

IMAK07 DIDAKTIKA MATEMATIKY

Konzultace 1 - 1. část

Růžena Blažková

1. Co rozumíme pod pojem „didaktika matematiky“

Nelze použít výstižnějšího vyjádření, než to, které uvedl J.A.Komenský ve své Didaktice (Didaktika analytická (7)): „Didaktika jest umění jak dobře učit. Učiti značí působiti, aby tomu, kdo něco zná, se naučil také někdo jiný a znal to“. Vymezení pojmu „didaktika matematiky“ se objevuje v různých publikacích většinou se snahou vyjádřit její postavení mezi vědními obory, kterými jsou matematika, pedagogika a obecná didaktika. Např. Slovník školské matematiky (14) pod heslem „didaktika matematiky“ uvádí: „didaktika matematiky – mezní vědní disciplína mezi matematikou a pedagogikou, která se zabývá různými otázkami školské matematiky na všech typech škol, tj. jejím obsahem i metodami jak vyučovat a jak se učit matematické“.

Didaktika matematiky je vědecká disciplína, která řeší speciální otázky výuky matematiky na jednotlivých stupních a typech škol. Vymezuje cíle a obsah učiva matematiky, doporučuje vhodné metody a postupy vyučování, organizační formy vyučování, respektuje psychologické zákonitosti učení a zajišťuje technologii vyučování.

Úvahu o vztahu matematiky a didaktiky uvádí M. Hejný v publikaci Teória vyučovania matematiky:

„Termín – vyučovanie matematiky – sa skladá z dvoch slov. Prve vyjadruje obsah toho, čo sa učí, druhé činnosť, ktorú učiteľ vykonáva. Matematika, rovnako jako vyučovanie, má svoju štruktúru, logiku, spôsob myslenia. Medzi oboma oblasťami je značný rozdiel. Matematika pracuje s idealizovanými objektmi, axiomatically presne, s úplnou argumenáciou. Vyučovanie sa týka ľudí a každá snaha o axiomatizáciu štruktúry metodiky matematiky vedie nevyhnutne k znásilneniu skutočnosti. V metodike matematiky, jako konečne v každej „reálnej“ vedeckej disciplíne, existujú javy, objekty, situácie, príklady, ktoré sú typické, kryštalické, ale existujú aj také, ktoré sú hmlisté, hraničné, nejasné. Nie je to nedostatkom našich vedomostí, ale podstatou vecí.“

Řešení hlavního problému:

„učit se sám něčemu“

„učit někoho“

„naučit někoho něčemu“

je jedním ze základních pilířů didaktiky oborové.

2. Specifika didaktiky matematiky

Didaktika matematiky a matematika jako vyučovací předmět mají svá výrazná specifika, která je poněkud odlišují od ostatních oborových didaktik a vyučovacích předmětů.

Jde zejména tato specifika:

1. Vysoká abstraktnost matematiky. Matematické pojmy vznikly na základě abstrakcí z reálných situací (nikdo nikdy nemůže vidět přímku, rovinu či číslo, ale jejich představy v mozku téměř u každého existují). Pojmy se nejprve budují na základě intuice a teprve mnohem později je možné budovat systém vycházející z deduktivních přístupů.
2. Matematika je předmět, ve kterém je znalost a pochopení prvků vyšší úrovně podmíněna pochopením a znalostí prvků nižší úrovně.
3. V některých případech je problematická motivace matematického učiva, neboť buď je obtížné nalézt reálný model v praxi (např. pro násobení dvou záporných čísel), nebo je praktické využití hodně vzdálené (např. úpravy lomených algebraických výrazů). Na prvním stupni ZŠ je ve většině případů motivace z reálného života možná.
4. Výuku matematiky nelze opírat jen o formulování vztahů, pouček a vzorců, které si mají studenti a žáci zapamatovat.
5. Přístupy typu: „já jim to řeknu“ (rozuměj – učitel žákům) nebo „já jim to ukážu“ nepřinášejí potřebný výukový efekt. Poznatky jsou nepřenosné. K matematickým poznatkům by se žák měl dobrat vlastní konkrétní i myšlenkovou činností.

Didaktika matematiky nemůže naučit studenty všemu, co by bylo třeba k tomu, aby uměli učit a naučit matematice. To nemůže být ani jejím cílem, a to nejen vzhledem k rozsahu matematiky na školách všech typů. Ale může je naučit cennější hodnoty, kterými jsou metody práce a schopnost nazírání, aby se učitelé snažili vést své žáky po cestě poznání. Může jim doporučit některé postupy, které se v praxi osvědčily, ale měla by jim ponechat dostatek prostoru pro jejich vlastní tvořivou práci. V didaktice matematiky je třeba vyvarovat se dvou extrémů: přístupů, které vycházejí jen z matematiky, předkládají krásu její logické výstavby a jejích výsledků, avšak předpokládají žáka, který se matematiku učit chce a má zájem řešit problémy a přemýšlet, a nebo přístupů, které vycházejí z podrobných návodů, silně prakticistických, ovlivněných třeba jen jedinou zkušeností bez opory o zákonitost vytváření matematických pojmů v hlavičkách dětí a někdy i s chybami .

