1}{2},3\right\rangle$, h) $y=\operatorname{arctg}\left(x^2-x-2\right),\ I=\langle -1,1\rangle$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

37. Určete rovnice asymptot funkce:

a) $y = xe^{-x}$,
b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{3x - 5}$,
c) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x}$,
d) $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2}$,
e) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 9}$,
f) $y = x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$,
g) $y = \dfrac{x-6}{2x+6}$,
h) $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{4x^2 - 1}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

38. Vyšetřete průběh funkce:

a) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$,
b) $y = \dfrac{x^3}{8 - 2x^2}$,
c) $y = xe^{-x}$,
d) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-1}$,
e) $y = x^2 \ln x$,
f) $y = \sqrt{x+1} + x$,
g) $y = \sin x + \cos x$,
h) $y = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 4$,
i) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$,
j) $y = \sin 2x - x$,
k) $y = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$,
l) $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$,
m $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x}$,
n) $y = \dfrac{e^x}{x+2}$,
o) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$,
p) $y = \dfrac{x}{2} - \cos x$,
q) $y = \sqrt{4 - x^2} + 2x^2$,
r) $y = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2}$,
s) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$,
t) $y = \ln\dfrac{x-4}{x}$,
u) $y = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^x$,
v) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$,
w) $y = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$,
z) $y = x^4 - 4x^3 + 8x - 1$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y' = 1 + \dfrac{1}{x^2}$; **b)** $y' = \dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$; **c)** $y' = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

2. a) $y' = 4x^3 + 6x^2 - 8x - 8$; **b)** $y' = \dfrac{9\sqrt{x} - 180x^4 - 42x^2\sqrt{x}}{2}$;

c) $y' = \dfrac{20x^2 - 6x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$. **3. a)** $y' = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$; **b)** $y' = -\dfrac{1}{x^2}$; **c)** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$.

4. a) $y' = \cos 2x$; **b)** $y' = e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}$; **c)** $y' = \cos x - x\sin x$; **d)** $y' = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$.

5. a) $y' = \dfrac{x\ln x - \left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x}{x\left(x^2+1\right)\ln^2 x}$; **b)** $y' = \dfrac{\sin x\cos x - \left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x}{\left(x^2+1\right)\sin^2 x}$;

c) $y' = \dfrac{\left(1+x^2\right)\operatorname{arccotg} x - \sqrt{1-x^2}\arccos x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$.

6. a) $y' = \dfrac{x\ln x\sin x + \cos x\sin^2 x + x\ln x\cos^2 x\sin x}{x\cos^2 x}$;

b) $y' = \dfrac{-x\sin x\cos x - \arccos x\left(\sin x\cos x + x\right)\sqrt{1-x^2}}{x^2\sin^2 x\sqrt{1-x^2}}$;

c) $y' = \dfrac{\left(\ln 10 + 1\right)\operatorname{arccotg} x}{xe^x \ln 10} - \left(\ln x + \log x\right)\dfrac{1+\left(1+x^2\right)\operatorname{arccotg} x}{\left(1+x^2\right)e^x}$. **7. a)** $y' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+6}}$;

b) $y' = 140x^3\left(6+5x^4\right)^6$; **c)** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}} + \dfrac{3x^2+6x}{4\sqrt[4]{\left(x^3+3x^2-6\right)^5}}$.

8. a) $y' = 2\cos(2x+1)$; **b)** $y' = -(2x-2)\sin\left(5-2x+x^2\right)$; **c)** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\left(\sqrt{x}-2\right)}$;

d) $y' = -\dfrac{4}{(2-x)^2\sin^2\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)}$. **9. a)** $y' = \sin 2x$; **b)** $y' = -3\cos^2 x\sin x$;

c) $y' = \dfrac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; **d)** $y' = \dfrac{1}{3\cos x\sin x\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$. **10. a)** $y' = -3\cos\left(\cos 3x\right)\sin 3x$;

b) $y' = -2x\sin x^2$; **c)** $y' = -\dfrac{2}{\operatorname{tg}^3(4x-6)}\cdot\dfrac{4}{\cos^2(4x-6)} = \dfrac{-8\cos(4x-6)}{\sin^3(4x-6)}$;

d) $y' = -\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+3x-2}} \cdot \dfrac{(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x-2}}$. **11. a)** $y' = \dfrac{(2-\cos x)\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(2x-\sin x)}{(x^2+1)^2}$;

b) $y' = -\dfrac{x^2\sin 2x + 2(1-x^3)\cos 2x}{3\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\sin^2 2x}$; **c)** $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}}\dfrac{3\cos 3x \sin x \cos x - \sin 3x}{\sin^2 x}$;

