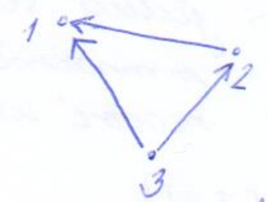
PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

(1) V množině $M = \{1,2,3\}$ je definována binární relace

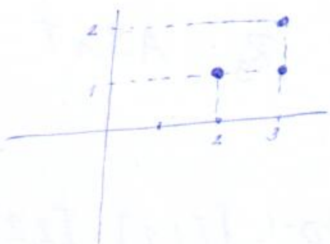
a, $R_1 = \{[x,y] \in M^2 : x < y \Leftrightarrow x = y\}$

Zapište relaci R_1 výčtem prvků a sestrojte její uzlový graf a kartézský graf.
Výčtem prvků zapište inverzní relaci R_1^{-1} a doplňkovou relaci R_1'. Zjistěte, jaké vlastnosti má relace R_1.

$R_1 = \{[2,1]; [3,1]; [3,2]\}$



uzlový graf



R_1: ~~R~~, AR, ~~S~~, AS, T, SO

AR → ostré

AS, T → uspořádání

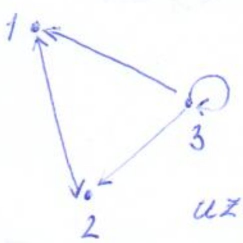
SO → lineární

(tj. relace R_1 je AR, AS, T, SO, tedy se jedná o uspořádání, které je lineární-ostré)

$R_1^{-1} = \{[1,2]; [1,3]; [2,3]\}$; $R_1' = \{[1,1]; [2,2]; [3,3]; [1,2]; [1,3]; [2,3]\}$

b, $R_2 = \{[x,y] \in M^2 : x < 3 \Rightarrow x + y = 3\}$

$R_2 = \{[1,2], [2,1]; [3,3]; [3,2]; [3,1]\}$



uzlový graf

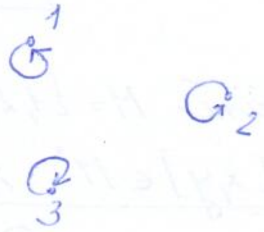
R_2: ~~R~~, ~~AR~~, ~~S~~, ~~AS~~, ~~T~~, SO

$R_2^{-1} = \{[2,1]; [1,2]; [3,3]; [2,3]; [1,3]\}$

$R_2' = \{[1,1]; [2,2]; [1,3]; [2,3]\}$

c) $R_3 = \{ [x,y] \in M^2 : x \neq y \Rightarrow x = y \}$

$R_3 = \{ [1,1]; [2,2]; [3,3] \}$



$R_3 : \underline{R}, \cancel{AR}, \underline{S}, \underline{AS}, \underline{T}, \cancel{S0}$

$R_3 : R \wedge S \wedge T \Rightarrow$ jedná se o relaci ekvivalence na množině M. Její rozklad je určen množinou $T = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \}$

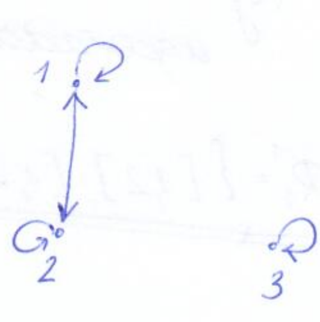
$R_3 : AS \wedge T \Rightarrow$ jedná se zároveň o relaci uspořádání v množině M. Toto uspořádání je neostré uspořádání a není lineární.

$R_3^{-1} = \{ [1,1]; [2,2]; [3,3] \}$

$R_3' = \{ [1,2]; [1,3]; [2,1]; [3,1]; [2,3]; [3,2] \}$

d) $R_4 = \{ [x,y] \in M^2 : x \neq y \Rightarrow x + y = 3 \}$

$R_4 = \{ [1,2]; [2,1]; [1,1]; [2,2]; [3,3] \}$



$R_4 : \underline{R}, \cancel{AR}, \underline{S}, \cancel{AS}, \underline{T}, \cancel{S0}$

$R_4 : R \wedge S \wedge T \Rightarrow$ jedná se o relaci ekvivalence. Její rozklad je určen množinou $T = \{ \{3\}; \{1,2\} \}$