3. Vztah matematiky a didaktiky matematiky

Co by měla Didaktika matematiky zvládnout:

Nelze dávat přednost jednomu z dále uvedených požadavků, ale je třeba realizovat „a zároveň“, vše dále uvedené:

a) Didaktika matematiky zaměřená na obsah učiva

Matematika jako vědní disciplína obsahuje obrovské množství poznatků a jen malá část tvoří obsah učiva matematiky jako vyučovacího předmětu na základních školách. Avšak vědecké matematické poznatky nemohou být ve většině případů zprostředkovávány ve své abstraktní a teoretické podobě ani v axiomatickém systému, jak jsou v matematice budovány. Pro výuku matematiky je nezbytné provést tzv. didaktickou transformaci teoretického matematického základu do učiva matematiky tak, aby učivo bylo přiměřené žákům příslušného věku a bylo podáno jazykem jim srozumitelným a s využitím matematického aparátu, který mají žáci právě k dispozici a zároveň aby nebylo v rozporu s matematickou správností. To, co se žák naučí na nižším stupni, by se měl naučit tak, aby se v budoucnu nemusel jistě poznatky učit jinak (tzv. „přeučovat“). Např. vysvětlení skutečnosti, že „nelze dělit nulou“ je možné zdůvodnit určitým způsobem ve 2. -3. ročníku základní školy, jiným

způsobem v 7. ročníku ZŠ, dalším na gymnáziu a ještě jiným na škole vysoké s využitím pojmu limita, ve všech případech však matematicky správně.

Studenti, budoucí učitelé matematiky, by měli mít jasno v matematických pojmech a vztazích, měli by si ujasnit, co o pojmech vědí sami z odborné přípravy, co z toho je v učivu matematiky příslušného stupně školy a jakým způsobem jsou pojmy a vztahy mezi nimi zavedeny.

Lze si klást otázku, do jaké míry jsou studenti schopni sami provádět didaktickou transformaci matematického učiva a do jaké míry vidí ve své odborné přípravě matematickou podstatu svého budoucího učitelského působení. Vzhledem k tomu, že studenti, kteří mají hlubší zájem o matematiku, studují také na mnoha jiných vysokých školách nejen přírodovědného a technického zaměření, je třeba všechny studenty, kteří mají zájem být učiteli matematiky, na toto poslání připravovat. Pokud někteří pociťují propast mezi odbornou přípravou a přípravou didaktickou, je třeba jim ukázat, že všechno to, co se učí v teoretických předmětech se v určité podobě uplatní v učivu matematiky na školách. Jako příklad lze uvést např. číselnou osu, znázorňování obrazů čísel na číselné ose a využití číselné osy k porovnávání přirozených čísel. Pokud naučíme děti na prvním stupni porovnávat přirozená čísla pomocí vzdálenosti od počátku číselné osy (od nuly), budou mít problémy s porovnáváním čísel záporných.

b) Didaktika matematiky zaměřená na poznávací procesy žáka

Hlavním kritériem pro úspěšnou práci učitele matematiky je jeho vztah k dětem. Student, který má zájem pracovat s dětmi na základní škole, zejména na jejím druhém stupni, je velmi cennou devizou. Pokud se chce skutečně stát učitelem, zpravidla vyvine hodně úsilí, aby se jím stal.

Pro úspěšnou výuku matematiky je nezbytné sledovat, jak vnímá žák to, co je mu předkládáno, jak se umí vyrovnat s abstraktními matematickými pojmy, jaké postupy jsou pro žáky optimální, zda žák vidí v poznávacím procesu to, co jeho učitel. Každé dítě je výrazná individualita, má svůj vlastní matematický model, který je třeba odhalit a rozvíjet. Přitom je nutné respektovat skutečnost, že vytváření matematických poznatků je nepřenosné (přenosné jsou pouze informace). Při konkrétní práci s dětmi si vnímavý učitel všímá myšlenkových pochodů žáka a vhodně je využívá, eventuálně citlivě usměřňuje. Výzkum zaměřený na poznávací procesy žáka obohatí učitele matematiky i učitele didaktiky matematiky o někdy neočekávané výsledky, které pak napomohou volbě strategie vyučovacího procesu. Názory některých učitelů či rodičů „přece když žák spočítá 200 příkladů na dělení přirozených čísel, tak se to musí naučit“ svědčí o malé snaze o pochopení individuality žáka a jeho vlastních komunikačních cest pro pochopení určitého tématu matematiky. Mnoho cenných zkušeností může získat student – budoucí učitel matematiky, při práci s dětmi se specifickými vzdělávacími potřebami – ať již se žáky talentovanými pro matematiku nebo se žáky s problémy v matematice. Také zvládnutí problematiky komunikace se žáky v matematice vyžaduje mnoho znalostí a hlavně mnoho přemýšlení.

c) Didaktika matematiky zaměřená na metody práce

Učitel matematiky ve své práci využívá jednak metod práce v matematice (analýza, syntéza, indukce, dedukce, zobecňování, abstrakce apod.), a samozřejmě výukových metod práce, včetně všech dostupných prostředků moderních informačních a sdělovacích technologií

Mezi učiteli z praxe i studenty stále ještě převládá názor, že transmisivní přístup k vyučování matematice, kdy učitel předvede potřebné postupy a žáci je reprodukují, je

časově neoptimálnější a nejspolehlivější. Snaha přesvědčit je o možnostech jiných přístupů se setkává s nedůvěrou. Avšak až sami na sobě poznají postupy některých jiných přístupů, např. konstruktivistických, uznají jejich přednosti. Opět existuje propast mezi teoretickým zvládnutím výukových metod a jejich uplatňováním ve vyučovacím procesu. Navíc, když studenti sami na žádném typu školy jiné přístupy, než transmisivní, sami nezažili, nemůžeme se divit, že je opět kopírují.

d) Sledování změn – buď změn v obsahu předmětu matematika nebo kurikulárních změn

V průběhu posledních 50 – 60 let nastalo mnoho změn v oblasti školního vzdělávání. Připomeňme jen např. změny v obsahu matematiky z poválečných let, kdy byla zavedena jedenáctiletá střední škola a obsah matematiky doznal změn, následně zavedení devítileté školní docházky a SVVŠ, změny v souvislosti se zaváděním množinově logického pojetí výuky matematiky, změny po roce 1990, v současnosti příprava na výuku podle Školních vzdělávacích programů a mnoho dalších. Současná situace s výukou online v souvislosti s problémy s koronavirem zcela změnila možnosti vzdělávání žáků. To vyžaduje mnoho úsilí učitelů matematiky, neustálé sebevzdělávání a schopnost změny realizovat.