d) $y' = -\dfrac{1+\sin\dfrac{x}{2} + \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cos\dfrac{x}{2}}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}$. **12. a)** $y' = \dfrac{1}{\ln 4(x+2)}$; **b)** $y' = \dfrac{2\ln x}{x}$;

c) $y' = \dfrac{2}{x}$; **d)** $y' = \operatorname{cotg} x$; **e)** $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$; **f)** $y' = \dfrac{1}{\ln 2(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$; **g)** $y' = \dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$;

h) $y' = \dfrac{1}{2\cos x}$; **i)** $y' = \ln x + 1$; **j)** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}\arcsin\sqrt{x}}$;

k) $y' = \dfrac{2x}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot(x^2+1)\cdot\log_3(\ln(x^2+1))\cdot\ln(x^2+1)}$. **13. a)** $y' = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$;

b) $y' = 2^{\sin 2x+\cos 3x}(2\cos 2x - 3\sin 3x)\ln 2$; **c)** $y' = -\dfrac{2^{x+1}\ln 2}{\sqrt{1-2^{2x+2}}}$; **d)** $y' = 5^{\ln\sin x}\operatorname{cotg} x\ln 5$;

e) $y' = 2x\cos x^2 e^{\sin x} + \sin x^2\cos x\, e^{\sin x}$; **f)** $y' = e^{\ln x \operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{\ln x}{\cos^2 x}\right)$; **g)** $y' = e^{\arcsin x^2}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

h) $y' = \dfrac{4\ln 4}{4^{\operatorname{cotg} x}\sin^2 4x}$; **i)** $y' = \dfrac{\sin 4x\, e^{\sin 2x} - 2\cos 2x\, e^{\sin 2x}}{\sin^2 2x}$; **j)** $y' = -e^{\frac{\operatorname{cotg} 2x}{x^2+1}}\dfrac{2(x^2+1)+x\sin 4x}{\sin^2 2x(x^2+1)^2}$.

14. a) $y' = \dfrac{-2\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$; **b)** $y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+2x)}$; **c)** $y' = \dfrac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}$. **15. a)** $y' = \dfrac{1}{2x^2-2x+1}$;

b) $y' = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$; **c)** $y' = \dfrac{\sqrt{1-x}+1+x}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{1-x}}$. **16. a)** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$;

b) $y' = \dfrac{(x-1)\cos x - \sin x}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-\sin^2 x}}$; **c)** $y' = \dfrac{2\ln x}{x(1+\ln^4 x)}$; **d)** $y' = \dfrac{e^{2x\sin x}(2\sin x + 2x\cos x)}{\sqrt{1-e^{4x\sin x}}}$.

17. a) $y' = x^x(\ln x + 1)$; **b)** $y' = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$;

c) $y' = (x+3)^{\operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\ln(x+3)}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{x+3}\right)$; **d)** $y' = (\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\dfrac{\cos x - \cos x\ln\sin x}{\sin^2 x}$;

e) $y' = (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}\left(\cos x \ln \operatorname{arctg} x + \dfrac{\sin x}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}\right)$; **f)** $y' = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

18. a) $y'' = \dfrac{2x-6}{3x^4}$; **b)** $y'' = \dfrac{2x^3-9x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$; **c)** $y'' = \dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

d) $y'' = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$; **e)** $y'' = \sin 3x(2-9x^2)+12x\cos 3x$; **f)** $y'' = -\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

19. a) $y' = -\operatorname{cotg} t$; **b)** $y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$; **c)** $y' = -\operatorname{tg} t$; **d)** $y' = \dfrac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t}$;

e) $y' = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; **f)** $y' = -\dfrac{b}{a}\operatorname{cotg} t$. **20.** $t: y = 8x-5$, $n: y = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{25}{8}$. **21.** $t_1: y = 0$, $n_1: x = 0$, $t_2: y = x$, $n_2: y = \pi - x$. **22.** $t: y = x+1$, $n: y = 1-x$. **23.** $t: y = 3-x$, $n: y = x+1$. **24.** $t: y = 2x+1$. **25.** $t: y = x$. **26.** $t_1: y = 6x-8$, $t_2: y = -2x$. **27.** $a_1 = 2, a_2 = 6$.

28. a) $T_4 = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{3}{8}(x-1)^2 - \dfrac{5}{16}(x-1)^3 + \dfrac{35}{128}(x-1)^4$;

b) $T_4 = 1 + \dfrac{1}{e}(x-1) - \dfrac{1}{2e^2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3e^3}(x-1)^3 - \dfrac{1}{4e^4}(x-1)^4$;

c) $T_3 = \dfrac{\pi}{2} + \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{\pi}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^3$; **d)** $T_4 = 1 + \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2$;

e) $T_4 = \ln 2 + (x-1) - \dfrac{1}{6}(x-1)^3 + \dfrac{1}{8}(x-1)^4$;

f) $T_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}(x-2) - \dfrac{1}{8}(x-2)^2 + \dfrac{1}{16}(x-2)^3 + \dfrac{1}{32}(x-2)^4$.