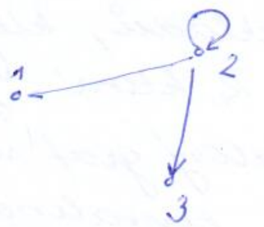
má 2 třídy rozkladu

$R_4^{-1} = \{ [2,1]; [1,2]; [1,1]; [2,2]; [3,3] \}$

$R_4' = \{ [1,3]; [3,1]; [2,3]; [3,2] \}$

e, $\underline{R_5 = \{[x,y] \in M^2 : x = 2 \vee y > x+2\}}$

$\underline{\underline{R_5 = \{[2,1];[2,2];[2,3]\}}}$



$R_5: \cancel{R}, \cancel{AR}, \cancel{S}, \underline{AS}, \underline{T}, \cancel{SO}$

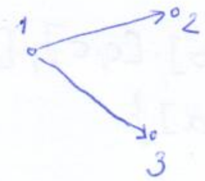
R_5: $AS \wedge T$ => jedná se o uspořádání (není lineární SO, není ostré AR, není neostré R)

$\underline{R_5^{-1} = \{[1,2];[2,2];[3,2]\}}$

$\underline{\underline{R_5' = \{[1,1];[1,2];[1,3];[3,1];[3,3];[3,2]\}}}$

f, $\underline{R_6 = \{[x,y] \in M^2 : x < y \wedge x | y\}}$

$\underline{\underline{R_6 = \{[1,2];[1,3]\}}}$



$R_6: \cancel{R}, \underline{AR}, \cancel{S}, \underline{AS}, \underline{T}, \cancel{SO}$

R_6: $AR \wedge AS \wedge T$ => jedná se o uspořádání ostré (není lineární)

$\underline{\underline{R_6^{-1} = \{[2,1];[3,1]\}}}$

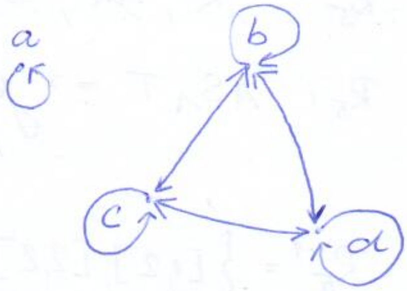
$\underline{\underline{R_6' = \{[1,1];[2,2];[3,3];[2,1];[3,1];[2,3];[3,2]\}}}$

g) $R_7 = \{[x,y] \in M^2 : x < 3 \Leftrightarrow x+y\}$ $\left(R_7 = \{[1,2];[2,1];[3,1];[3,2];[3,3]\}\right)$
$\cancel{R}, \cancel{AR}, \cancel{S}, \cancel{AS}, \cancel{T}, \underline{SO}$

h) $R_8 = \{[x,y] \in M^2 : x = 3 \Leftrightarrow y = 2\}$ $\left(R_8 = \{[3,2];[1,1];[1,3];[2,3];[2,1]\}\right.$
$\cancel{R}, \cancel{AR}, \cancel{S}, AS, \cancel{T}, \underline{SO}$

② Je dána množina $M = \{a, b, c, d\}$. Určete některý z jejich rozkladů, který má 2 třídy. Zapište výčtem ekvivalenci R_1, která je tímto rozkladem určena. Sestrojte uzlový graf relace R_1. Které z vlastností má relace ekvivalence R_1? Určete R_1^{-1}; R_1'.

1. možnost rozkladu množiny M:



$$T = \{ \{a\}, \{b, c, d\} \}$$

třídy rozkladu

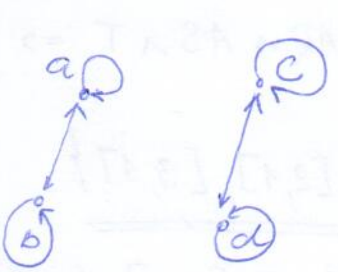
$$R_1 = \{[a,a]; [b,b]; [c,c]; [d,d]; [c,b]; [b,c]; [c,d]; [d,c]; [b,d]; [d,b]\}$$