4. Didaktické principy

a) Principy plynoucí z výchovně vzdělávacích cílů a rozvoje kompetencí žáků:

Princip vědeckosti

Princip cílevědomosti

Princip výchovnosti vyučování

Princip spojení školy se životem

Princip spojení teorie s praxí

b) Principy týkající se obsahu výuky matematiky

Princip přiměřenosti

Princip soustavnosti

Princip postupnosti

Princip názornosti

c) Principy, které prostřednictvím učiva ovlivňují proces učení a vyučování matematice

Princip uvědomělosti

Princip aktivity

Princip trvalosti

Princip individuálního přístupu k žákům

Princip zpětné vazby

5. Výukové metody

Klasické

- Metody slovní (vyprávění, vysvětlování, přednáška, rozhovor, práce s textem).
- Metody názorně demonstrační (pozorování, předvádění, práce s obrazem, instruktáž).

- Metody dovednostně praktické (napodobování, manipulativní činnosti, experiment, laborování, vytváření dovedností).

Aktivizující

- Metody diskusní
- Metody heuristické
- Metody problémové
- Metody situační
- Metody inscenační
- Didaktické hry

Komplexní

- Frontální výuka
- Skupinová výuka, kooperativní, partnerská
- Individuální a individualizovaná výuka
- Samostatná práce
- Projektová výuka
- Výuka podporovaná počítačem
- E-learning
- Výuka dramatem
- Otevřené učení
- Výuka online

Interaktivní

- Nabídnout žákům zábavnější a méně stereotypní formu výuky a tím zvýšit jejich motivaci k učení
- Zapojit do procesu samotné žáky, aby nebyli jen pasivními posluchači, ale aby si vytvářeli matematické poznatky vlastní činností
- Tvůrčí atmosféra
- Prostor pro vlastní názory a myšlenky
- Zapojení všech žáků
- Volba přitažlivých témat
- Úkoly jasně, stručně, konkrétně formulované
- Pocit zodpovědnosti při plnění úkolů
- Pozitivní zpětná vazba

Výuka online

- Promyšlená příprava
- Komunikace se žáky
- Promyšlené zadávání dalších úkolů
- Respektování psychologické hygieny
- Spolupráce s ostatními pedagogy

Přístupy:

Transmisivní

Konstruktivistický

Modely výuky

- Model pedeutologický – učitel je rozhodující činitel, který organizuje a zajišťuje všechny výukové aktivity

$$U \rightarrow \check{Z}$$

- Model pedocentrický – středem edukačního dění je žák, učitel je jen poradce

$$\check{Z} \rightarrow U$$

- Model interaktivní (komunikativní) – staví do popředí vzájemnou spolupráci učitele a žáka

$$U \leftrightarrow \check{Z}$$

6. Kurikulární dokumenty

Rámcový vzdělávací program

Školní vzdělávací program

Tématické rozvržení učiva

Příprava na vyučovací hodinu

Literatura

1. BROCKMAYEROVÁ-FENCLOVÁ, J., ČAPEK, V., KOTÁSEK, J.: *Oborové didaktiky jako samostatné vědecké disciplíny*. In: *Pedagogika* roč. XLX, 2000, s. 23 – 37.
2. HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava: SPN, 1990.
3. HEJNÝ, M., KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál 2001.
4. HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. (editoři): *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. a 2. díl*. Praha: PdF UK, 2004.
5. KOMENSKÝ, J. A.: *Didaktika analytická*. Praha 1947.
6. KVĚTOŇ, P.: *Kapitoly z didaktiky matematiky*. Ostrava, PdF, 1982.
7. MAŇÁK, J., ŠVEC, V.: *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003.
8. NOVÁK, B.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. Olomouc, PdF UP
9. Kolektiv: *Slovník školské matematiky*. Praha: SPN, 1981.
10. Rámcový vzdělávací program. www.vuppraha.cz

Konzultace 1 – druhá část

Budování základních pojmů v matematice

Na prvním stupni základní školy se žáci poprvé seznamují s matematickými pojmy. Je proto třeba vytvářet správné představy matematických pojmů, avšak způsobem žákům srozumitelným a přiměřeným.

V matematice vědecké jsou základní pojmy uvedeny prostřednictvím axiomů, z nich se pak odvozují další pojmy a ty se zavádějí pomocí definic. Vlastnosti pojmů se zavádějí pomocí matematických vět. (Připomeňte si, jaké požadavky musí splňovat axiomatický systém, jaké druhy definic znáte, co je matematická věta – viz předchozí ročníky studia).

Tento přístup není možné uplatňovat ve školské matematice. Žákům přibližujeme pojmy intuitivně, na základě názoru, v žádném případě nevyžadujeme definice pojmů.

Vytváření základních pojmů na 1. stupni ZŠ

Pojem – obecná představa (osob, předmětů, jevů, dějů), jejíž obsah je určen souhrnem podstatných vlastností

- představa – názor, mínění, udělat si o něčem správnou představu, mít o tom pojem, chápat něco, rozumět něčemu
- jedna z forem vědeckého poznání, která odráží v myšlení podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů.

Každý pojem má obsah a rozsah.

Obsah pojmu – souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické.

Rozsah pojmu – množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem

Jestliže se rozšíří obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a naopak.

Pojmy individuální, obecné

Konkrétní, abstraktní

Klasifikace pojmů (rozklad množiny)

- třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku
- vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu)
- disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy

Zavádění základních pojmů:

Axiomy – věty, jejichž kriteriem pravdivosti je praxe

axiomatická soustava musí být úplná, bezesporná, žádný axiom nelze odvodit z ostatních

Odvozené pojmy se zavádí pomocí definic.