29. a) $M_3 = x + \dfrac{1}{3}x^3$; **b)** $M_6 = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4}{15}x^5$; **c)** $M_6 = 1 - \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{27}{8}x^4 - \dfrac{81}{80}x^6$;

d) $M_5 = 1 - x + \dfrac{1}{2!}x^2 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{5!}x^5$; **e)** $M_4 = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4$;

f) $M_5 = x + x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{1}{24}x^5$. **30. a)** -2; **b)** 0; **c)** 2; **d)** $-\dfrac{1}{5}$; **e)** $\dfrac{1}{2}$; **f)** 0; **g)** 2. **31. a)** 0; **b)** 1; **c)** $-\dfrac{1}{2}$; **d)** $-\dfrac{1}{2}$. **32. a)** $\dfrac{1}{4}$; **b)** $-\infty$; **c)** $\pm\infty$; **d)** $\dfrac{1}{2}$. **33. a)** 1; **b)** e; **c)** e^3; **d)** e^{-1}.

34. a) $D_f=\mathbf{R}$, $\nearrow$: $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$, $(2,\infty)$, $\searrow$: $\left(-\frac{2}{3},2\right)$, max $\left[-\frac{2}{3},\frac{175}{27}\right]$, min $[2,-3]$;

b) $D_f=\mathbf{R}-\{-4\}$, $\nearrow$: $(-\infty,-8)$, $(0,\infty)$, $\searrow$: $(-8,-4)$, $(-4,0)$, max $[-8,-16]$, min $[0,0]$;

c) $D_f=\mathbf{R}$, $\nearrow$: $(-1,\infty)$, $\searrow$: $(-\infty,-1)$, min $\left[-1,e^{-5}\right]$;

d) $D_f=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$, $\nearrow$: $(-\infty,-1)$, $(2,\infty)$;

e) $D_f=\mathbf{R}$, $\nearrow$: $(0,\infty)$, $\searrow$: $(-\infty,0)$, min $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;

f) $D_f=\mathbf{R}$, $\nearrow$: $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+k\pi$, $\searrow$: $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)+k\pi$, max $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{1}{2}\right]$, min $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{1}{2}\right]$;

g) $D_f=\left\langle-\frac{1}{2},\infty\right)$, $\nearrow$: $\left\langle-\frac{1}{2},\infty\right)$;

h) $D_f=(-2,2)$, $\nearrow$: $(-2,-1)$, $(1,2)$, $\searrow$: $(-1,1)$, max $[-1;0{,}18]$, min $[1;-0{,}18]$.

35. a) $D_f=\mathbf{R}$, $\cup:(1,\infty)$, $\cap:(-\infty,1)$, IB $[1,4]$; **b)** $D_f=\mathbf{R}-\{4\}$, $\cup:(-4,\infty)$, $\cap:(-\infty,-4)$;

c) $D_f=\mathbf{R}$, $\cup:\mathbf{R}$; **d)** $D_f=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, $\cup:(-\infty,0)$, $\cap:(1,\infty)$; **e)** $D_f=\mathbf{R}$, $\cup:\mathbf{R}$;

f) $D_f=\mathbf{R}$, $\cup:(-1,\infty)$, $\cap:(-\infty,-1)$, IB $\left[-1,e^{2}\right]$;

g) $D_f=\mathbf{R}$, $\cup:(-1,1)$, $\cap:(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$, IB $\left[-1,-10e^{-1}\right]$, IB $[1,-2e]$;

h) $D_f=\mathbf{R}$, $\cup:\left(-\frac{\pi}{2},0\right)+k\pi$, $\cap:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+k\pi$, IB $[k\pi,0]$. **36. a)** max $[-6,63]$, min $[2,-3]$;

b) max *není*, min $\left[-4,-\frac{11}{3}\right]$; **c)** max $[4,73]$, min $[1,-8]$; **d)** max $\left[-3,\sqrt{26}\right]$, min $\left[0,\sqrt{5}\right]$;

e) max $[\pi;3{,}14]$, min $\left[\frac{2}{3}\pi;1{,}22\right]$; **f)** max $[1,1]$, min $\left[-1,e^{-4}\right]$; **g)** max $\left[2,4e^{-2}\right]$, min $[0,0]$;

h) max $[-1,0]$, min $\left[\frac{1}{2};-1{,}15\right]$. **37. a)** $y=0$; **b)** $y=\frac{3x-1}{9}$, $x=\frac{5}{3}$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$;

