Operace s přirozenými čísly – násobení, dělení

Růžena Blažková

Násobení přirozených čísel

1. Které pojmy si zopakujeme:

Násobení kardinálních čísel: $|A| \cdot |B| = |A \times B|$

Kartézský součin dvou množin: $A \times B = \{[x, y],\ x \in A \wedge y \in B\}$

Násobení přirozených čísel se v matematice opírá o násobení kardinálních čísel a o pojem kartézského součinu dvou množin. Kartézský součin dvou množin je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$ kde x patří do množiny A a zároveň y patří do z množiny B. Tento přístup je vhodný v případech, kde jsou uspořádané dvojice zřejmé, např. kdy chceme vědět, kolik slabik utvoříme ze souhlásek m, p, s, v a samohlásek a, e, i. Množina A obsahuje prvky m, p, s, v, množina B obsahuje prvky a, e, i:

		B		
		a	e	i
	m	ma	me	mi
A	p	pa	pe	pi
	s	sa	se	si
	v	va	ve	vi

Množina A má 4 prvky, množina B má tři prvky, počet všech uspořádaných dvojic je $4 \cdot 3 = 12$.

Tento postup by však nebyl vhodný v úloze: Cena 1 kilogramu jablek je 26 Kč. Kolik Kč stojí 5 kg jablek?

Násobení přirozených čísel tedy vyvozujeme na základě sčítání několika stejných sčítanců (na základě sjednocení několika množin, které mají stejně prvků).

Vlastnosti operace násobení v množině přirozených čísel: ND, A, K, EN.

Množina všech přirozených čísel s operací násobení tvoří komutativní pologrupu s neutrálním prvkem.

2. Didaktický přístup – vyvození násobení v oboru násobilek (tzv. malá násobilka)

Dobrá znalost operace násobení a základních spojů násobilky je pro děti dobrým východiskem pro zvládání dalšího učiva, kterým je dělení, dělení se zbytkem, písemné násobení a dělení, počítání se zlomky i praktické využití v aplikačních úlohách. Děti by měly nejprve pochopit **význam operace násobení**, tedy co se s čísly při násobení děje. Teprve potom by se měly snažit postupně zvládat jednotlivé spoje násobilky. Proto nejprve vyvozujeme násobilku dvou, tří, čtyř, pěti, následně další (šesti, sedmi, osmi, devíti). Až děti pochopí princip násobení, teprve potom učíme násobení číslem jedna, číslem 0 a číslem 10, protože na těchto specifických číslech děti princip násobení není tak patrný. Pokud se omezíme pouze na pamětné učení, děti nezvládají používat operaci násobení ve slovních úlohách a praktických situacích.

Násobení přirozených čísel je vyvozováno na základě sčítání několika sobě rovných sčítanců. Při vyvozování této operace vycházíme z dramatizace a z konkrétních situací, které jsou dětem blízké.

Např. *Maminka dá každému ze svých čtyř dětí dvě jablka.. Kolik jablek maminka dá dětem celkem? (Poznámka: zde není vhodné vyjádření - kolik jablek maminka rozdělí – evokuje to dělení.)*

Děti:	A	B	C	D
Jablka :	oo	oo	oo	oo

$2 + 2 + 2 + 2 = 8$

Zkráceně zapíšeme: $4 \cdot 2 = 8$

Názvy jednotlivých čísel jsou: činitel, činitel, součin.

(Poznámka: při tomto způsobu vyvozování násobení nelze tohoto příkladu použít pro spoj 2 · 4 – zde se musí znázornit dvě skupiny po čtyřech prvcích.)

Při vyvozování násobení používáme motivačních úloh, které děti osloví. Např.

- Při vyvozování násobilky čísel 2, 4, 6, 8 využíváme zvířátka, např. 2 nohy má papoušek, 4 nohy má pejsek nebo kůň, 6 noh má včela nebo moucha, 8 noh má pavouk.
- Při pečení buchet nebo vánočního cukroví sledujeme a počítáme, jak jsou na plechu umístěny jednotlivé druhy.
- Využíváme modelování ve čtvercové síti, např. 4 · 6 modelujeme:

●	●	●	●	●	●

●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●

- Ukážeme dětem „prstovou násobilku“ (podrobný popis viz Blažková a kol. 2007).
- Učíme vyjmenovávat násobky čísel vzestupně i sestupně.
- Vyznačujeme násobky čísel ve stovkové tabulce.
- Využíváme deskových her, např. loto, domino, pexeso, bingo.
- Hrajeme hru na „obchod“ a nakupujeme zboží, např. 4 jogurty po 8 Kč, 3 žvýkačky po 6 Kč, 5 lízátek po 4 Kč aj. a počítáme, kolik Kč zaplatíme.
- Využíváme obrázky různého zboží, např. ovoce a zeleniny (8 trsů banánů po 6 kusech, broskve v krabici 5 řad po 6 broskvích, 9 sáčků cibule po 10 kusech apod.), počítáme, kolik kusů je celkem.
- Využíváme oporu - součinů sobě rovných činitelů, např. $6 \cdot 6$, $8 \cdot 8$, $4 \cdot 4$ aj. Od nich pak odvozujeme další spoje, např. $7 \cdot 7 = 49$, pak $7 \cdot 6 = 42$, $7 \cdot 8 = 56$.
- Pamětné zvládnutí spojů násobení vždy opíráme.o konkrétní představy. Násobilku učíme v malých krocích, ale procvičujeme neustále.

Vysvětlíme a vhodně využíváme vlastnosti násobení:

Násobení přirozených čísel je komutativní, součin se nezmění, jestliže zaměníme činitele:

$3 \cdot 4 = 12$ $4 \cdot 3 = 12$ obecně $a \cdot b = b \cdot a$

Komutativnost násobení ilustrujeme na jednom objektu, např. máme bonboniéru, v ní jsou bonbóny uspořádány:

Ve třech řadách s čtyřech sloupcích $3 \cdot 4 = 12$

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Nebo bonboniéru pootočíme a bonbóny jsou uspořádány ve čtyřech řadách a třech sloupcích

$4 \cdot 3 = 12$

O	O	O

O	O	O
O	O	O
O	O	O

Komutativnost násobení děti využívají tak, že ze dvou spojů, např. $6 \cdot 9$ nebo $9 \cdot 6$ si vyberou ten, který je pro ně snazší.

Násobení přirozených čísel je asociativní. Činitele můžeme sdružovat, součin se nezmění, např.

$(4 \cdot 2) \cdot 5 = 4 \cdot (2 \cdot 5)$ obecně $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$8 \cdot 5 = 4 \cdot 10 = 40$

Asociativnosti násobení využíváme pro výhodnější počítání (součiny 10, 100, atd.) nebo při násobení mimo obor násobilek (viz dále).

Násobení číslem 1

Násobíme–li dané přirozené číslo číslem 1, součin je roven tomuto číslu (číslo se nezmění). Volíme např. motivační příklad:

Dědeček dal šesti vnukům po jednom jablku. Kolik jablek dal vnukům celkem?

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	1	1

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

$6 \cdot 1 = 6$

Tímto způsobem vyvodíme snadno spoj $6 \cdot 1 = 6$, avšak spoj $1 \cdot 6 = 6$ (na jedné skupině se šesti prvky není patrné násobení) ilustrujeme s využitím komutativnosti násobení.

$6 \cdot 1 = 6, \quad 1 \cdot 6 = 6$ obecně $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Číslo 1 je neutrálním prvkem pro násobení.

Násobení číslem 0

Násobíme-li dané přirozené číslo číslem 0, součin je roven 0.

Jestliže babička dala každému z pěti vnuků nula bonbónů, kolik bonbónů jim dala celkem?

A B C D E

0 0 0 0 0

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$5 \cdot 0 = 0$$

Při vyvozování spoje $5 \cdot 0 = 0$ máme možnost znázornění na konkrétním případě, avšak u spoje $5 \cdot 0 = 0$ tato možnost není (nelze znázornit nula skupin s pěti prvky), proto využíváme komutativnosti násobení.

$$5 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 5 = 0$$

obecně $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Číslo 0 je agresivním prvkem pro násobení.