Matematická definice

Chybné definice

Vlastnosti pojmů uvádíme matematickými větami.

S matematickými pojmy se žáci seznamují postupně a tyto pojmy se jim stávají jasnější, čím lépe poznávají jejich obsah a rozsah. Zpravidla se to děje postupně – na určitém stupni není možné, aby se žáci seznámili s celým obsahem i rozsahem pojmu

Pojmotvorný proces

(Vygotskij L. S., Piaget, J.)

Pojmotvorný proces:

1. Je výsledkem konkrétní činnosti člověka a jeho komunikace s jinými lidmi. Touto aktivitou si člověk přivlastňuje hotové, historicky utvořené významy.
2. Je organickou součástí rozvoje celé psychiky člověka.
3. Neutváří ve vědomí pojmy izolovaně, ale strukturalizovaně ve složitých sémantických sítích.

Pojmotvorný proces studujeme jako proces rozložený do čtyř etap (Hejný s. 28):

1. Synkretická etapa – z množství zážitků se vyčleňuje skupina takových, které jsou asociované s budoucím pojmem. Ve skupině se ještě nediferencovalo ani v představě, ani v činnosti, ani ve slovníku. Např. manipulace s oblémi předměty (kulatý tvar).
2. Etapa předmětných představ – pojem se postupně předdiferencuje, ale zůstává vázaný na konkrétní jevy reality. Manipulace s pojmem je předmětná. Např. odděluje se koule od kruhu (míč, kolečko).
3. Etapa intuitivně abstraktních představ – pojem se stává prvkem rodících se idealizovaných a abstraktních představ. Manuální operace jsou postupně nahrazovány myšlenkovými. Např. kružnice a její rýsování.
4. Strukturální etapa – pojem se stává prvkem axiomatizované teorie.

Nedostatky pojmotvorného procesu:

Slovům či znakům je přiřazena chybná představa (představa trojúhelníku- jen jeho hranice)

Verbalismus, formalismus

Slovům a znakům není přiřazena představa

Představám chybí jazykové vyjádření

Konzultace 1 – třetí část

Přirozená čísla

1. K zamyšlení

Pokuste se vysvětlit vlastními slovy, co chápete pod pojmy:

Číslo

Číslice

Číslovka

Číselná soustava

Odpověď na otázku, co je **číslo**, je poměrně složitá. Také by bylo třeba upřesnit, o jaké číslo se jedná. Viz část 2.

Číslice je znak k zápisu čísla. Používáme 10 číslic (mula, jednička, dvojka ... devítka). Pomocí těchto deseti znaků dokážeme zapsat jakékoliv číslo. Děti se učí číslice zapisovat. Podle současné normy se píše číslice 2, 5, 7 s rovnými vodorovnými úsečkami (nikoliv s vlnovkou). Některým dětem může činit problémy rozlišování některých tvarově podobných číslic (např. 6, 9), některým dětem činí problémy jednostranně orientované číslice (např. 3, 7), nevědí, na kterou stranu je mají zapsat, píše je obráceně orientované.

Pozor: nesmíme zaměňovat pojmy číslo a číslice. Když použiji slovo „dvojka“, mám na mysli znak – čáru na papíru. Když mám na mysli počet prvků, musím říci „dvě, dva“.

Když přemýšlíme o rozdílu pojmů „číslo“, „číslíce“, můžeme si položit otázku: Může být

trojka větší než pětka? Zjistíme, že může, např. **3** 5. Avšak číslo 3 je vždy menší než číslo 5.

Žáci se seznamují s digitálním zápisem číslic, někteří žáci jej vnímají lépe, než číslice arabské.

Ve čtvrtém ročníku se uvádějí římské číslice.

Úkol učitele matematiky v první třídě:

- Naučit děti psát znaky – číslice správně
- Sledovat problémy dětí se zápisem číslic, analyzovat jejich příčiny (např. nedostatečné zrakové vnímání, porucha pravolevé orientace apod.) a hledat nápravná opatření.
- Uvědomit si, že když se dítě koncentruje na správnost zápisu, zpravidla mu unikne obsah úkolu. Když se naopak koncentrují na obsah, správnost výpočtu, píše číslice chybně (např. při řešení slovní úlohy napíše některé číslice chybně, ale slovní úloha je vypočítána správně).
- V žádném případě dětem jejich problémy necitlivě nevytýkáme, ale citlivě je opravujeme a postupně učíme správným zápisům.

Číslovka je slovní druh, měli bychom číslovky správně skloňovat. Vždy platí: se dvěma, se třemi !! (nikoliv se dvěmi nebo dvouma, nikoliv se třema).

Např. číslo: s 1253 diváky čteme: S jedním tisícem dvěma sty padesáti třemi diváky). Viz skloňování číslovek.

Úkol učitele matematiky

- a) Věnujte velkou pozornost čtení čísel a svému vyjadřování.
- b) Při čtení čísel nepoužívejte označení pro číslice – dvojka, pětka, desítka, šedesátka, jednadvacítka apod.
- c) Skloňujte číslovky podle pravidel českého pravopisu.

Číselná soustava je způsob reprezentace čísel. Zpravidla používá nějaké znaky a nějaká pravidla. V historii se používaly číselné soustavy adiční (Egypt – desítková soustava), kdy se hodnota čísla určila sečtením hodnot použitých znaků, bez ohledu na jejich umístění. Dále se používají číselné soustavy poziční, kdy záleží na pozici použitých znaků. Číselná soustava o základu z má z znaků (dvojková 2, desítková 10, atd.). V poziční číselné soustavě má každá číslice dvě hodnoty: hodnotu vlastní a hodnotu místní. Např. v zápisu čísla 555 je vlastní hodnota každé číslice 5, místní hodnota se mění podle pozice – 5 jednotek, 5 desítek, 5 stovek.