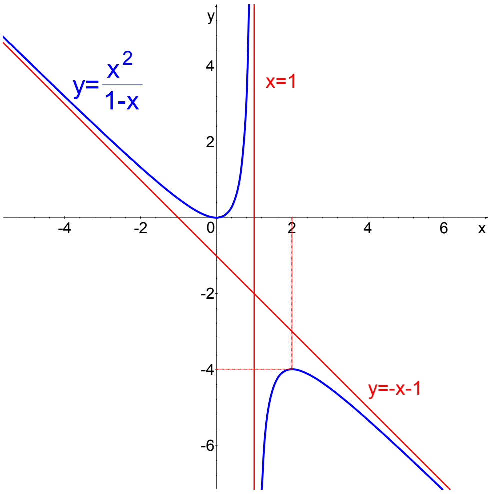
c) $y=\frac{\pi}{4}$; **d)** $y=2x+3$; **e)** $y=0$, $x=3$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$, $x=-3$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$;

f) $y=x+\frac{\pi}{2}$, $y=x-\frac{\pi}{2}$; **g)** $y=\frac{1}{2}$, $x=-3$, zleva $+\infty$, zprava $-\infty$;

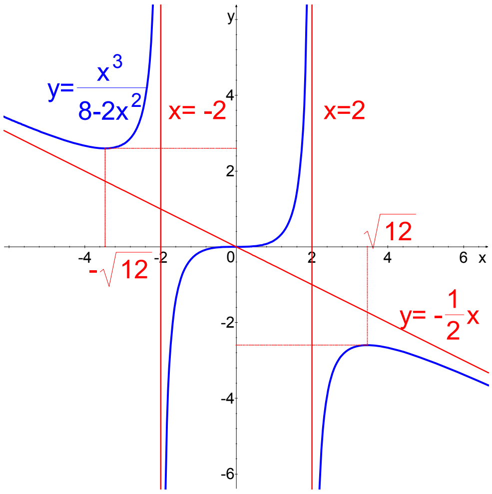
h) $y=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$, $x=-\frac{1}{2}$, zleva $-\infty$, zprava $+\infty$.

38.

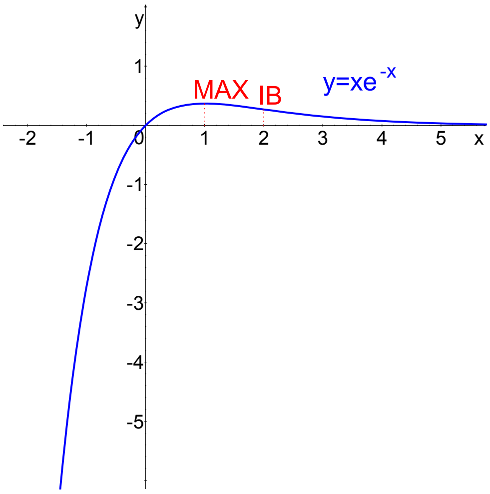
a)


y=x^2/(1-x)
x=1
y=-x-1

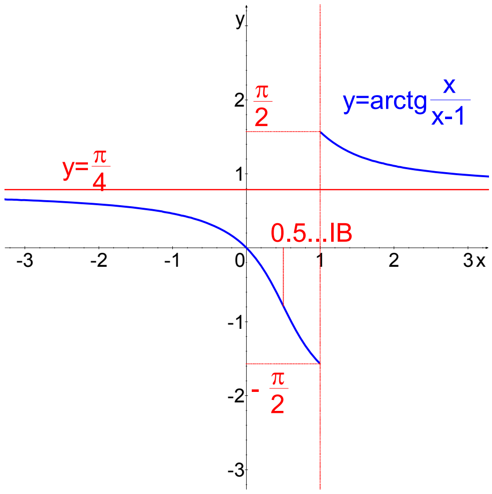
b)


y=x^3/(8-2x^2)
x= -2
x=2
√12
-√12
y= -1/2 x

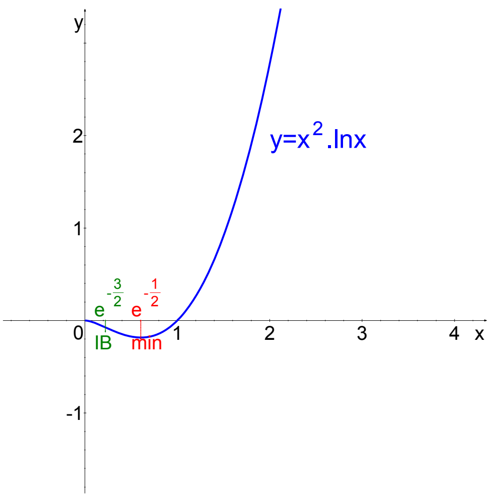
c)