3. Násobení mimo obor násobilek zpaměti

a) Příklady typu $4 \cdot 30$

Vhodné je využít rozkladu čísla 30 asociativnosti násobení, tj.

$$4 \cdot 30 = 4 \cdot (3 \cdot 10) = (4 \cdot 3) \cdot 10 = 12 \cdot 10 = 120$$

Stačí tedy, abychom vynásobili počet desítek a tento součin vynásobili deseti.

b) Příklady typu $5 \cdot 12$

Využijeme rozkladu čísla 12 na desítku a jednotky a roznásobení součtu v závorce:

$5 \cdot 12 = 5 .\cdot (10 + 2) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 50 + 10 = 60$

4. Některé problémy dětí:

- Děti nepochopí operaci násobení, naučí se spoje zpaměti a neumí je použít v úlohách.
- Zaměňují operaci násobení a zápis čísla: $4 \cdot 4 = 44$, $6 \cdot 5 = 65$
- Chybují při vyvození násobení, dominantní je pro ně jeden činitel, např.
  $5 \cdot 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
- Děti stále používají pouze řadu násobků a nejsou schopny naučit se spoje násobení, aniž by musely vyjmenovat řadu násobků.
- Děti některé násobky zaměňují, např.
  $6 \cdot 8 = 54$, $9 \cdot 6 = 56$, $8 \cdot 9 = 80$, $7 \cdot 8 = 64$, $7 \cdot 7 = 53$,
  $5 \cdot 7 = 37$ $6 \cdot 4 = 34$
- Převažuje dominance některého čísla, např.

$2 \cdot 9 = 19$, $4 \cdot 4 = 14$, $8 \cdot 8 = 68$

- Děti zaměňují operace násobení a sčítání, např.
  $50 \cdot 4 = 54$

- Nerozlišují mezi rozvojem čísla v desítkové soustavě a násobením, např.:
  $13 \cdot 2 = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 16$
  $32 \cdot 3 = 30 + 2 \cdot 3 = 36$

5. Písemné násobení

Zvládnutí algoritmu písemného násobení vyžaduje jednak znalost pamětného násobení, jednak schopnost přesně postupovat a zapisovat čísla do schématu násobení. Písemné násobení vyžaduje zapojení všech typů paměti dítěte. Uvědomme si, co všechno musí dítě zvládnout, když např. násobí písemně

$$\begin{array}{r} 156 \\ \cdot\ \underline{\ \ 8} \\ 1256 \end{array}$$

Nejprve z dlouhodobé paměti vyvolá spoj $8 \cdot 7 = 56$. Číslo 6 zapíše, 5 uloží do pracovní paměti. Dále násobí $8 \cdot 5 = 40$ – opět využívá dlouhodobou paměť, potom přičte 5, které má uloženo v pracovní paměti, $40 + 5 = 45$, zapíše 5 a násobí dále $8 \cdot 1 = 8$, přičte 4, $8 + 4 = 12$ a zapíše.

To je velký nápor na myšlenkovou činnost dítěte. Zároveň se ale zdokonaluje v koncentraci, protože při provádění tohoto algoritmu se musí plně soustředit na prováděné operace a postupy při zápisu čísel a nemůže myslet na nic jiného. Je však třeba počítat s tím, že pokud má dítě problémy s násobilkou, tak buď se plně soustředí na správnost násobení a chybuje v zápisu v algoritmu, nebo algoritmus zapisuje správně, ale chybuje v násobilce. Některé děti nejsou schopny soustředit se současně na obojí.

Nejprve se vyvozuje písemné násobení jednociferným činitelem, a to ve velmi jemné metodické řadě, kdy v každém novém příkladu je vždy jen jeden nový jev. Pokud by bylo možné, ukážeme dětem, jak by se postupovalo při pamětném počítání a jak se výpočet zjednoduší písemným algoritmem.

Př. vynásobte $123 \cdot 3$

Při pamětném postupu bychom násobili od stovek:

$$123 \cdot 3 = (100 + 20 + 3) \cdot 3 = 300 + 60 + 9 = 369$$

Při písemném násobení postupujeme od jednotek:

123 elementární kroky: $3 \cdot 3 = 9$

$$\begin{array}{r} \cdot\ \underline{\ \ 3} \\ 369 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 3 \cdot 2 = 6 \\ 3 \cdot 1 = 3 \end{array}$$

První příklady jsou voleny tak, aby násobení bylo bez přechodu přes základ a aby děti zvládly postup při zápisu jednotlivých součinů.

Další příklady volíme tak,

a) aby byl nejprve přechod mezi jednotkami a desítkami $\begin{array}{r} 125 \\ \cdot\ \underline{\ \ 3} \end{array}$

b) aby byl přechod mezi desítkami a stovkami $\begin{array}{r} 162 \\ \cdot\ \underline{\ \ 3} \end{array}$

c) aby byly přechody mezi všemi řády $\begin{array}{r} 265 \\ \cdot\ \underline{\ \ 3} \end{array}$

Násobení dvojciferným činitelem se vyvozuje ve dvou fázích, nejprve se násobí násobky čísla 10, např. $\begin{array}{r} 123 \\ \cdot\ \underline{30} \end{array}$

potom dvojciferným činitelem, např. $\begin{array}{r} 123 \\ \cdot\ \underline{32} \end{array}$

Respektuje se analogický postup, jako při násobení jednociferným činitelem.