Používáme poziční desítkovou soustavu, tj. deset jednotek tvoří jednu desítku, deset desítek tvoří jednu stovku, atd., tj. deset jednotek nižšího řádu tvoří vždy následující jednotku vyššího řádu.

Úkol učitele matematiky:

- a) Začínat s budováním poziční desítkové soustavy v 1. třídě při rozšiřování čísel do 20.
- b) Dbát na správné označování jednotlivých řádů: jednotky, desítky, stovky, atd.

2. Jak přistupujeme v matematice k chápání přirozených čísel:

V matematice:

- a) Přirozená čísla jsou kardinální čísla konečných množin.
- b) Přirozená čísla jsou ordinální čísla konečných, dobře uspořádaných množin.
- c) Přirozená čísla jsou prvky Peanovy množiny.

Zopakujte si pojmy: ekvivalentní množiny, uspořádané množiny, dobře uspořádané množiny, kardinální čísla konečných množin, ordinální čísla konečných, dobře uspořádaných množin.

(Viz např. učebnice: Základy elementární matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ, také seminář k tomuto předmětu).

3. Jak se vytváří představa čísla u dětí?

Všímejme si, jak dvouleté nebo tříleté dítě vnímá počet věcí kolem sebe (k čemu dospěje samostatně, co jej nikdo neučí). Nejprve ukazuje: tam jsou dvě, tam také jsou dvě, později tři. Když mu ukážeme hromádku prvků o větším počtu než tři, odmítá říct, kolik to je a zpravidla řekne: “to je moc”. Postupně však vnímá další čísla, až v šesti letech je schopno určit počet prvků ve skupinách, ve kterých je jich šest až deset. Při vnímání počtu předmětů musí dítě učinit obrovský pokrok ve svém myšlení, a to tak, že postupně přestává vnímat viditelné vlastnosti předmětů, jako je barva, velikost, tvar, materiál, ze kterého jsou zhotoveny, zda jsou živé či neživé a všímá si pouze toho, kolik jich je. To znamená, že začne vnímat, že mezi určitými skupinami objektů existuje něco společného, co nesouvisí s jejich viditelnými vlastnostmi, ale s tím, že obsahují prvky, které se dají vzájemně jednoznačně přiřadit, tj. že jich je stejně. Přitom se však nejde o žádnou cílenou výuku matematiky, ale všechny nové

poznatky dítě získává prostřednictvím her a běžných činností souvisejících s jeho životem. Současně se rozvíjí jeho komunikace verbální (zdokonaluje se jeho řeč) i nonverbální (využívá např. své značky v mateřské škole, kreseb, symbolů). Postupně se zkvalitňuje jeho vnímání, paměť, představivost i pozornost, což je nezbytné pro jeho další matematický rozvoj. Děti jsou přirozeně tvořivé a jejich tvořivosti je třeba účelně využít a dávat jim takové podněty, které přispívají k rozvoji jejich myšlení.

Číslo, podobně jako jiné abstraktní pojmy, nemůžeme vnímat smysly, vnímáme pouze reprezentanty těchto čísel. Například reprezentantem čísla čtyři mohou být čtyři auta, čtyři děti, čtyři jablíčka apod. Ale také např. bydlíme ve čtvrtém poschodí, náš dům má číslo 4, jsou čtyři hodiny, mám 4 roky apod. Děti se seznamují s kvantitativní stránkou jevů v kontaktu s okolním světem, pomocí konkrétních předmětů se postupně propracovávají k obecnějšímu chápání až k pochopení abstraktního pojmu čísla. Mnohokrát opakovaná činnost s konkrétními předměty vede k získávání zkušeností dětí, že nezáleží na tom, s jakými předměty pracují, ale pouze na tom, že je jich stejně. Musí se také naučit číslo pojmenovat a zapsat. K tomu, aby proces vytváření čísla byl pro děti snadný, využíváme mnoho činností, ve velké většině nematematických. Např. při skládání kostek domina, hraní hry Člověče, nezlob se apod. Přitom však se nemá nic uspěchat, protože k pojmu čísla se každé dítě dopracuje samostatně vlastní činností, až mu tzv. „svitne“.

Při vytváření pojmu číslo postupujeme tak, že dětem ukážeme několik skupin prvků, kde jich je stejně, např. 4 panenky, 4 auta, 4 děti, 4 jablka, atd., tedy pracujeme s konkrétními předměty.

Konkrétním předmětům přiřadíme symboly: nakreslí tolik puntíků, kolik vidíš předmětů. Zde dochází k prvnímu stupni abstrakce – ať jsou konkrétní předměty jakékoliv, vždy přiřadíme stejný symbol. Potom přiřadíme číslo – zde dochází ke druhému stupni abstrakce – ať jsou předměty či symboly jakékoliv, vždy jsou 4.

Takto vytváříme čísla nejprve do 5, případně do 6. Zvláštní pozornost věnujeme číslu 0. Číslo nula je v matematice zařazeno mezi čísla celá, nikoliv přirozená. Avšak protože na prvním stupni nulu potřebujeme, např. při odčítání $5 - 5 = 0$, pracujeme s množinou $\mathbf{N} \cup \{0\}$ neboli (\mathbf{N}_0) .

Nula se zavádí jako počet prvků prázdné množiny – skupiny, např.:

Máme dvě misky. Na jedné misce je pět jablek – zapíšeme 5. Druhá miska je prázdná – zapíšeme 0.

Není vhodné nulu uvádět jako „nic“, děti se pak k nule chovají jako k „ničemu“, neuznávají ji, v zápisech čísel ji vynechávají.