MAX
IB
y=xe^-x

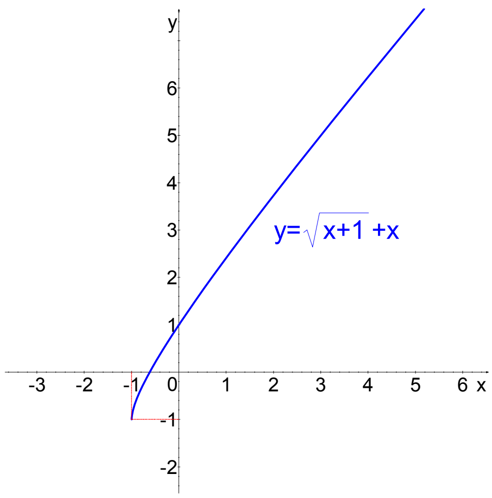
d)


π/2
y=arctg x/(x-1)
y=π/4
0.5...IB
- π/2

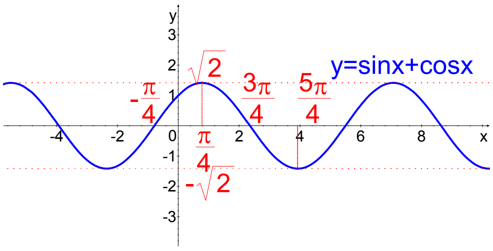
e)


y=x^2.lnx
e^-3/2
e^-1/2
IB
min

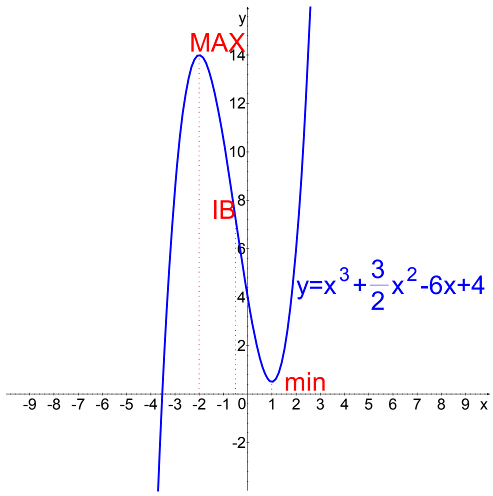
f)


y=√x+1 +x

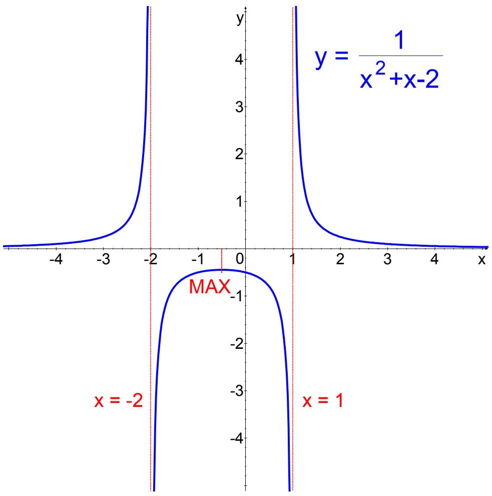
g)


y=sinx+cosx
√2
-√2
-π/4
π/4
3π/4
5π/4

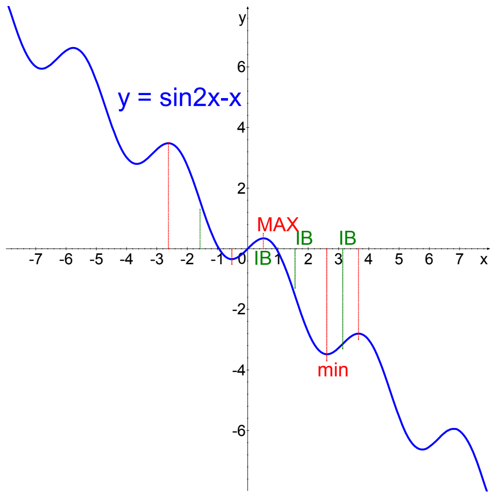
h)