- Příklady typu $\begin{array}{r} 123 \\ \cdot\ \underline{30} \end{array}$

je vhodné ilustrovat takto: 30 = 3 · 10, nejprve tedy vynásobíme deseti (napíšeme nulu) a potom třemi: $\begin{array}{r} 123 \\ \cdot\ \underline{30} \\ 3690 \end{array}$

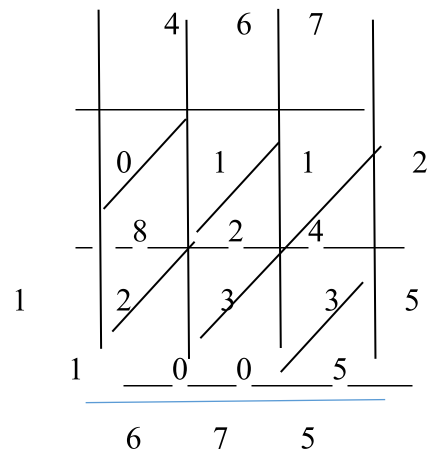
- Příklady typu $\begin{array}{r} 123 \\ \cdot\ \underline{32} \end{array}$

řešíme s využitím obou dříve naučených postupů.

$$\begin{array}{lrl} & 123 & \\ & \cdot\ \underline{32} & \\ \text{násobíme číslem 2} & 246 & \\ \text{násobíme číslem 30} & \underline{3690} & \text{(nulu později nepíšeme, částečný součin} \\ & 3936 & \text{posuneme jedno místo doleva).} \end{array}$$

V posledních letech se v některých učebnicích uvádí postup písemného násobení indickým způsobem, který je jedním z mnoha historických algoritmů. Postup tzv. indického násobení je velmi starý, vznikl v Indii ještě před vynalezením nuly, nazývá se gelosia. Byl popsán již v roce

1494 florentským matematikem Lucou Pacioli (Balada 1959). Čísla zapisují do určitého schématu. Např. součin čísel 467 · 25 se zapisuje takto:



Tedy 467 · 25 = 11 675.

6. Některé problémy dětí

- Děti přenášejí postup z písemného sčítání, násobí mezi sebou jednotky a desítky, např.:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot\,\underline{23} \\ 86 \end{array}$$

násobí: 3 · 2 = 6, 2 · 4 = 8.

- Zapisují dílčí součiny do jednoho řádku, např.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot\,\underline{21} \\ 8442 \end{array}$$

násobí 1 · 2 = 2, 1 · 4 = 4, 2 · 2 = 4, 2 · 4 = 8 nebo 1 · 42 = 42, 2 · 42 = 84

- Násobí pouze jednotkami druhého činitele, násobení nedokončí, např.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot\,\underline{23} \\ 126 \end{array}$$

násobí 3 · 2 = 6, 3 · 4 = 12.

- Nezvládají přechody přes základ:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \cdot\ \underline{\ \ 8} \\ 3240 \end{array}$$

počítají $8 \cdot 5 = 40$, $8 \cdot 4 = 32$

- Mají problémy s čísly s nulami:

$$\begin{array}{r} 304 \\ \cdot\ \underline{\ \ 2} \\ 68 \end{array} \quad \text{násobí jako} \quad \begin{array}{r} 34 \\ \cdot\ \underline{\ 2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 564 \\ \cdot\ \underline{205} \end{array} \quad \text{násobí jako} \quad \begin{array}{r} 564 \\ \cdot\ \underline{25} \end{array}$$

- Nezapisují správně částečné součiny:

$$\begin{array}{r} 257 \\ \cdot\ \underline{\ \ 35} \\ 1285 \\ \underline{\ \ \ 771} \\ 2056 \end{array}$$

.- Přičítají v přechodech vždy druhého činitele, např.:

$$\begin{array}{r} 75 \\ \cdot\underline{5} \\ 405 \end{array}$$

počítají $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 7 = 35$, $35 + 5 = 40$

Dělení přirozených čísel

Dělení přirozených čísel je definováno jako inverzní operace k násobení, tj. jestliže pro přirozená čísla $a, b, c \neq 0$ platí: $a \cdot b = c$, pak $c : a = b, c : b = a$.