Úkolem učitele matematiky v první třídě:

- Nejdůležitější je pozorování dětí, jejich schopností pracovat s konkrétními prvky, vnímáním vlastností prvků a vnímáním jejich počtu.
- Sledovat, jak které dítě vnímá počet prvků předkládaných skupin.
- Sledovat, do jakého počtu zvládne počet prvků dané skupiny určit bez počítání po jedné, zda dochází k potřebné abstrakci.
- Zda umí určit počet prvků dané skupiny.
- Zda umí vytvořit skupinu o daném počtu prvků.
- Mějte na paměti, že všechny děti se nevyvíjejí stejně rychle, dopřejte jim dostatek času, který potřebují k pochopení čísel.
- Neexistuje „Norimberský trychtýř“, kterými bychom dětem vědomosti předali. Každé dítě musí dospět k poznatkům vlastní mozkovou činností. To znamená, že nestačí dětem něco říkat, ale je třeba připravit proces učení a aktivity dětí tak, aby se přes činnost rukou zmobilizovala činnost mozku.

4. Jak se přistupuje k zavádění přirozených čísel na 1. stupni základní školy.

Sledujte učebnice matematiky pro 1. ročník základní školy a všimněte si, jak přistupují k zavádění přirozených čísel (do pěti, do deseti, číslo 0, do dvaceti).

5. Význam přirozeného čísla

Množství – např. 5 dětí, 5 jablek, 5 kaštanů, ...

Pořadí – jsem pátý v řadě, narodil jsem se 5. 9.

Adresa – číslo našeho domu je 23

Kód – pin, telefonní číslo

Veličina 5 kg jablek, 5 litrů mléka, 5 km, ...

5. Numerace – pojmenování a zapisování čísel, seznámení se s číslem

Co je obsahem učiva, které je zařazeno pod pojem „numerace“:

Pochopení pojmu čísla

Čtení a zápis čísel

Číselná řada

Znázornění čísel na číselné ose

Porovnávání čísel

Zaokrouhlování čísel

6. Počítání po jedné

Počet prvků skupin, ve kterých není mnoho prvků, mohou děti určit pouhým pohledem. Např. v seskupení na hrací kostce hned poznají, kolik je na které stěně puntíků. Pokud je prvků více a děti nepoznají na první pohled, kolik je prvků, zpravidla počítají po jedné.

Co vlastně děláme, když počítáme po jedné? Potřebujeme k tomu řadu číslovek, ta je uspořádaná a přesně daná. Když počítáme prvky ve skupině, tak prvky postupně uspořádáváme tak, že na ně ukazujeme a vždy vyslovíme příslušnou číslovku. (Skupinu prvků nějak uspořádáme a zobrazíme ji do uspořádané množiny číslovek, každý prvek označíme číslovkou.) Poslední vyslovená číslovka určí počet prvků ve skupině. Přitom musíme bezpečně znát řadu číslovek, žádné číslo nesmíme vynechat, žádné nesmíme opakovat. Konkrétní předměty nesmíme počítat od nuly (bylo by jich o jednu více).

Počítání po jedné je založeno na pochopení, za každým slovem by si dítě mělo představit počet prvků. Pokud se děti učí počítat po jedné bez opory o význam slov, říkají bezduchou básničku, čísla vynechávají, opakují, nevědí co vlastně říkají. To se děje v případě, že dospělí učí děti vyjmenovávat řadu slov bez opory o jejich význam. Tato skutečnost se může projevit při zápisu dítěte do první třídy, kdy rodiče očekávají, jak dítě předvede co umí (že umí vyjmenovat, řadu čísel do 10), ale dočkají se častokrát zklamání.

7. Postupné rozšiřování číselného oboru v jednotlivých ročnících ZŠ:

1. ročník: přirozená čísla 0 - 20
2. ročník: přirozená čísla 0 – 100
3. ročník: přirozená čísla 0 – 1 000

4. ročník: přirozená čísla do milionu
5. ročník: Přirozená čísla

Přirozená čísla 10 – 20

Začínáme postupně budovat poziční desítkovou soustavu, např. v čísle 17 je „1“ ve významu desítky, tj. deseti jednotek. Děti se seznamují s pojmy: jednotky, desítka, učí se zapsat počet prvků a znázornit napsané číslo – např. 15 – vytvoří skupinu o 10 jednotkách – to je jedna desítka a dále 5 jednotek. Jako pomůcku můžeme využít svazky brček svázaných po deseti a další brčka jako jednotky. Sledujeme možnost využití peněžního modelu – některé děti vidí jednu desetikorunu, ale nevidí za ní deset jednotlivých korun.

Přirozená čísla 0 - 100

Nejprve hledáme reprezentace dvojciferných čísel z běžného života, se kterými se děti setkávají (počet žáků ve třídě, věk rodičů, počet dní v měsíci, ceny některého zboží, hmotnost žáků v kilogramech, atd.).

Počítání po desítkách – vzestupně i sestupně.

Počítání po jedné – vzestupně i sestupně (od nějakého čísla k jinému). Pozor na přechody mezi desítkami.

Zápis dvojciferných čísel, rozlišování čísel např. 35, 53.

Pomůcky: stovková tabule
počítadlo
zboží balené po 10 kusech (např. hygienické kapesníčky, žvýkačky, vejce)

Přirozená čísla 0 – 1 000

Motivací čísel do 1 000 může být počet žáků ve větší škole, počet obyvatel vesnice, výška dítěte v centimetrech, apod.).

Počítání po stovkách, po desítkách, po jedné – vzestupně i sestupně od některého čísla.

Čtení a zápis trojčiferných čísel.

Přirozená čísla 0 – 1 000 000

Budujeme postupně čísla do 10 000, do 100 000, do 1 000 000, hledáme vhodné motivace z běžného života, z dalších vědních oborů, např. astronomie. Upevňujeme princip budování poziční desítkové soustavy, představu o velkých číslech.

Věnujeme pozornost zápisu čísel, zejména čísel, ve kterých se na některých místech vyskytují nuly.

Pomůcky: řádová tabulka
řádové počítadlo
kartičky

Literatura

Blažková, R. (2017). Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení. Brno, MU.