MAX
IB
min
y=x^3+3/2x^2-6x+4

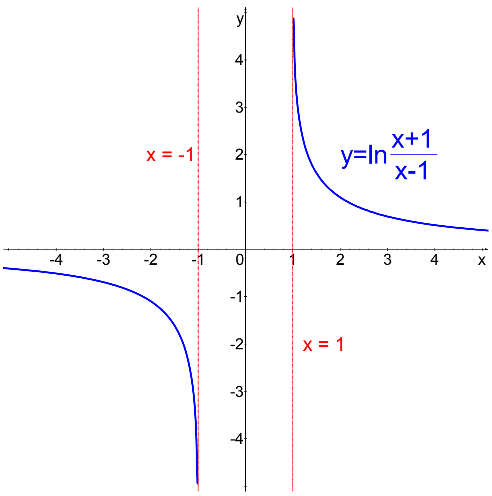
i)


y = 1/(x^2+x-2)
MAX
x = -2
x = 1

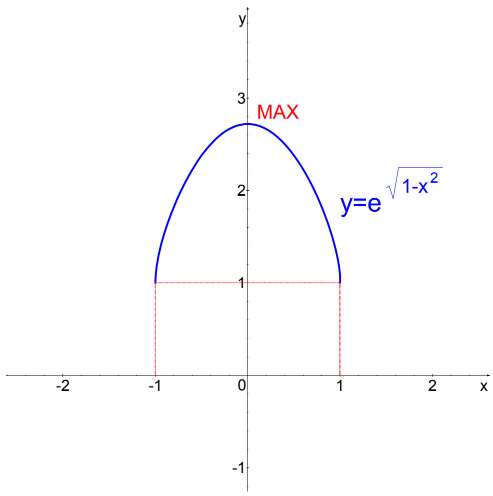
j)


y = sin2x-x
MAX
IB
IB
IB
min

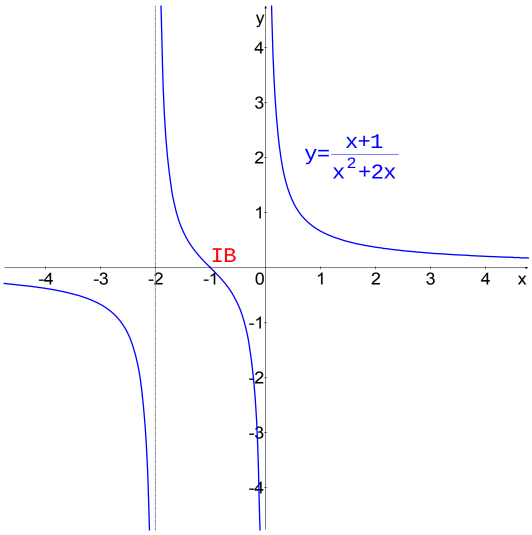
k)


x = -1
y=ln (x+1)/(x-1)
x = 1

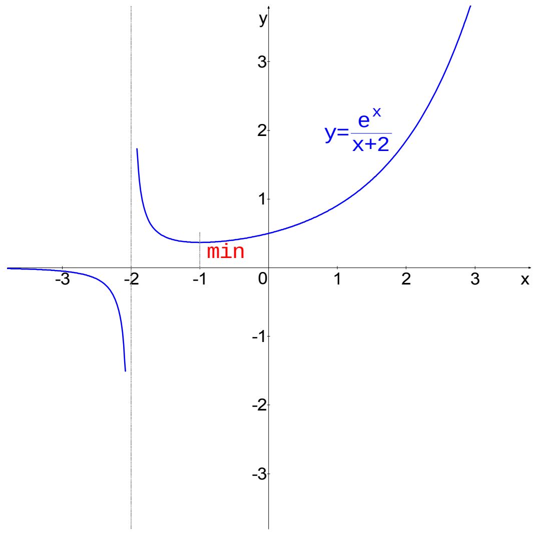
l)


MAX
y=e^√(1-x^2)

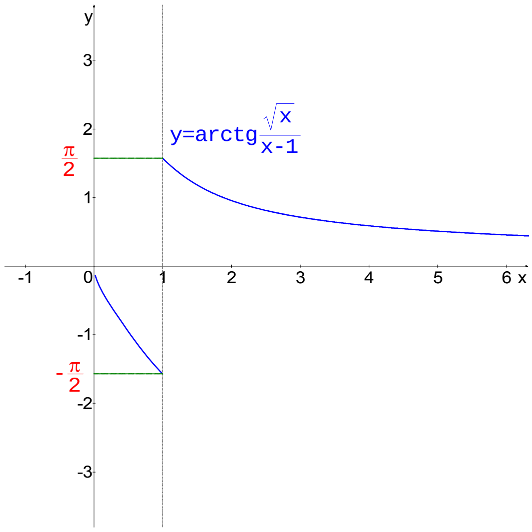
m)