Např. $4 \cdot 3 = 12$, pak $12 : 4 = 3$. $12 : 3 = 4$

Názvy jednotlivých čísel:

a	$:$	b	$=$	c
dělenec		dělitel		podíl

Dělení není v množině všech přirozených čísel neomezeně definované, proto nemá žádné další vlastnosti.

Z dříve uvedených operací je dělení pro děti nejnáročnější operací, proto by bylo vhodné věnovat velkou pozornost jeho vyvození a vysvětlení jeho významu.

Vyvození dělení na ZŠ

V praktických příkladech z běžného života používáme dělení ve dvou významech. Buď dělíme na několik stejných částí, nebo dělíme po několika prvcích. Oba tyto významy dělení by měly být dětem vysvětleny, aby uměly dělení používat v aplikačních úlohách. Vycházíme z dramatizace a manipulativní činnosti dětí.

Dělení na několik stejných částí

Př. Dvanáct švestek rozdělte mezi čtyři děti tak, aby měly všechny stejně. Kolik švestek bude mít každé dítě?

Postupně dáváme každému dítěti po jedné švestce, až všechny švestky vyčerpáme:

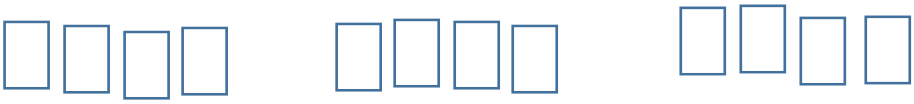
A	B	C	D
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Se slovním komentářem zapíšeme příklad:
Kolik jsme rozdělovali švestek? 12
Kolik bylo dětí? 4
Kolik švestek má každé dítě? 3
Zapíšeme příklad: $12 : 4 = 3$ Podíl je počet prvků každé z částí.
Odpověď: Každé dítě má 3 švestky.

Zkouška: $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ nebo $4 \cdot 3 = 12$

Dělení po několika prvcích (podle obsahu)

Př. Dvanáct sešitů rozdělte na hromádky po čtyřech. Kolik hromádek vytvoříte?



Zápis příkladu: $12 : 4 = 3$ Podíl je počet vytvořených skupin.

(Poznámka: příklad je stejný jako v předcházející úloze, avšak kontext je jiný)

Odpověď: Vytvoříme 3 hromádky.

Zkouška: $4 + 4 + 4 = 12$ nebo $3 \cdot 4 = 12$

Zvláštní případy při dělení

- Dělení číslem 1: $5 : 1 = 5$, obecně $a : 1 = a$ (např. 5 jablek rozděl po jednom, kolik dětí podělíš?)
- Dělenec se rovná děliteli: $5 : 5 = 1$, obecně $a : a = 1,\ a \neq 0$ (např. 5 jablek rozděl pěti dětem, kolik jablek bude mít každý?)
- Dělenec je roven nule: $0 : 5 = 0$ obecně $0 : a = 0,\ a \neq 0$ (např. nula jablek rozděl pěti dětem, kolik jablek bude mít každé dítě?)
- Dělení nulou: $5 : 0 =$??? Zpravidla se děti dozví, že nulou nedělíme, avšak zdůvodnění proč, se jim nedostane, nebo není právě věrohodné.

Jak můžeme na prvním stupni ZŠ zdůvodnit, pro nulou nedělíme? Děti někdy zapisují $5 : 0 = 5$ nebo $5 : 0 = 0$. Je vhodné ukázat dětem, že neexistuje přirozené číslo, pro které bychom mohli po vydělení nulou provést zkoušku správnosti. Kdyby např. $5 : 0 = 0$, muselo by platit $0 \cdot 0 = 5$. To však neplatí, protože $0 \cdot 0 = 0$. Kdyby $5 : 0 = 5$, muselo by platit $5 \cdot 0 = 5$. To neplatí, protože $5 \cdot 0 = 0$.Takto můžeme postupovat a hledat číslo, pro které by vyšla zkouška správnosti. Takové číslo však nenajdeme. Snažíme se přivést děti k tomu, že nenajdeme přirozené číslo, pro které bychom po vydělení nulou mohli provést zkoušku správnosti.

(Poznámka. Obecněji, jestliže by platilo pro $a \neq 0$ $a : 0 = x$, pak by muselo platit $x \cdot 0 = a$. To však neplatí, protože $x \cdot 0 = 0$ pro každé přirozené x.)