Hejný, M., Stehlíková, N. (1999). Číselné představy dětí. Praha UK.

Hejný, M., Kuřina, F. (2009). Dítě, škola a matematika. Praha, Portál.

Blažková, R.: Rozvíjení matematických představ dětí. El-portál MU.

Konzultace 1 – čtvrtá část

Porovnávání přirozených čísel

Motivace: Proč porovnáváme přirozená čísla?
Uveďte příklady z běžného života, ve kterých se setkáváte s porovnáváním čísel

Porovnávání přirozených čísel se provádí několika způsoby. Využívá se pojmu zobrazení, nebo se k porovnávání přirozených čísel používá číselná osa, nebo se využívá zápisu čísla v desítkové soustavě.

K základním dovednostem žáka patří umět rozhodnout, která skupina má více či méně prvků a které číslo je větší či menší. Aby děti neměly problémy, které by byly způsobeny nedostatečnou nebo nevhodnou výukou, je třeba zachovat určitý metodický postup:

- Nejprve se děti učí chápat vztahy „více“, „méně“, „stejně“. K tomu se využívá obrázků a tvoření dvojic.
- Teprve ve druhé fázi se ke skupinám prvků přiřadí čísla a porovnávají se přirozená čísla pomocí vztahů „větší“, „menší“, „rovná se“.
- Zvládne se technika používání znaků „>“, „<“, „=“.

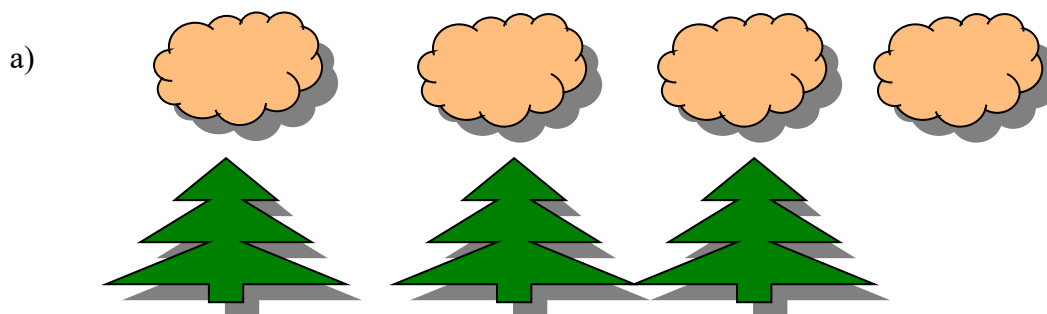
1. Porovnávání přirozených čísel s využitím zobrazení (tvoření dvojic) - chápání vztahů „více“, „méně“, „stejně“ avšak bez čísel.

Jedné se vlastně o zobrazení mezi množinami. Označíme-li množinu obláčků A a množinu stromů B, jde o tyto typy zobrazení

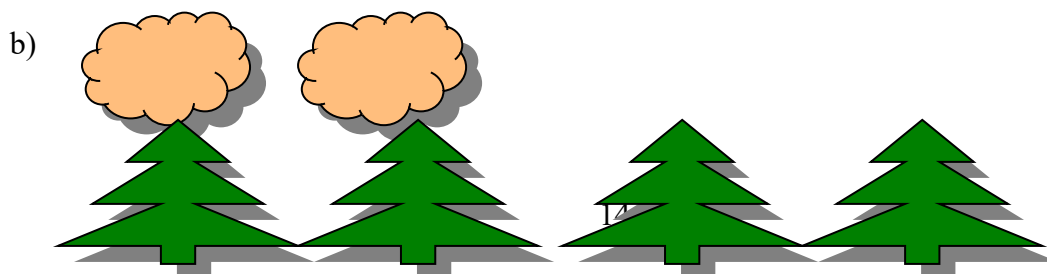
- Z množiny A na množinu B
- Množiny A do množiny B
- Množiny A na množinu B

Všechna tato zobrazení jsou prostá.

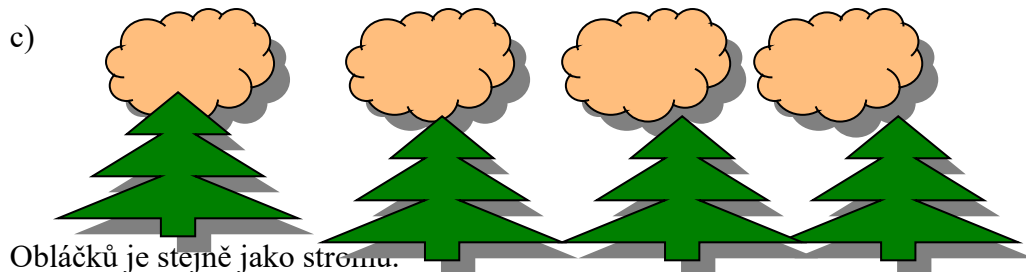
Názorně:



Obláčků je více než stromů.



Obláčků je méně než stromů.



Takových podnětů na různých činnostech obrázcích potřebuje dítě mnoho. Využívá se činností s konkrétními předměty, zejména s hračkami (např. panenky – kočárky, auta – garáže, talíře – lžičky, děvčata - chlupci aj.) dále pak modelování a kreslení. Neustále se pracuje s objekty bez čísel a zdůrazňují se vztahy „více“, „méně“, „stejně“.

Teprve ve druhé fázi se skupinám objektů přiřadí číslo a děti porovnávají počet předmětů:

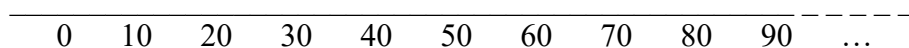
$$4 > 3 \quad 2 < 4 \quad 4 = 4$$

Varujeme se **chybného grafického znázornění**, kdy buď nerespektujeme rozdíl mezi rovností množin a ekvivalencí množin, nebo nerozlišujeme porovnávání velikostí předmětů a jejich počtu.