y=(x+1)/(x^2+2x)
IB

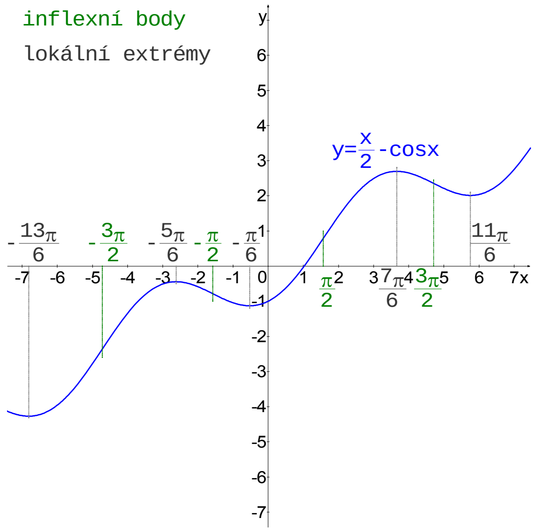
n)


y=e^x/(x+2)
min

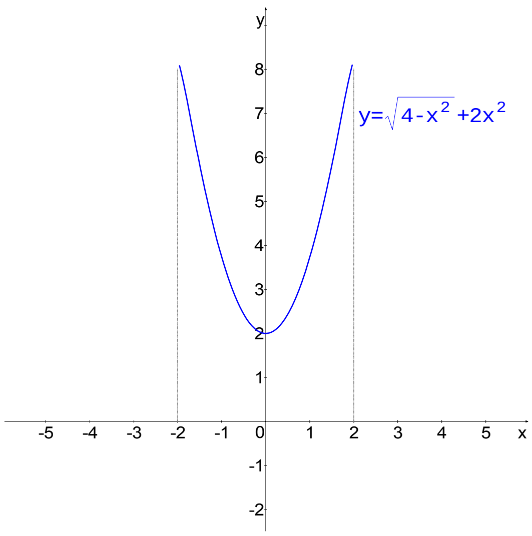
o)


y=arctg √x/(x-1)
π/2
-π/2

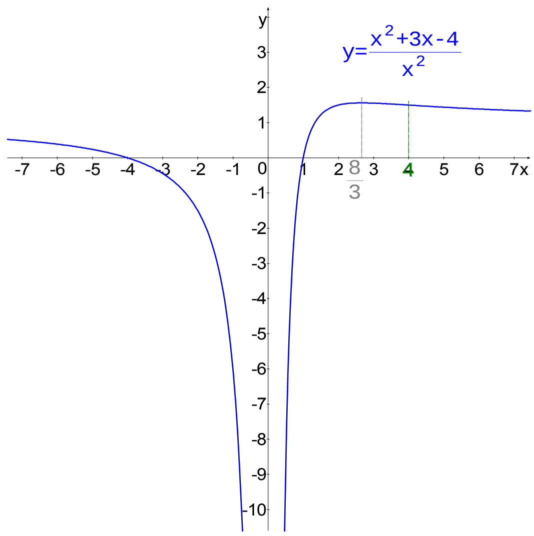
p)


inflexní body
lokální extrémy
y=x/2-cosx
-13π/6
-3π/2
-5π/6
-π/2
-π/6
π/2
7π/6
3π/2
11π/6

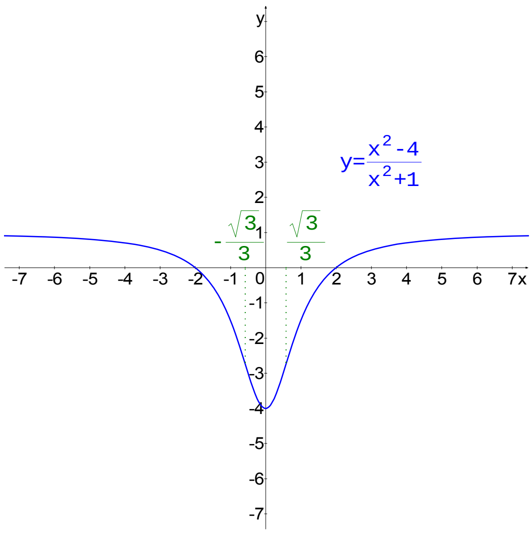
q)


y=√(4-x^2) +2x^2

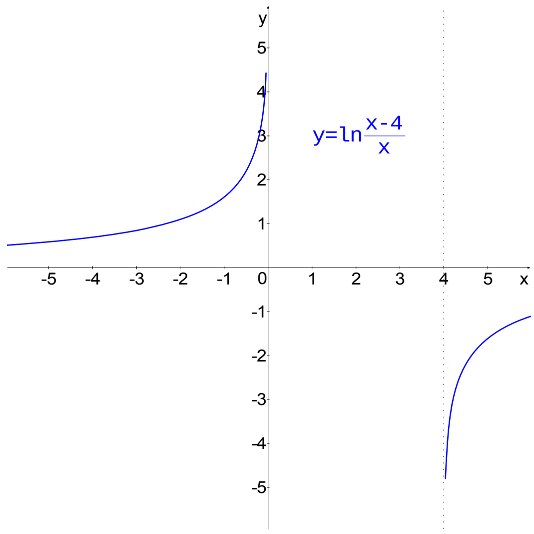
r)