Relace ekvivalence R_1: $\underline{R}, \cancel{AR}, \underline{S}, \cancel{AS}, \underline{T}, \cancel{SO}$

$$R_1^{-1} = \{[a,a]; [b,b]; [c,c]; [d,d]; [b,c]; [c,b]; [d,c]; [c,d]; [d,b]; [b,d]\}$$

$$R_1' = \{[a,b]; [b,a]; [a,c]; [c,a]; [a,d]; [d,a]\}$$

2. možnost rozkladu množiny M:



$$T = \{ \{a, b\}; \{c, d\} \}$$

třídy rozkladu

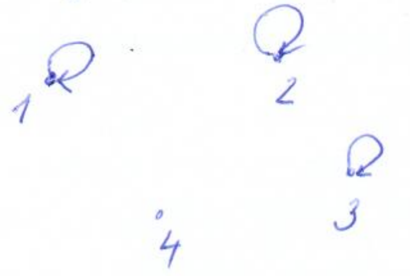
$$R_1 = \{[a,a]; [b,b]; [a,b]; [b,a]; [c,c]; [d,d]; [c,d]; [d,c]\}$$

Relace ekvivalence R_1: $\underline{R}, \cancel{AR}, \underline{S}, \cancel{AS}, \underline{T}, \cancel{SO}$

$$R_1^{-1} = \{[a,a]; [b,b]; [b,a]; [a,b]; [c,c]; [d,d]; [d,c]; [c,d]\}$$

$$R_1' = \{[a,c]; [c,a]; [b,c]; [c,b]; [a,d]; [d,a]; [b,d]; [d,b]\}$$

(3) V množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$ je definována binární relace $R_1 = \{[1,1]; [2,2]; [3,3]\}$. Rozhodněte, které z vlastností má relace R_1. Rozhodněte, zda se jedná o uspořádání případně o ekvivalenci. Sestrojte uzlový graf relace R_1 v množině M. Určete R_1^{-1}.



$R_1: \cancel{R}, \cancel{AR}, \underline{S}, \underline{AS}, \underline{T}, \cancel{SO}$

$R_1^{-1} = \{[1,1]; [2,2]; [3,3]\}$

Relace R_1: $\cancel{R} \wedge \underline{S} \wedge \underline{T}$ $\Rightarrow$ není ekvivalence (není reflexivní)

$\cancel{R} \wedge \cancel{AR} \wedge \underline{S}, \underline{AS}, \underline{T}, \cancel{SO}$ $\Rightarrow$ jedná se o uspořádání (není ani lineární ani ostré)

Relace uspořádání - uspořádání v množině (uč. str. 66, 67)

Def. Uspořádání v množině M je každá binární relace R, která je antisymetrická a tranzitivní (AS a T).

Pozn. 2. uč. str. 67
Je-li relace uspořádání souvislá (SO), pak se uspořádání nazývá **lineární**.
Je-li relace uspořádání antireflexivní (AR), nazývá se uspořádání **ostré**.
Je-li relace uspořádání reflexivní (R), nazývá se uspořádání **neostré**.

Vzhledem k výše uvedenému označení rozeznáváme 6 typů uspořádání:

Uspořádání
1. $AS \wedge T \wedge SO \wedge AR$ ostré lineární uspořádání
2. $AS \wedge T \wedge SO \wedge R$ neostré lineární uspořádání
3. $AS \wedge T \wedge SO \wedge \cancel{AR} \wedge \cancel{R}$ lineární uspořádání, které není ostré ani neostré
4. $AS \wedge T \wedge \cancel{SO} \wedge AR$ ostré uspořádání, které není lineární
5. $AS \wedge T \wedge \cancel{SO} \wedge R$ neostré uspořádání, které není lineární
6. $AS \wedge T \wedge \cancel{SO} \wedge \cancel{AR} \wedge \cancel{R}$ uspořádání, které není lineární, není ostré ani neostré

Např.:
Je dána množina M = {a, b, c, d }. Příklady jednotlivých typů uspořádání v množině M:

1. $R_1 = \{[b,a], [b,c], [b,d], [a,c], [a,d], [c,d]\}$ $|M| = [\{b,a,c,d\}]$
2. $R_2 = \{[b,a], [b,c], [b,d], [a,c], [a,d], [c,d], [a,a], [b,b], [c,c], [d,d]\}$
3. $R_3 = \{[b,a], [b,c], [b,d], [a,c], [a,d], [c,d], [a,a]\}$
4. $R_4 = \{[b,a], [b,c], [b,d], [a,c], [a,d]\}$ nebo např. $R_4 = \{[c,a]\}$
5. $R_5 = \{[c,a], [a,a], [b,b], [c,c], [d,d]\}$
6. $R_6 = \{[c,a], [b,b]\}$

Def. Uspořádanou množinu definujeme také jako uspořádanou dvojici množin (M, R), kde R je uspořádání v neprázdné množině M. Množinu M nazýváme pole uspořádané množiny. Značíme též M = (M, $\prec_R$).