Pozor: Mezi objekty nelze umisťovat znaménka pro porovnávání nebo rovnost – předměty se dobře nerovnajíc ani neporovnávají, **porovnáváme pouze jejich počet**.

2. Porovnávání přirozených čísel pomocí číselné osy

Nejprve je třeba si uvědomit, co je číselná osa. Obecně je číselná osa přímka, na které znázorňujeme obrazy reálných čísel. Každému reálnému číslu je přiřazen právě jeden bod na přímce a naopak každému bodu přímky odpovídá právě jedno reálné číslo (zobrazení množiny všech reálných čísel na množinu všech bodů přímky). Pokud pracujeme pouze s čísly přirozenými, tak znázorňujeme číselnou osu jako polopřímku, na které je počátek polopřímky obrazem čísla 0 a každému přirozenému číslu je přiřazen právě jeden bod (nikoliv úsečka). (Zobrazení množiny všech přirozených čísel do množiny všech bodů polopřímky.)



Znázorněte na číselné ose obrazy čísel 32 a 48. Které z nich je větší a proč?

Na číselné ose porovnáváme čísla podle jejich vzájemné polohy (nikoliv podle vzdálenosti od počátku – od 0).

Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší to, jehož obraz leží více vpravo.

Neporovnávejte přirozená čísla pomocí vzdálenosti od nuly. Pokud se děti naučí u přirozených čísel porovnávat čísla pomocí vzdálenosti od nuly - (ze dvou čísel je větší to, které je dále od nuly), má v budoucnu velké problémy při porovnávání záporných čísel, neboť tam tato poučka neplatí.

3. Porovnávání přirozených čísel pomocí zápisu v desítkové soustavě

a) U přirozených čísel platí, že ze dvou čísel je větší to, v jehož zápisu je více cifer, např.

$$7\ 542 < 12\ 509.$$

b) Pokud mají čísla ve svém zápisu stejný počet číslic, porovnáváme počet jednotek příslušných řádů, až najdeme ten řád, ve kterém se liší, např.

Porovnáváme čísla 49 567 a 49 576. Desetitisíců, tisíců a stovek je v obou číslech stejně, čísla se liší až počtem desítek. Protože $6 < 7$, je

$$49\ 567 < 49\ 576.$$

Zaokrouhlování přirozených čísel

Motivace: K čemu potřebujeme zaokrouhlovat přirozená čísla?

Kde pracujeme se zaokrouhlenými čísly?

Uveďte příklady z běžného života.

Zaokrouhlování přirozených čísel se využívá průběžně během celé výuky matematiky. Má význam jednak praktický, jednak se používá k provádění odhadů výpočtů.

Mnoho čísel, kterých v praxi užíváme, neumíme určit přesně. Např. počet obyvatel státu, rozlohy určitých území, výsledky měření apod. Pracujeme s čísly, která jsou přibližná.

Zaokrouhlování přirozených čísel je nahrazení čísla přesného číslem jemu blízkým, a to podle určitých pravidel. Pravidla jsou stanovena státní normou.

Jestliže zaokrouhlujeme přirozené číslo na určitý řád, zajímá nás počet jednotek řádu o jednu nižšího, např. máme zaokrouhlit číslo 26 479 na tisíce. Zajímá nás počet stovek.

Pokud je počet jednotek řádu o jednu nižšího než je řád zaokrouhlovaný 0, 1, 2, 3 nebo 4, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu ponecháme a na místa nižších řádů zapíšeme nuly.

$$26\ 479 = 26\ 000 \text{ (rovnítka s tečkou)}$$

Čteme: číslo 26 470 se po zaokroulení na tisíce rovná 26 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování dolů.

Pokud je na místě řádu o jednu nižším, než je řád zaokrouhlovaný, některé z čísel 5, 6, 7, 8 nebo 9, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu zvětšíme o jednu a na místa nižších řádů zapíšeme nuly, např. číslo 26 789 zaokrouhlené na tisíce:

$$26\ 789 = 27\ 000$$

Čteme: číslo 26 789 se po zaokrouhlení rovná 27 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování nahoru.

Poznámka 1. V běžném životě se používají i jiná pravidla pro zaokrouhlování, ta však musí být explicitně a srozumitelně vyjádřena (např. v daňových přiznáních, placení zdravotního pojištění aj.).

Poznámka 2.

- Zaokrouhlené číslo představuje vždy určitý interval, např. číslo 250 získáme po zaokrouhlení čísel 245 až 254 na desítky.

- Zaokrouhlování postupné, v několika stupních, je nepřipustné, může vést k chybám. Např. číslo 34 498 správně zaokrouhlené na tisíce je 34 000. Kdybychom zaokrouhlovali nejprve na desítky, dostali bychom 34 500, kdyby se dále toto číslo zaokrouhlilo na tisíce, dostaneme 35 000, což je chybně.
- Názorně můžeme ilustrovat zaokrouhlování čísel na číselné ose.

Jaké problémy při zaokrouhlování můžeme očekávat?

- Děti pracují pouze se dvěma číslicemi zapsanými na potřebných řádech, ostatní číslice nižších řádů opíší, např.: $942\ 567 = 940\ 567$.
- Pracují podle nesprávné analogie – při zaokrouhlování nahoru počet jednotek zaokrouhlovaného řádu o jednu zvýší, při zaokrouhlování dolů pak počet jednotek o jednu sníží, např.: $942\ 567 = 930\ 000$.
- Zaměří se pouze na řád, na který zaokrouhlují, např. 21 685 zaokrouhleno na stovky napíše 700.
- Pokud mají čísla zapsaná v tabulce a mají dané číslo zaokrouhlit na desítky, stovky, tisíce, atd., zaokrouhlují již zaokrouhlené číslo (zaokrouhlování postupné).