y=(x^2+3x-4)/x^2
8/3

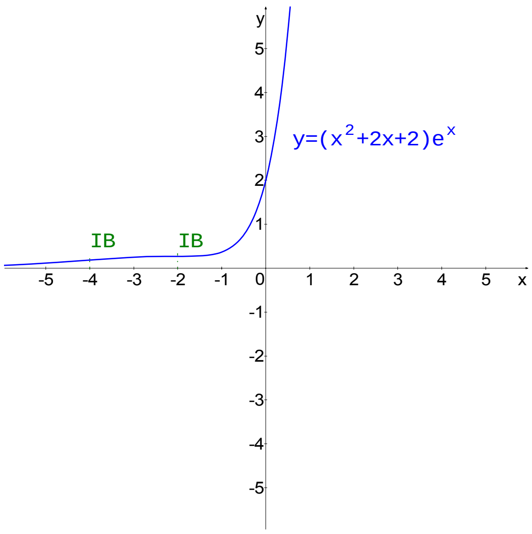
s)


y=(x^2-4)/(x^2+1)
-√3/3
√3/3

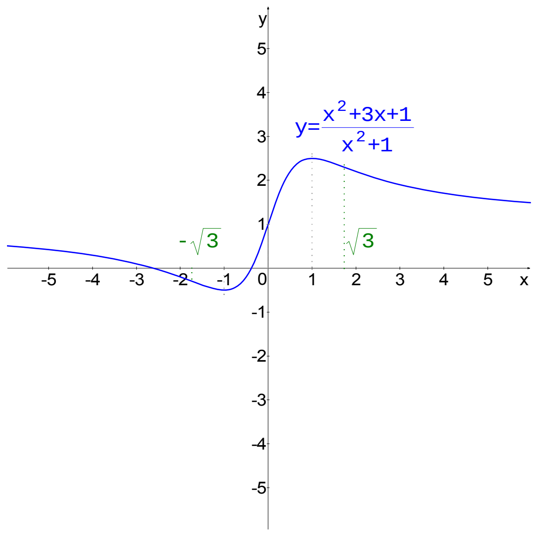
t)


y=ln (x-4)/x

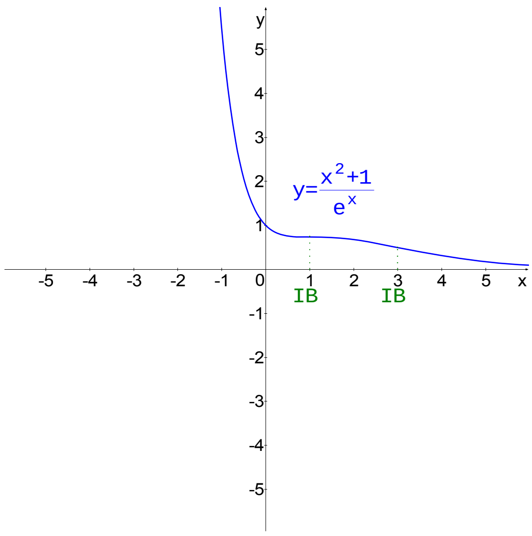
t)


y=(x^2+2x+2)e^x
IB
IB

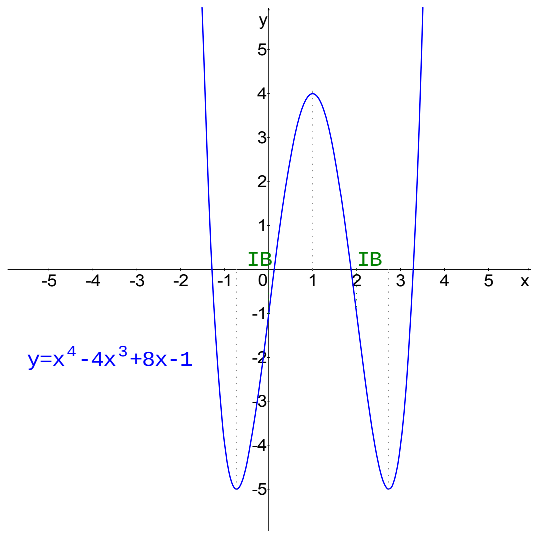
u)


y=(x^2+3x+1)/(x^2+1)
-√3
√3

v)


y=(x^2+1)/e^x
IB
IB

z)


IB
IB
y=x^4-4x^3+8x-1