Např. (N, <) - ostře lineárně uspořádaná množina, relace < (nerovnost mezi přirozenými čísly) je relace ostrého lineárního uspořádání.

(N, $\leq$) - neostře lineárně uspořádaná množina

$M = \{a,b,c\}$; (M,R) $R = \{[c,a], [c,b], [b,a]\}$; $|M| = [\{c,b,a\}]$
(M,R^*) $R^* = \{[b,c], [b,a], [c,a]\}$ $|M| = [\{b,c,a\}]$

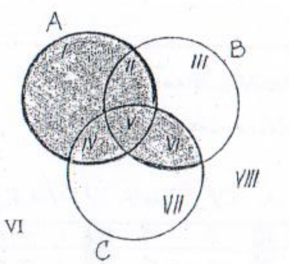
13

Jaké podmínky musí platit, aby L, P byly disjunktní?
L, P disjunktní : $L \cap P = \emptyset$: $II = \emptyset \wedge V = \emptyset$ tj: $A \cap B = \emptyset$

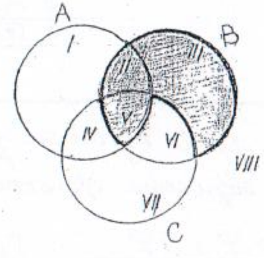
1. **Rozhodněte jaké podmínky musí splňovat množiny A, B, C, aby pro množiny.**
$L = [B - (B - A)] \cup [A \cup (B \cap C)]$, $P = [(B \triangle C) - C] \cup (A \cap B)$ **platilo**
a) $L \subset P$, b) $P \subset L$, c) $P = L$, d) $P \neq L$.

Řešení:
Situaci znázorníme množinovým diagramem.

L:



P:



B: II, III, V, VI

B-A: III, VI

B- (B-A): II, V
B∩C: V, VI
A: I, II, IV, V

L: I, II, IV, V, VI

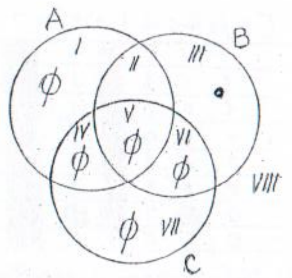
B △ C: II, III, IV, VII
C: IV, V, VI, VII
(B △ C) - C: II, III
A ∩ B: II, V

P: II, III, V

a) Je-li $A \cap B' = \emptyset \wedge A' \cap B \cap C = \emptyset$, pak $L \subset P$.
b) Je-li $A' \cap B \cap C' = \emptyset$, pak $P \subset L$.
c) Je-li $L \subset P \wedge P \subset L$, pak je $P = L$. Lze zapsat i takto: Je-li $A \triangle B = \emptyset$, pak $P = L$.
d) Je-li $A \triangle B \neq \emptyset$, pak $L \neq P$.

$L = A \cup (B \cup C) = A \cup (A' \cap B \cap C)$ $P = (B - C) \cup (A \cap B \cap C)$

2. **Pro množiny A, B, C platí $A - B = B \cap C \wedge C \subset A \wedge B - A \neq \emptyset$.**
Situaci znázorněte a rozhodněte, který z následujících výroků je pravdivý:
1. $A \cap B = C \triangle B$, **2.** $B \triangle C \neq \emptyset$, **3.** $A \cup B \subset A \cup C$,
4. $A = (B \cup C) - (A \triangle B)$, **5.** $A \triangle C = \emptyset$, **6.** $A' \subset C'$.



Pravdivé výroky: 2., 4., 6.
Nepravdivé výroky: 1., 3.

O pravdivosti výroku 5. nelze rozhodnout. Nemáme informace o poli II.
Je-li $A \cap B \cap C' = \emptyset$, pak je $A \triangle C = \emptyset$.
Je-li $A \cap B \cap C' \neq 0$, pak je $A \triangle C \neq \emptyset$.